Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛННЫХ ТЕХНОЛОГИЙИЙ И ДИЗАЙНА»

Теоретическая механика

Методические указания к выполнению курсовых работ для студентов заочной формы обучения, обучающихся по направленям подготовки
15.03.02 Технологичские машины и обордование,
15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств
(все профили подготовки)

Составитель
А.Г. Усов

Санкт-Петербург
2019

УТВЕРЖДЕНО

на заседании кафедры машиновеения
протокол № 4 от 23.01.2019 г.

Оригинал-макет подготовлен автором и издан в авторской редакции

Подписано в печать … г. Формат 60 x 84 1/16.
Усл. Печ. Л. ... Тираж 100 экз. Заказ …
Электронный адрес: http://publish.sutd.ru
Отпечатано в типографии ФГБОУВПО «СПГУПТД»
191028, Санкт-Петербург, ул. Моховая, 26

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В.1. Назначение пособия

Пособие предназначено для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки15.03.02, осваивающих курс теоретической механики в течение двух семестров. Вторая часть курса включает в себя основной и заключительный раздел: динамику материальной точки и твердого тела. Студент выполняет по второй части курсовую работу и сдает по всему курсу теоретической механики экзамен. Пособие включает в себя варианты заданий для курсовой работы (всего 5 заданий), краткие теоретические постулаты по тематике каждого задания и примеры выполнения заданий. При составлении заданий были использованы материалы Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике» под редакцией А.А. Яблонского (15-е издание. М.: Интеграл-Пресс, 2006).

В.2. Цель дисциплины

Сформировать компетенции обчающегося в области знания основных законов механики и навыки решения типовых задач динамики материальной точки, твердого тла и механичской системы.

В.3. Задачи дисциплины

- Сформировать навыки решения задач динамики точки.
- Рассмотреть простейшие задачи теории колебаний механической системы с одной степенью свободы.
- Приобрести навыки исследования свободных колебаний такой системы.
- Сформировать навыки применения теорем для решения задач динамики материальной точки и механической системы.
- Изучить метод кинетостатики.
- Изучить основные положения и методы аналитической механики.
- Приобрести навыки составления дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода, описывающих движения голономной механической системы
- Изучить теорию малых колебаний консервативной механической системы вблизи положения устойчивого равновесия.
- Сформировать навыки расчета собственных частот консервативной системы.

1. Выбор варианта и содержание отчета о выполнении работы

Курсовая работа включает в себя решения 5 заданий по темам:

1) интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки под действием постоянных сил,
2) теоремы динамики материальной точки
3) дифференциальные уравнения движения твердого тела,
4) теорема об изменении кинетической энергии механической системы,
5) уравнения Лагранжа 2 рода. Малые колебания механической системы с несколькими степенями свободы.

Шифром, по которому выбирается тот или иной вариант задания, является номер зачетной книжки или студенческого билета. Выбор номера схемы на рисунке или в таблице следует производить по последней цифре шифра, а исходные данные в таблицах - по предпоследней цифре.

Для рецензирования курсовая работа оформляется как файл типа docx на страницах формата А4 со стандартными полями. Шрифт Times New Roman размером от 12 до 14, междустрочный интервал от 1 до 1,5. Рисунки выполняются в графичеком редакторе с применением цветового кода. В крайнем случае, рисунки могут быть выполнены вручную с использованием чертежных инструментов с последующим переводом их в jpg-файлы. Формулы конструировать с помощью редактора формул (желательно MathType Equation). Векторы обозначать жирным шрифтом в стиле Matrix-Vector или стрелками над буквами.

Электронную версию курсовой работы надо направить в соответствующий раздел информационно-образовательной среды заочной формы обучения СПГУПТД для рецензирования.

Изложение каждого задания должно начинаться с новой страницы. Условие задания должно быть переписано полностью вместе с заданным рисунком, кратко описаны данные задачи и искомые величины.

Формулы и расчеты должны сопровождаться комментариями. Решение следует разбить на отдельные логически обусловленные разделы (этапы) с нумерацией. В каждом разделе должно быть указано, что ищется, как и по каким формулам ищется, что получается. Величины, выходящие в ответ, должны быть снабжены размерностью СИ. В конце решения желательно поместить список ответов на вопросы задания.

Исправление ошибок оформляется отдельным файлом. Необходимо дать подробные пояснения по всем замечаниям, сделанным рецензентом.

Проверенную и допущенную к защите работу следует распечатать и сдать в сшитом виде в отдельной папке в процессе защиты курсовой работы.

