Модуль I. ТЕОРИЯ СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Основные пространства

1. Построить график функции $x = x(t)$. По графику определить, принадлежит ли функция пространствам непрерывных функций $C[a;b]$, $C[c;d]$.

1. $x(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2}, -1 < t < 1 \\ 2,\ t = 1 \\ \ln t,\ t > 1 \\ t+1,\ t \le -1 \end{cases}$, $[a;b] = [0;2]$, $[c;d] = [-2;0]$

2. $x(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{4},\ t \le -\dfrac{\pi}{4} \\ tg(t),\ -\dfrac{\pi}{4} < t < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right),\ t > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$, $[a;b] = [0;\pi]$, $[c;d] = [-2;-1]$

3. $x(t) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi t}{2},\ |t| < 1 \\ |t-1|,\ |t| > 1 \end{cases}$, $[a;b] = [0;2]$, $[c;d] = [-2;0]$

4. $x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t+2},\ t \in (-\infty;-2) \cup (-2;0) \\ \dfrac{1}{t-2},\ t \in [0;2) \cup (2;+\infty) \end{cases}$, $[a;b] = [0;2]$, $[c;d] = [-1;1]$

5. $x(t) = \begin{cases} \sqrt{9-t^2},\ 0 < t \le 3 \\ \sqrt{-t},\ t \le 0 \\ \dfrac{1}{t-3},\ t > 3 \end{cases}$, $[a;b] = [1;3]$, $[c;d] = [-1;1]$

6. $x(t) = \begin{cases} |\sin t|,\ |t| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1,\ t > \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2t+\pi},\ t < -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, $[a;b] = [-\pi;\pi]$, $[c;d] = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

7. $x(t) = \begin{cases} e^{-t},\ t \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty) \\ 1-2t,\ 0 < t \le 1 \\ \dfrac{1}{t-2},\ 1 < t < 2 \end{cases}$, $[a;b] = [-1;1]$, $[c;d] = [0;2]$

8. $x(t)=\begin{cases} arctg(t),\ t\le -1 \\ -t^2,\ -1<t<1 \\ t-2,\ t>1 \end{cases}$, $[a;b]=[-2;0]$, $[c;d]=[0;2]$

9. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{2}{t+3},\ t\in(-\infty;-3)\cup(-3;1) \\ \dfrac{1}{3-t},\ t\in[1;3)\cup(3;+\infty) \end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=[0;4]$

10. $x(t)=\begin{cases} |\ln t|,\ t>0 \\ -t^2,\ -2<t\le 0 \\ -(t+4)^2,\ t<-2 \end{cases}$, $[a;b]=[0;1]$, $[c;d]=[-3;0]$

11. $x(t)=\begin{cases} \log_2(t+2),\ |t|<2 \\ 2\sin\dfrac{\pi t}{4},\ |t|\ge 2 \end{cases}$, $[a;b]=[-3;0]$, $[c;d]=[0;3]$

12. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{t},\ t<0 \\ 2t-1,\ 0\le t<3 \\ 10-\dfrac{t^2+1}{2},\ t>3 \end{cases}$, $[a;b]=[0;5]$, $[c;d]=[-1;1]$

13. $x(t)=\begin{cases} 1-2t,\ t<-2 \\ -t^3,\ -2\le t<0 \\ arctg(t),\ t>0 \end{cases}$, $[a;b]=[-4;-1]$, $[c;d]=[-1;1]$

14. $x(t)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-t),\ t<1 \\ 1-t,\ 1\le t\le 3 \\ t^2-11,\ t>3 \end{cases}$, $[a;b]=[0;1]$, $[c;d]=[1;6]$

15. $x(t)=\begin{cases} -\sqrt{1-t^2},\ |t|<1 \\ \ln t,\ t>1 \\ \dfrac{1}{t+1},\ t<-1 \end{cases}$, $[a;b]=[-10;0]$, $[c;d]=[0;10]$

16. $x(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{t^2},\ t\in(-1;0)\cup(0;1) \\ -1,\ t=0 \\ t^2-2t,\ t\ge 1 \\ -t^2,\ t\le -1 \end{cases}$, $[a;b]=[-3;3]$, $[c;d]=[0;2]$

