

### 3. Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки

**Задание.** Твердое тело, принимаемое за материальную точку, движется из положения А внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости.

1. Найти скорость тела в положениях В и С и D (если такое изображено на рисунке), давление тела на стенку трубки в положении С, а также наибольшее сжатие пружины в конце трубки. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 тело, пройдя путь  $h_0$ , отделяется от пружины.

2. Пройдя трубку, в точке D (или С) твердое тело встречается с пружиной жесткости  $c_1$  (ненапряженной в этом положении) и закрепляется на её конце, после чего начинаются свободные незатухающие (силы сопротивления не учитываются) колебания тела. Составить дифференциальное уравнение колебаний, получить закон колебаний, а также определить их параметры: круговую частоту, амплитуду и период.

В задании приняты следующие обозначения:  $m$  – масса тела;  $v_A$  – начальная скорость тела;  $\tau$  – время движения тела на участке АВ (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке ВD (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9 – 13, 15 – 17, 19, 22, 25, 26, 28, 29);  $f$  – коэффициент трения скольжения тела по стенке трубки на прямолинейных участках;  $\Delta_0$  – начальная деформация пружины в начале трубки;  $\Delta$  – наибольшее сжатие пружины в конце трубки;  $c$  – коэффициент жесткости пружины в начале трубки;  $H$  – наибольшая высота подъема тела;  $s$  – путь, пройденный телом до остановки.

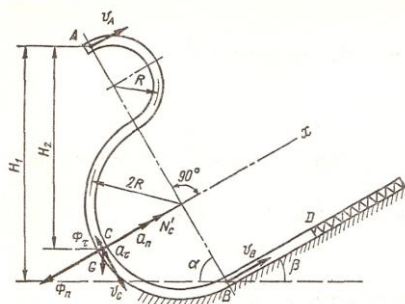


Рис. ПЗ.1

*Пример.* Дано:  $m=0,5$  кг;  $v_A=0,8$  м/с;  $\tau=0,1$  с (время движения на участке BD);  $R=0,2$  м;  $f=0,1$ ;  $\alpha=60^\circ$ ;  $\beta=30^\circ$ ;  $\Delta_0=0$ ;  $c_1=1000$  Н/м (рис. ПЗ.1). Определить  $v_B$ ,  $v_C$ ,  $v_D$  – скорости шарика в положениях В, С и D;  $N_C$  – сила давления шарика на стенку трубки в точке С;  $h$  – наибольшее сжатие пружины.

*Решение.* Для определения  $v_B$  и  $v_C$  применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках AC и CB траектории происходит под действием силы тяжести  $G$  (силы трения на криволинейных участках не учитываем):

$$\frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = \sum A_i = G H_1 = mgAB \sin \alpha = mgR \sin \alpha ;$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g \cdot 6R \sin \alpha ; v_B = 4,59 \text{ м/с};$$

$$\frac{m v_C^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = \sum A_i = G H_2 = mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha) =$$

$$= mgR \sin \alpha ; v_C^2 - v_A^2 = 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha);$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha)} = 4,26 \text{ м/с}.$$

Определим давление тела на стенку канала в положении С. Для этого запишем уравнение метода кинетостатики для тела: геометрическая сумма сил, приложенных к шарiku ( $\overline{N'_C}$  – реакция трубки в положении С) и его силы инерции равна нулю:

$$\overline{G} + \overline{N'_C} + \overline{J} = 0. \quad (3.1)$$

Силу инерции тела можно разложить на нормальную и касательные составляющие:

$$\overline{J} = \overline{J_n} + \overline{J_\tau}.$$

Спроецируем уравнение (3.1) на ось  $x$ :

$$N'_C - G \cos 60^\circ - J_n = 0.$$

Модуль нормальной составляющей силы инерции:

$$J_n = m w_n = m \frac{v_C^2}{2R}.$$

Отсюда

$$N'_C = G \cos 60^\circ + J_n = mg \cos 60^\circ + m \frac{v_C^2}{2R} = 25,2 \text{ Н.}$$

Искомое давление  $N_C$  шарика на стенку трубки по величине равно найденной реакции  $N'_C$  и направлено в противоположную сторону.

Скорость шарика в положении  $D$  найдем, применив на участке  $BD$  теорему об изменении количества движения материальной точки (рис. П 3.2):

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix}.$$

К точке приложены сила тяжести  $\bar{G}$ , сила реакции стенки трубки  $N'_C$  и сила трения  $\bar{F}$ :

$$F = f \cdot N' = f G = f G \cos \beta.$$

Так как

$$v_{Dx} = v_D, v_{Dx} = v_D, \sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = \\ -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

то

$$v_D - v_B = -g(\sin \beta - f \cdot \cos \beta) \cdot t.$$

Отсюда  $v_D = 4,01$  м/с.