2. Задания для выполнения курсовой работы

Задание 1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки под действием постоянных сил

Тело движется из точки A по участку AB наклонной плоскости длиной l в течение τ с. Его начальная скорость $v_{A,x_1} = v_A$. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. В точке В тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает в точку C со скоростью v_C, находясь в воздухе в течение T секунд.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Рисунки к заданию и исходные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные к заданию 1

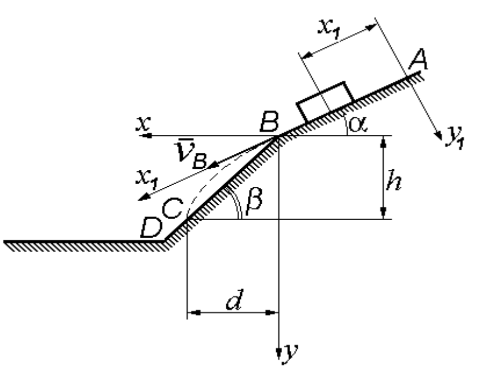
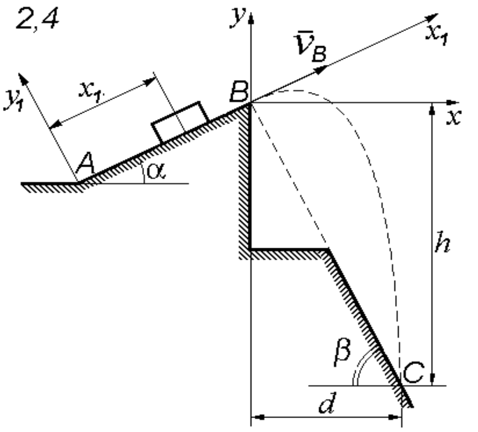
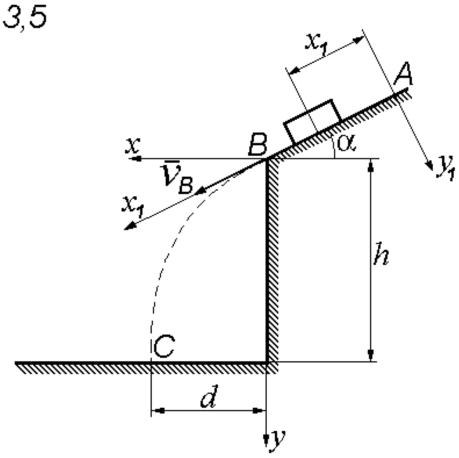
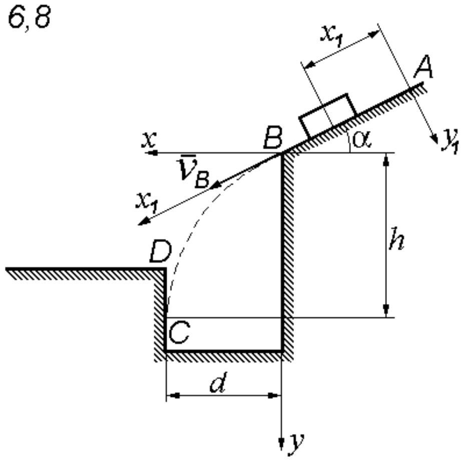
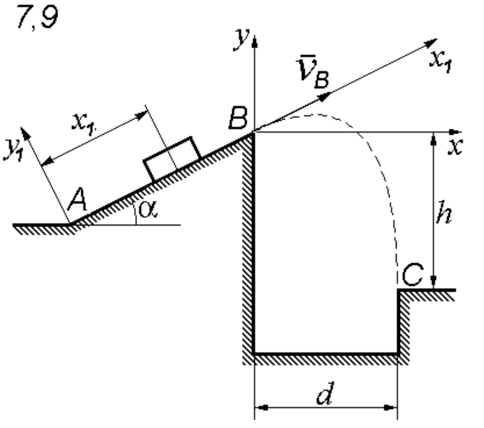
Схема (рисунок) к заданию	Номер варианта	Исходные данные
0,1 	0; 5	Дано: α=30°; v_A=0; f=0,2; l=10м; β=60° Определить: τ и h
	1; 6	Дано: α=15°; v_A=2м/с; f=0,2; h=4м; β=45° Определить: l и уравнение траектории на участке ВС
	2; 7	Дано: α=30°; v_A=2,5м/с; f≠0; l=8м; d=10м Определить: τ и v_B
	3; 8	Дано: v_A=0; τ =2с; l=9,8м; β=60°; f=0 Определить: Т и α
	4; 9	Дано: α=30°; v_A=0; l=9,8м; τ =3с; β=45° Определить: f и v_C
2,4 	0; 5	Дано: α=20°; f =0,1; τ =0,2с; h=40м; β=30° Определить: l и v_C
	1; 6	Дано: α=15°; f =0,1; v_A=16м/с; l=5м; β=45° Определить: Т и v_B
	2; 7	Дано: v_A=21м/с; f =0; τ =0,3с v_B=20м/с; β=60° Определить: τ и v_B
	3; 8	Дано: α=15°; τ =0,3с; f =0,1; h=30м; β=45 Определить: v_B и v_A
	4; 9	Дано: α=15°; f =0; v_A=12м/с; d=50м; β=60° Определить: τ и уравнение траектории на участке ВС