17. $x(t)=\begin{cases}\sqrt{|t|},\ |t|\le 1\\ 1,\ t<-1\\ \dfrac{1}{1-t},\ t>1\end{cases}$, $[a;b]=[-2;1]$, $[c;d]=[0;2]$

18. $x(t)=\begin{cases}-\sqrt{t},\ t>0\\ -1,\ t=0\\ t^2-2,\ -2\le t<0\\ \dfrac{1}{t+2},\ t<-2\end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=[-2;-1]$

19. $x(t)=\begin{cases}\sqrt{4-t^2},\ |t|\le 2\\ \dfrac{1}{t-4},\ t\in(2;4)\cup(4;+\infty)\\ -\dfrac{1}{t+4},\ t\in(-\infty;-4)\cup(-4;-2)\end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=[0;4]$

20. $x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t^2},\ t\in(-1;0)\cup(0;1)\\ 0,\ t=0\\ |t|,\ t\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$

Указание к решению

Для решения следует использовать определение пространства непрерывных функций $C[a;b]$, сформулированное в §1 конспекта лекций.

2. Определить аналитическим способом (без построения графика), принадлежит ли функция $x=x(t)$ пространствам непрерывных функций $C[a;b]$, $C[c;d]$.

1. $x(t)=\begin{cases}t\ln\left(t-t^2\right),\ t\in(0;1)\\ 0,\ t\notin(0;1)\end{cases}$, $[a;b]=\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$, $[c;d]=\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

2. $x(t)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos t}{\sin^2 t},\ t\ne\pi k,\ k\in Z\\ 1/2,\ t=\pi k,\ k\in Z\end{cases}$, $[a;b]=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $[c;d]=[0;2\pi]$

3. $x(t)=\begin{cases}arctg\,\dfrac{t}{1-t^2},\ |t|<1\\ \pi/2,\ |t|\ge 1\end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-2;0]$

4. $x(t)=\begin{cases} t\ln t,\ t>0 \\ 1,\ t=0 \\ \dfrac{arctg(t)}{t},\ t<0 \end{cases}, \quad [a;b]=[-2;2], \quad [c;d]=[0;3]$

5. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{3t-|t|}{e^{2t}-1},\ t\neq 0 \\ 1,\ t=0 \end{cases}, \quad [a;b]=[-1;1], \quad [c;d]=[0;1]$

6. $x(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}},\ |t|<1 \\ 0,\ |t|\geq 1 \end{cases}, \quad [a;b]=[-1/2;1/2], \quad [c;d]=[-2;2]$

7. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{\cos t+1}{\sin t},\ t\neq \pi k,\ k\in Z \\ 0,\ t=\pi k,\ k\in Z \end{cases}, \quad [a;b]=[-\pi;\pi], \quad [c;d]=\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

8. $x(t)=\begin{cases} \cos\left(e^{1/t}\right),\ t<0 \\ 1,\ t=0 \\ \dfrac{t}{e^t-\cos t},\ t>0 \end{cases}, \quad [a;b]=[-1;1], \quad [c;d]=[0;3]$

9. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{t-1}{\ln t},\ t\in(1;2] \\ 1,\ t\notin(1;2] \end{cases}, \quad [a;b]=[0;2], \quad [c;d]=[1;4]$

10. $x(t)=\begin{cases} \cos\pi t,\ t\leq -1 \\ e^{\frac{1}{t^2-1}},\ t\in(-1;1), \\ \sin\pi t,\ t\geq 1 \end{cases} \quad [a;b]=[0;2], \quad [c;d]=[-2;0]$

11. $x(t)=\begin{cases} \cos\left(e^{-\frac{1}{t}}\right),\ t\neq 0 \\ 1,\ t=0 \end{cases}, \quad [a;b]=[0;2], \quad [c;d]=[-1;1]$

12. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{|t|+t}{\sqrt[3]{1+t}-1},\ t\neq 0 \\ 6,\ t=0 \end{cases}, \quad [a;b]=[-1;1], \quad [c;d]=[0;1]$

13. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{\cos t}{t-\pi/2},\ t>\pi/2 \\ \sin(t-\pi),\ t\leq \pi/2 \end{cases}, \quad [a;b]=[0;\pi/2], \quad [c;d]=[0;\pi]$

14. $x(t)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{t-1}, t\neq 1 \\ \pi/2,\ t=1 \end{cases}$, $[a;b]=[1;4]$, $[c;d]=[0;2]$

15. $x(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, t>0 \\ 6,\ t=0 \\ \dfrac{t^3}{t-\sin t}, t<0 \end{cases}$, $[a;b]=[-1;1]$, $[c;d]=[-2;0]$

16. $x(t)=\begin{cases} t\ln t,\ t>0 \\ 0,\ t=0 \\ \dfrac{t}{\ln(t^2+1)}, t<0 \end{cases}$, $[a;b]=[0;1]$, $[c;d]=[-1;1]$

17. $x(t)=\begin{cases} t\ln(t^2-2t),\ t\notin[0;2] \\ \sin\pi t,\ t\in[0;2] \end{cases}$, $[a;b]=[1;3]$, $[c;d]=[-2;2]$

18. $x(t)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{t^2-1}, t\notin[-1;1] \\ \arcsin t,\ t\in[-1;1] \end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-2;0]$

19. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{t-|t|}{e^t-1}, t\neq 0 \\ 2,\ t=0 \end{cases}$, $[a;b]=[-1;0]$, $[c;d]=[-2;2]$

20. $x(t)=\begin{cases} \sin\left(e^{\frac{1}{t-1}}\right), t\neq 1 \\ 0,\ t=1 \end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[0;1]$

Образец решения

$$x(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln t}, t\in(0;1) \\ 0,\ t=0 \\ \dfrac{\sin t^2}{t}, t\notin[0;1) \end{cases},\quad [a;b]=[-2;2],\quad [c;d]=[1;3]$$

Используем определение пространства непрерывных функций $C[a;b]$, сформулированное в §1 конспекта лекций:

$$x\in C[a;b] \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{l} x(t) \text{ определена в каждой точке отрезка } [a;b], \\ \lim\limits_{t\to t_0} x(t)=x(t_0) \text{ для любой точки } t_0\in(a;b), \\ \lim\limits_{t\to a+0} x(t)=x(a),\quad \lim\limits_{t\to b-0} x(t)=x(b). \end{array}$$

Заметим, что функция $x(t)$, предложенная условием задачи, определена во всех точках числовой прямой. К тому же это кусочно-заданная функция, причем две ее основные компоненты $\frac{1}{\ln t}$ и $\frac{\sin t^2}{t}$ непрерывны на своих промежутках задания. Поэтому $x(t)$ может иметь разрывы только в точках $t=0$, $t=1$.

Исследуем предельное поведение функции $x(t)$ в точке $t=0$:

$$\lim_{t\to 0-0} x(t) = \lim_{t\to 0-0} \frac{\sin t^2}{t} = 0;$$

$$\lim_{t\to 0+0} x(t) = \lim_{t\to 0+0} \frac{1}{\ln t} = 0;$$

$$x(0) = 0.$$

Поскольку $\lim_{t\to 0+0} x(t) = \lim_{t\to 0-0} x(t) = x(0)$, то функция $x(t)$ непрерывна в точке $t=0$.

Исследуем предельное поведение функции $x(t)$ в точке $t=1$:

$$\lim_{t\to 1-0} x(t) = \lim_{t\to 1-0} \frac{1}{\ln t} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to 1+0} x(t) = \lim_{t\to 1+0} \frac{\sin t^2}{t} = \sin 1;$$

$$x(1) = \sin 1.$$

Поскольку левосторонний предел бесконечный, то функция $x(t)$ имеет разрыв в точке $t=1$. Значит, $x \notin C[-2;2]$. Однако правосторонний предел в точке $t=1$ конечный и совпадает со значением функции в этой точке. Поэтому функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[1;3]$. Отсюда, $x \in C[1;3]$.