Для определения максимального сжатия  $\Delta$  пружины воспользуемся на участке  $DE$  теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = \sum A_i,$$

или

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = -c\Delta^2/2 - GH_3 - F\Delta.$$

Учитывая, что  $v_E=0$  и  $H_3 = \Delta \sin \beta$ , получаем

$$c\Delta^2/2 + g(\sin\beta + f \cos\beta)\Delta - mv_D^2/2 = 0,$$

Или

$$\Delta^2 + 2G\Delta(\sin\beta + f \cos\beta)/c - mv_D^2/c = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно  $\Delta$ , получим

$$\Delta = (-0,003 \pm 0,090) \text{ м.}$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения:

$$\Delta = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$$

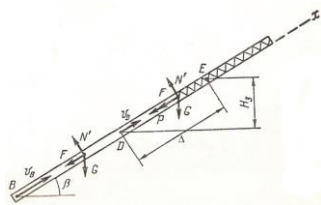


Рис. ПЗ.2

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось  $x$  (силу тяжести не учитываем):

$$m\ddot{x} = -cx. \quad (3.2)$$

По известным массе груза  $m$  и жесткости пружины на конце трубки  $c_1$  определим частоту колебаний:

$$k = 44,7 \text{ с}^{-1}.$$

Соответственно, период колебаний:

$$T = 0,14 \text{ с.}$$

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Постоянные интегрирования определяем из начальных условий (в точке D):

$$x|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}|_{t=0} = v_D,$$

т.е.  $C_1=0$ ,  $C_2 = 0,087 \text{ м.}$

Таким образом, закон колебаний имеет вид:

$$x = 0,087 \cdot \sin 44,7t, \text{ м.}$$

Амплитуда колебаний:

$$a = 0,087 \text{ м.}$$

Варианты заданий 1 -30 представлены в Таблице 3.1.

Таблица 3.1 Варианты заданий.

№ вар	m, кг	v <sub>A</sub> , м/с	τ, с	R, м	f	α, °	β, °	h <sub>0</sub> , см	c, Н/см	c <sub>1</sub> , Н/см
1	0,5	20	2,0	2,0	0,2	30	45	–	–	2
2	0,6	16	0,2	4,0	0,1	45	20	–	–	1
3	0,4	0	2,0	0,2	0,2	30	–	10	1	4
4	0,2	5	0,5	1,0	0,1	45	–	–	–	2
5	0,1	8	1,5	2,0	0,2	30	–	–	–	4
6	0,3	2	2,0	4,0	0,1	30	20	30	2	2
7	0,4	5	1,0	1,0	0,2	30	–	50	5	2
8	0,2	1	0,5	2,0	0,2	30	60	0	4	1
9	0,5	2	1,5	4,0	0,3	20	60	–	–	1
10	0,4	4	0,1	0,5	0,2	30	60	0,2	0,2	2
11	0,2	6	1,0	1,0	0,1	45	–	–	3	2
12	0,4	5	0,4	2,0	0,2	30	60	–	–	1
13	0,3	0	0,1	1,0	0,2	30	60	50	10	1
14	0,6	0	2,0	3,0	0,2	60	30	–	–	0,5
15	0,1	1	0,1	1,0	0,2	60	20	50	0,2	1
16	0,4	2	0,2	2,0	0,1	30	–	–	–	2
17	0,2	0	0,1	1,0	0,2	30	–	40	1,0	0,5
18	0,3	3	0,4	1,5	0,2	45	–	–	–	3
19	0,1	4	0,1	0,4	0,3	30	60	10	0,5	0,5
20	0,2	9	1,0	0,5	0,2	60	–	0	1,2	1
21	0,7	3	0,3	0,3	0,2	45	–	–	–	2
22	0,4	1	0,2	0,2	0,4	45	–	–	1,1	4
23	0,6	2	0,4	0,2	0,2	45	–	–	–	0,5
24	0,5	0	0,5	0,6	0,3	30	30	30	–	4
25	0,1	0	0,2	0,5	0,2	–	30	30	0,4	2
26	0,2	2	0,1	0,2	0,2	30	–	–	–	1
27	0,8	3	0,2	0,4	0,2	45	–	–	–	0,5
28	0,3	4	0,1	0,6	0,1	30	15	60	0,1	1
29	0,5	0	0,2	0,5	0,2	45	30	50	0,8	0,5
30	0,8	5	0,3	0,6	0,1	30	–	–	–	2