Схема (рисунок) к заданию	Номер варианта	Исходные данные
3,5 	0; 5	Дано: α=30°; f =0,1; v_A=1м/с; τ =1,5с h=10м Определить: d и v_B
	1; 6	Дано: v_A=0 м/с; α=45°; l=10м; τ =0,3с Определить: f и уравнение траектории на участке ВС
	2; 7	Дано: f =0; v_A=0; l=9,81м; τ =2с; h=20м Определить: Т и α
	3; 8	Дано: v_A=0 м/с; α=30°; f =0,2; l=10м; d=12м Определить: τ и Т
	4; 9	Дано: v_A=0 м/с; α=30°; f =0,2; l=6м; h=4,5м Определить: τ и v_C
6,8 	0; 5	Дано: α=30°; v_A=1м/с; l=3м; f =0,2; d=2,5м Определить: h и Т
	1; 6	Дано: α=15°; l=6м; v_B=2v_A; τ =1с; h=6м Определить: f и d
	2; 7	Дано: α=30°; l=2м; v_A=0 м/с; f =0,1; d=3м Определить: h и τ
	3; 8	Дано: α=15°; l=3м; v_B=3м/с; $f \neq 0$; τ =1,5с; d=2м Определить: v_A и h
	4; 9	Дано: α=45°; v_A=0 м/с; f =0,3; d=2м; h=4м Определить: l и τ
7,9 	0; 5	Дано: α=15°; f =0; v_A=15м/с; d=30м; h=10м Определить: τ и l
	1; 6	Дано: α=20°; l=5м; v_B=5м/с; $f \neq 0$; τ =3с; d=2м Определить: v_A и h
	2; 7	Дано: α=30°; l=4м; v_A=12м/с; f =0,1; d =6м Определить: τ и h
	3; 8	Дано: α=45°; l=2м; v_B=0,5v_A; τ=2с; h=0,5м Определить: d и f
	4; 9	Дано: α=30°; v_A=12м/с; l=2м; f =0,2; d=1м Определить: h и Т

Основные теоретические положения, используемые при решении задачи

В этом задании объектом исследования является тело, изображенное маленьким прямоугольником, принимаемое за материальную точку. Для решения задачи используется основное уравнение динамики точки (второй закон Ньютона):

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

Сначала рассматривают участок *AB*. Основное уравнение динамики записывают в проекциях на оси системы координат x_1Ay_1. После определения силы трения получается одно дифференциальное уравнение движения. Составив его, следует записать начальные условия движения на этом участке. Далее находим общее и частное решение дифференциального уравнения. Результаты этих расчетов подставляем в кинематические условия движения, выражающие скорость точки в конце участка и путь точки.

Для участка BC составляем и интегрируем два дифференциальных уравнения движения. При этом скорость v_B в конце первого участка является начальной скоростью для второго участка.

Примерер выполнения задания № 1

Условие задания

Тело, принимаемое за материальную точку, движется из точки A по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом в течение τ с. Коэффициент трения скольжения на участке AB равен f. В точке B тело покидает плоскость и падает в точку C, положение которой задается величинами $d,\ h$.

Схема № 11 (рис. 1), вариант данных № 12.

Дано: $\alpha = 30°;\quad \tau = 0{,}5 c;\quad f = 0{,}1;\quad d = 2 м;\quad h = 4 м.$

Требуется найти: l и $v_A = v_{A,x_1}$.

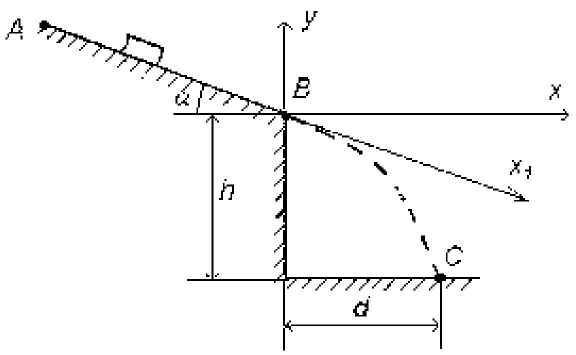


Рис. 1. Схема к заданию 1

Решение.