3. Определить, принадлежит ли функция $x = x(t)$ пространствам $C[-1;1]$, $C^1[-1;1]$, $C^2[-1;1]$.

1. $x(t) = \arccos\frac{t}{2}$
2. $x(t) = |t-3|+1$
3. $x(t) = \begin{cases} e^{2t}, t<0 \\ 2t+1, t\ge 0 \end{cases}$
4. $x(t) = \begin{cases} t^2, t<0 \\ t, t\ge 0 \end{cases}$
5. $x(t) = \sqrt{1-t^2}$
6. $x(t) = \arcsin t$
7. $x(t) = |2t^2 - t|$
8. $x(t) = \ln(|t|+1)$
9. $x(t) = |t^2 - 4|$
10. $x(t) = \begin{cases} t, t<0 \\ \sin t, t\ge 0 \end{cases}$
11. $x(t) = \begin{cases} 1-t^2, t<0 \\ \cos t, t\ge 0 \end{cases}$
12. $x(t) = 1-\sqrt{1-t^2}$
13. $x(t) = \begin{cases} \sin t, t<0 \\ arctg(t), t\ge 0 \end{cases}$
14. $x(t) = e^{|t|}$
15. $x(t) = |\cos t|$
16. $x(t) = \begin{cases} t^2, t<0 \\ t^3, t\ge 0 \end{cases}$
17. $x(t) = |tg(t)|$

18. $x(t)=\begin{cases}1+t,\ t<0\\ e^t,\ t\geq 0\end{cases}$

19. $x(t)=\left|t^3\right|$

20. $x(t)=2\left|\sin t\right|$

Образец решения

$$x(t)=\sqrt[3]{t}$$

Решение этой задачи опирается на определения пространств непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, сформулированные в §1 конспекта лекций.

Проиллюстрируем рассуждения графически. На рисунке 1 изображен график функции $x(t)=\sqrt[3]{t}$. Функция непрерывна на всей числовой прямой и, в частности, на отрезке $[-1;1]$. Значит, $x\in C[-1;1]$.

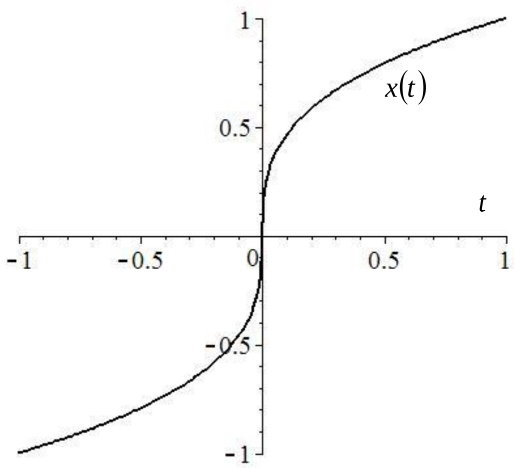

Рис. 1

На рисунке 2 представлен график производной $x'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$. Производная имеет разрыв в точке $t=0$, значит, функция x не является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1;1]$. Отсюда $x\notin C^1[-1;1]$.

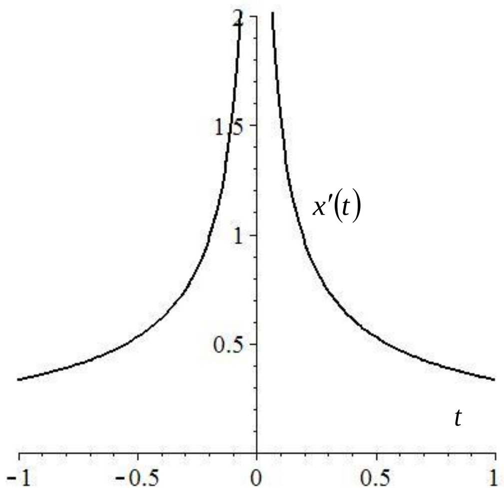

Рис. 2

Поскольку $C^2[-1;1]\subset C^1[-1;1]$, то $x\notin C^2[-1;1]$.