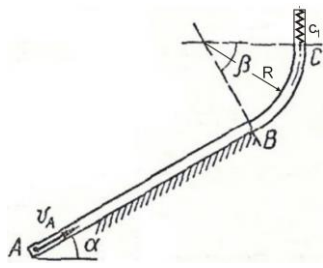


Рис. 3.1

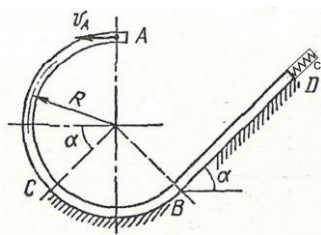


Рис. 3.4

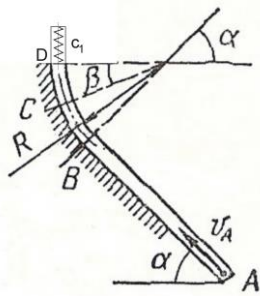


Рис. 3.2

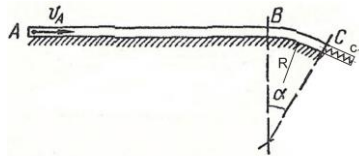


Рис. 3.5

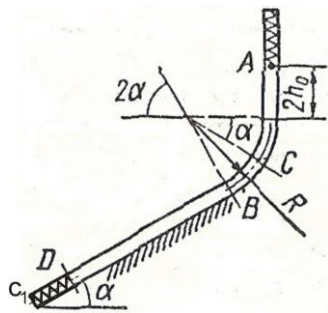


Рис. 3.3

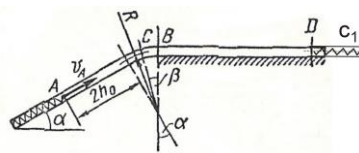


Рис. 3.6

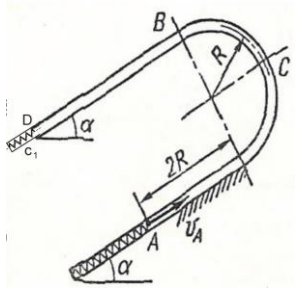


Рис. 3.7

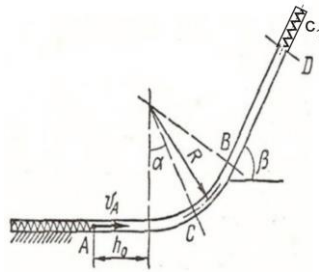


Рис. 3.10

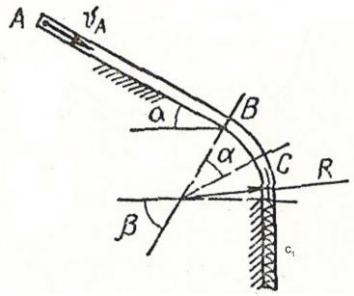


Рис. 3.8

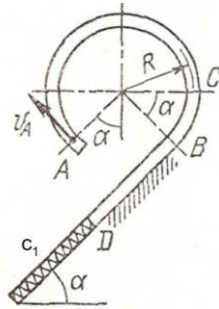


Рис. 3.11

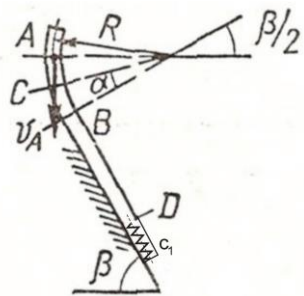


Рис. 3.9

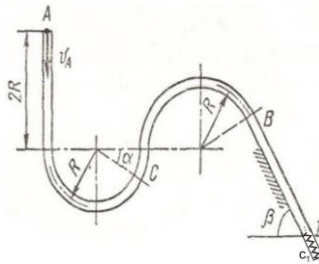


Рис. 3.12

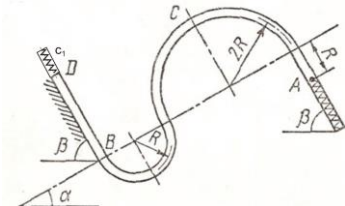


Рис. 3.13

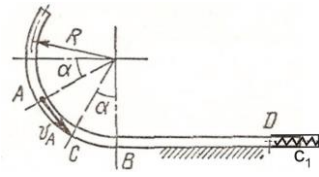


Рис. 3.16

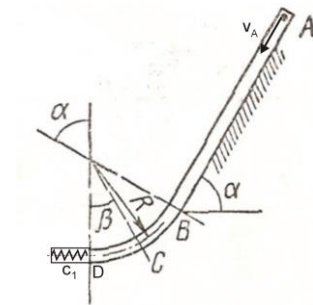


Рис. 3.14