4. Проверить, принадлежит ли функция $x = x(t)$ пространству $L^1(a;b)$. На основании этого сделать вывод, может ли функция x принадлежать пространству $L^2(a;b)$.

1. $x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $(a;b) = (-1;1)$
2. $x(t) = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$, $(a;b) = (0;1)$
3. $x(t) = \dfrac{1}{t \ln t}$, $(a;b) = (1;2)$
4. $x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}}$, $(a;b) = (1;2)$
5. $x(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt[3]{t^5}}$, $(a;b) = (0;1)$
6. $x(t) = \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$, $(a;b) = (0;1)$
7. $x(t) = \dfrac{1}{t \ln^2 t}$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{1}{e}\right)$
8. $x(t) = \ln t$, $(a;b) = (0;1)$
9. $x(t) = \dfrac{1}{\sin t}$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t}}$, $(a;b) = (0;1)$
11. $x(t) = \dfrac{1}{t^2-1}$, $(a;b) = (0;1)$
12. $x(t) = \dfrac{1}{t \ln^3 t}$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{1}{e}\right)$
13. $x(t) = tg(t)$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
14. $x(t) = \dfrac{t}{(t^2-1)^2}$, $(a;b) = (-1;1)$
15. $x(t) = \dfrac{1}{t \ln^2 t}$, $(a;b) = (1;e)$
16. $x(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, $(a;b) = (0;1)$
17. $x(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$, $(a;b) = (1;e)$
18. $x(t) = ctg(t)$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
19. $x(t) = \dfrac{1}{t \cdot \sqrt[3]{\ln t}}$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{1}{e}\right)$
20. $x(t) = \dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^t-1}}$, $(a;b) = (0;\ln 2)$

Образец решения

$$x(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t+1}}, \quad (a;b) = (-1;1)$$

Решение этой задачи опирается на определение пространств Лебега, сформулированное в §1 конспекта лекций.

Проверим, принадлежит ли функция x пространству $L^1(-1;1)$:

$$\int_{-1}^{1} |x(t)| dt = \int_{-1}^{1} \frac{t+3}{\sqrt{t+1}} dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{t+1} dt + \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{\sqrt{t+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3}\Big|_{-1}^{1} + 4\sqrt{t+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{16\sqrt{2}}{3} < \infty.$$

Таким образом, $x \in L^1(-1;1)$, а поскольку $L^2(-1;1) \subset L^1(-1;1)$, то функция x может принадлежать пространству $L^2(-1;1)$.

5. Определить, каким из перечисленных пространств принадлежит функция $x = x(t)$: $C[0;1]$, $L^1(0;1)$, $L^2(0;1)$, $L^\infty(0;1)$, $L^1(1;+\infty)$, $L^2(1;+\infty)$, $L^\infty(1;+\infty)$.

1. a) $x(t)=\frac{t+2}{t}$ b) $x(t)=t$

2. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{t^3}}$ b) $x(t)=t^2e^{-t}$

3. a) $x(t)=\sin t$ b) $x(t)=\frac{1}{(1-3t)^2}$

4. a) $x(t)=\frac{1}{t^3}$ b) $x(t)=\ln t$

5. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{(2t-1)^2}}$ b) $x(t)=t^2$

6. a) $x(t)=e^{-t}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$

7. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[5]{t^4}}$

8. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{|t-1|}}$ b) $x(t)=\sqrt{t}$

9. a) $x(t)=\frac{1}{t^2}$ b) $x(t)=(t+1)e^{-t}$

10. a) $x(t)=\frac{t+1}{t}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$

11. a) $x(t)=e^t$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$

12. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ b) $x(t)=\frac{1}{t+1}$

13. a) $x(t)=\frac{1}{(2t-1)^2}$ b) $x(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}$

14. a) $x(t)=1$ b) $x(t)=\frac{1}{1-2t}$

15. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3t-2)^2}}$ b) $x(t)=\cos t$

16. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}$ b) $x(t)=e^{-2t}$

17. a) $x(t)=\frac{t}{e^t}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$

18. a) $x(t)=\frac{1}{t-1}$ b) $x(t)=\ln(t+1)$

19. a) $x(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ b) $x(t)=\frac{1}{3t-1}$

20. a) $x(t)=\frac{1}{2+t}$ b) $x(t)=\frac{1}{(2t-1)^4}$

Образец решения

$$x(t)=\frac{1}{t}$$

Решение этой задачи опирается на определения соответствующих функциональных пространств, сформулированные в §1 конспекта лекций.

Функция $x(t)$ не определена в точке $t=0$, поэтому $x\notin C[0;1]$.

Проверим принадлежность пространствам Лебега на промежутке $(0;1)$:

$$\int_0^1 |x(t)|dt=\int_0^1\frac{dt}{t}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x\notin L^1(0;1).$$

Поскольку $L^1(0;1)\supset L^2(0;1)\supset L^\infty(0;1)$, то $x\notin L^2(0;1)$, $x\notin L^\infty(0;1)$.

Проверим принадлежность пространствам Лебега на промежутке $(1;+\infty)$:

$$\int_1^{+\infty}|x(t)|dt=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x\notin L^1(1;+\infty);$$

$$\int_1^{+\infty}x^2(t)dt=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=1 \quad\Rightarrow\quad x\in L^2(1;+\infty).$$

При $t>1$ функция $x(t)$ ограничена: $|x(t)|<1$. Поэтому $x\in L^\infty(1:+\infty)$.

6. Привести пример функции $x=x(t)$, удовлетворяющей одновременно двум условиям (пояснить пример вычислениями).

1. $x\in L^1(-3;-1)$, $x\notin L^2(-3;-1)$
2. $x\in L^2(-\infty;0)$, $x\notin L^1(-\infty;0)$
3. $x\in L^3(-1;1)$, $x\notin L^3(-1;4)$
4. $x\in L^2(1;+\infty)$, $x\notin L^2(0;+\infty)$
5. $x\in L^3(2;4)$, $x\notin L^4(2;4)$
6. $x\notin L^2(0;1)$, $x\notin L^2(1;+\infty)$
7. $x\in L^3(0;+\infty)$, $x\notin L^2(0;+\infty)$
8. $x\in L^2(1;2)$, $x\notin L^3(1;2)$
9. $x\in L^1(-1;1)$, $x\notin L^1(1;+\infty)$
10. $x\in L^4(0;10)$, $x\notin L^1(0;+\infty)$
11. $x\notin L^1(1;2)$, $x\notin L^1(2;+\infty)$
12. $x\in L^2(0;1)$, $x\notin L^2(-1;1)$
13. $x\in L^1(1;+\infty)$, $x\notin L^1(0;+\infty)$
14. $x\notin L^1(-\infty;0)$, $x\in L^1(0;+\infty)$
15. $x\in L^2(0;1)$, $x\in L^2(1;+\infty)$
16. $x\notin L^1(0;+\infty)$, $x\in L^1(-\infty;0)$
17. $x\in L^3(-1;1)$, $x\notin L^3(1;+\infty)$
18. $x\in L^5(0;+\infty)$, $x\notin L^4(0;+\infty)$
19. $x\in L^2(-2;2)$, $x\notin L^3(-2;2)$
20. $x\in L^1(-1;1)$, $x\in L^1(0;+\infty)$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определение пространств Лебега, сформулированное в §1 конспекта лекций.

7. Определить, принадлежит ли бесконечная числовая последовательность x пространствам l^1, l^2, l^3, l^4, l^∞.

1. a) $x = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt[4]{k + \sin^2 k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x = \left\{ \cos \dfrac{\pi k}{4} \right\}_{k=1}^{\infty}$

2. a) $x = \left\{ \dfrac{\ln k}{\sqrt{k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{4}{10}, \ldots \right)$

3. a) $x = \left\{ \sin \dfrac{3\pi}{\sqrt{k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x = \left(\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{2}, \dfrac{8}{6}, \dfrac{16}{24}, \dfrac{32}{120}, \ldots \right)$