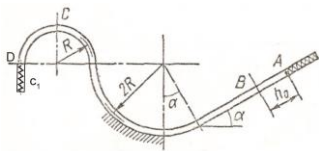


Рис. 3.17

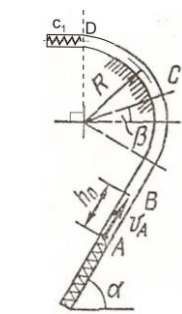


Рис. 3.15

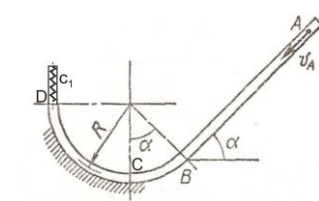


Рис. 3.18



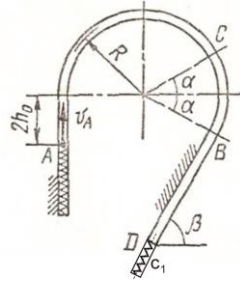


Рис. 3.19

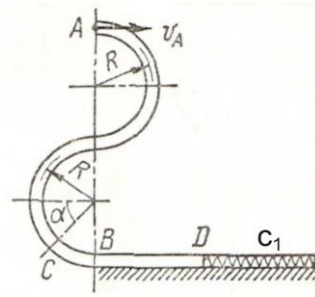


Рис. 3.22

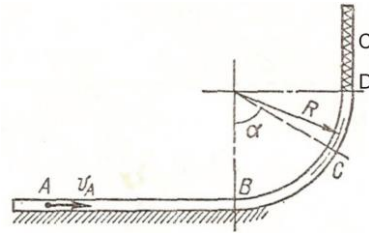


Рис. 3.20

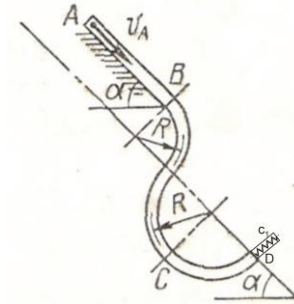


Рис. 3.23

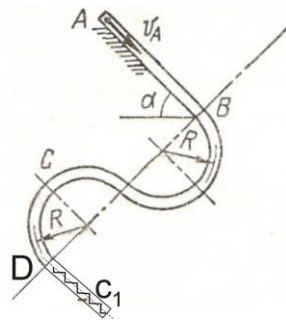


Рис. 3.21

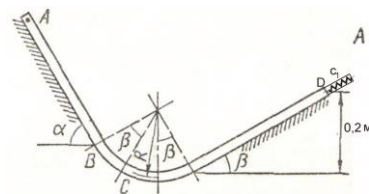


Рис. 3.24

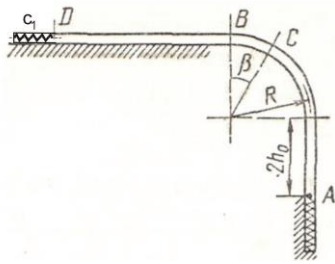


Рис. 25

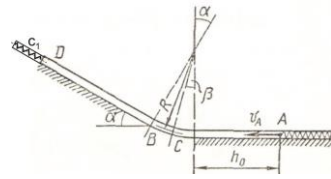


Рис. 28

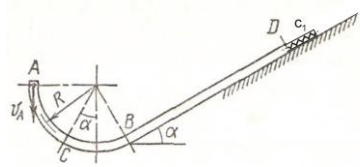


Рис. 3.26

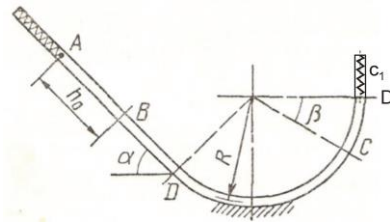


Рис. 3.29

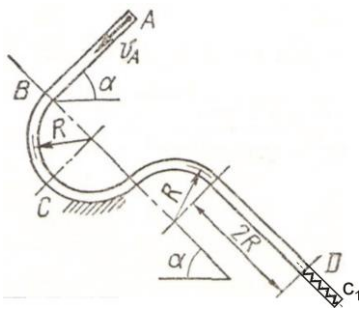


Рис. 3.27

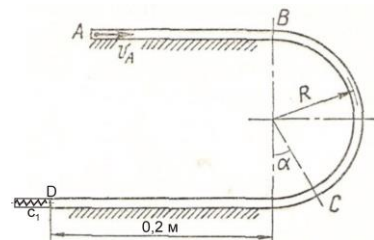


Рис. 3.30