4. a) $x = \left(0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{16}, \dfrac{4}{25}, \ldots \right)$

   b) $x = \{ arctg\,(k+1) \}_{k=1}^{\infty}$

5. a) $x = \left\{ \dfrac{\sin k + \sqrt{k}}{k} \right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x = \left\{ \dfrac{k^2}{(k+1)!} \right\}_{k=1}^{\infty}$

6. a) $x = \left(-\dfrac{4}{1}, \dfrac{16}{2}, -\dfrac{64}{6}, \dfrac{256}{24}, -\dfrac{1024}{120}, \ldots \right)$

   b) $x = \left\{ \dfrac{(k+1)\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k(k^2+1)}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

7. a) $x = \left\{ \sin \dfrac{\pi k}{6} \right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left\{\dfrac{k-1}{\sqrt[4]{k^5+k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

8. a) $x=\left(2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{6},\dfrac{5}{24},\dfrac{6}{120},\ldots\right)$

b) $x=\left\{\sin\dfrac{2\pi}{\sqrt[3]{k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

9. a) $x=\left(1,\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{10},\dfrac{5}{17},\dfrac{6}{26},\ldots\right)$

b) $x=\left\{\cos\dfrac{\pi}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

10. a) $x=\left\{\dfrac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right\}_{k=2}^{\infty}$

b) $x=\left(\dfrac{2}{1},\dfrac{5}{4},\dfrac{10}{9},\dfrac{17}{16},\ldots\right)$

11. a) $x=\left\{\dfrac{arctgk}{\sqrt[3]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left\{\dfrac{2^k-1}{3^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

12. a) $x=\left\{\sqrt[4]{\dfrac{4}{k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left(1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{15},\dfrac{1}{31},\ldots\right)$

13. a) $x=\left(\ln\dfrac{2}{1},\ln\dfrac{3}{2},\ln\dfrac{4}{3},\ln\dfrac{5}{4},\ldots\right)$

b) $x=\left\{\dfrac{k^3+1}{k!}\right\}_{k=1}^{\infty}$

14. a) $x=\left(-tg\dfrac{1}{2},tg\dfrac{1}{3},-tg\dfrac{1}{4},tg\dfrac{1}{5},\ldots\right)$

b) $x=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{7}{8},\dfrac{15}{16},\dfrac{31}{32},\ldots\right)$

15. a) $x=\left\{2^{(-1)^k k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left\{\dfrac{\sqrt{\ln k}}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

16. a) $x=\left(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\ldots\right)$

b) $x=\left\{\dfrac{\ln k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

17. a) $x=\left\{\dfrac{e^k+e^{-k}}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left\{\sqrt[3]{\dfrac{k+1}{k^2+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

18. a) $x=\left\{\cos\dfrac{1}{k}\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{4},\dfrac{6}{8},\dfrac{24}{16},\dfrac{120}{32},\ldots\right)$

19. a) $x=\left(\dfrac{5}{1},\dfrac{25}{2},\dfrac{125}{6},\dfrac{625}{24},\dfrac{3125}{120},\ldots\right)$

b) $x=\left\{\dfrac{k+1}{k\sqrt{k+2}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

20. a) $x=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{4},\dfrac{5}{6},\dfrac{6}{8},\dfrac{7}{10},\ldots\right)$

b) $x=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{k\ln k}}\right\}_{k=2}^{\infty}$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определения пространств суммируемых и ограниченных числовых последовательностей, сформулированные в §1 конспекта лекций.

Образец №1 решения

$$x=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Просуммируем члены последовательности, получаем расходящийся гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty \quad \Rightarrow \quad x\notin l^1.$$

Просуммируем члены последовательности с квадратами, получаем сходящийся ряд из обратных квадратов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty \quad \Rightarrow \quad x\in l^2.$$

Поскольку $l^2\subset l^3\subset l^4\subset l^{\infty}$, то $x\in l^3,l^4,l^{\infty}$.

Образец №2 решения

$$x=(1,2,3,4,\ldots,99,0,0,0,\ldots)$$

Отметим сразу, что последовательность x ограничена:

$$|x_k|\le 99,\quad k=1,2,3\ldots \quad \Rightarrow \quad x\in l^{\infty}.$$

Последовательность x содержит лишь конечное число ненулевых членов, поэтому при любом натуральном показателе p имеем сумму конечного числа слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p=\sum_{k=1}^{99}k^p<\infty \quad\Rightarrow\quad x\in l^p.$$

Таким образом, последовательность x принадлежит всем указанным в задаче пространствам.

Образец №3 решения

$$x=\left(\frac{2}{1},-\frac{3}{2},\frac{4}{3},-\frac{5}{4},\ldots\right)$$

Определим общий член последовательности:

$$x_n=(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n},\; n=1,2,3,\ldots$$

Просуммируем члены последовательности с произвольным показателем p:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p=\infty.$$

Ряд расходится, потому что не выполнен необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p=1\neq 0.$$

Однако последовательность x ограничена:

$$|x_n|\le 2,\quad n=1,2,3,\ldots$$

Таким образом, $x\notin l^1,l^2,l^3,l^4$, но $x\in l^\infty$.

8. Указать наименьшее целое число p, при котором бесконечная числовая последовательность x принадлежит пространству l^p.

1. $x=\left\{\ln\dfrac{k+\sqrt{k}}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$
2. $x=\left\{1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[8]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$
3. $x=\left\{\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+2\sqrt{k}}}\right\}_{k=1}^{\infty}$
4. $x=\left\{\dfrac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right\}_{k=2}^{\infty}$
5. $x=\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{2}},\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{3}},\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{4}},\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{5}},\ldots\right)$
6. $x=\left\{\dfrac{\ln k}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$
7. $x=\left\{\dfrac{1}{\sqrt[6]{k}}-\dfrac{1}{\sqrt[6]{k}+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$

8. $x=\left\{\dfrac{\sqrt[3]{k}-1}{\sqrt{k}+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$

9. $x=\left\{\dfrac{1}{\sqrt[4]{k+\sin^2 k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

10. $x=\left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{2\cdot 3}},\sqrt[4]{\dfrac{2}{3\cdot 4}},\sqrt[4]{\dfrac{3}{4\cdot 5}},\sqrt[4]{\dfrac{4}{5\cdot 6}},\ldots\right)$

11. $x=\left(0,\dfrac{\ln 2}{2},\dfrac{\ln 3}{3},\dfrac{\ln 4}{4},\ldots\right)$

12. $x=\left\{\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

13. $x=\left\{\sqrt[3]{k}\sin\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

14. $x=\left\{\dfrac{arctg(k)}{\sqrt[4]{k-1}}\right\}_{k=2}^{\infty}$

15. $x=\left\{k\sqrt{k}\sin\dfrac{1}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$

16. $x=\left\{\dfrac{\sqrt[4]{k}+\sqrt[6]{k}}{\sqrt[3]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

17. $x=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1},\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\ldots\right)$

18. $x=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}\sqrt[3]{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}},\dfrac{1}{\sqrt{4}\sqrt[3]{5}},\ldots\right)$

19. $x=\left(\ln\dfrac{3}{1},\ln\dfrac{4}{2},\ln\dfrac{5}{3},\ln\dfrac{6}{4},\ldots\right)$

20. $x=\left\{\sqrt[5]{\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

Образец решения

$$x=\left\{\frac{1}{\sqrt[5]{k^2+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

Решение этой задачи опирается на определение пространств суммируемых числовых последовательностей l^p, сформулированное в §1 конспекта лекций. Прежде всего заметим, что данная последовательность знакоположительная, поэтому в рассуждениях опускаем знак модуля:

$$x\in l^p \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}x_k^p<\infty.$$

Сходимость знакоположительного ряда устойчива относительно замены общего члена ряда на эквивалентное выражение:

$$x_k^p = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{k^2+1}} \right)^p \sim \frac{1}{k^{2p/5}} \text{ при } k \to \infty.$$

Используем условие сходимости обобщенного гармонического ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p/5}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2p}{5} > 1.$$

Значит, $x \in l^p$ при любом $p > \frac{5}{2}$. Таким образом, $p = 3$ – это наименьшее целое число p, при котором последовательность x принадлежит пространству l^p.