1. Исследуем движение тела на участке AB.

1.1. Составляем дифференциально равнени движения. Для этого выбираем произвольный момент времени $t \in (0; \tau)$ и изображаем в этот момент тело на участке AB и действующие на него силы (рис. 2) . Записываем в векторной форме основное уравнение динамики точки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{TP}, \qquad (1.1)$$

где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – нормальная реакция опоры, $\vec{F}_{TP}$ - сила трения скольжения.

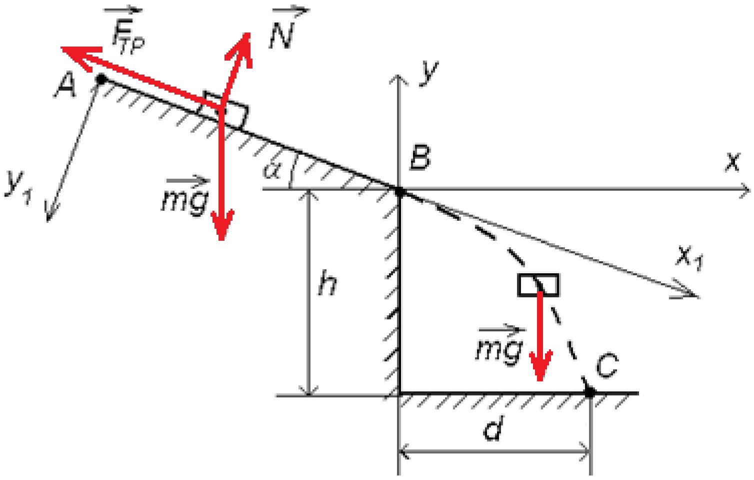


Рис. 2. Силы, действующие на тело на участках AB и BC

Записываем уравнение (1.1) в проекциях на оси Ax_1; Ay_1:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= mg\sin\alpha - F_{TP}; \\ m\ddot{y}_1 &= mg\cos\alpha - N. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Сила трения при скольжении определяется законом Кулона: $F_{TP} = fN$. Чтобы найти нормальную реакцию опоры N, используем условие постоянного контакта тела с опорной поверхностью (уравнение связи):

$y_1 = const$.

Тогда $\ddot{y}_1 = 0$ и из второго уравнения системы (1.2) следует $N = mg\cos\alpha$, и тогда $F_{TP} = mgf\cos\alpha$. Подставляем это выражение для силы трения в первое уравнение системы (1.2); получаем

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\alpha - mg\, f\cos\alpha,$$

или

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Обозначим:

$$w = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 9{,}81(0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}87) = 4{,}05\,м/с^2 = const.$$

Получаем дифференциальное уравнение движения:

$$\ddot{x} = w. \qquad (1.3)$$

1.2. Записываем начальные условия движения на участке AB:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{1,0} = 0; \\ \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_{1,0} = v_{Ax1} = v_A. \end{aligned} \qquad (1.4)$$

1.3. Решаем (интегрируем) дифференциальное уравнение.

1.3.1. Понижаем порядок . Уравнение (1.3) – дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $x(t)$. Относительно же функции $\dot{x}(t)$ это уравнение первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\dot{x}_1 = w.$$

1.3.2. Разделяем переменные путем умножения обеих частей на dt:

$$d\dot{x}_1 = w\,dt.$$

1.3.3. Интегрируем почленно

$$\int d\dot{x}_1 = \int w\,dt$$

и получаем выражение, которе называется первым интегралом уравнения (1.3):

$$\dot{x}_1 = wt + C_1. \qquad (1.5)$$

Постоянная C_1, появившаяся в результате вычисления неопределенных интегралов, называется постоянной интегрирования. Её предстоит определять из начальных условий.

1.3.4. Находим второй интеграл уравнеия (1.3).

Переписываем уравнение (1.5) в терминах дифференциалов:

$$\frac{dx_1}{dt} = wt + C_1.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int dx_1 = \int (wt + C_1)\,dt \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{wt^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (1.6)$$

Выражение (1.6) – второй интеграл дифференциального уравнения (1.3), называемый также общим интегралом, поскольку оно описывает множество (двупараметрическое семейство) функций, удовлетворяющих уравнению (1.3). В случае, когда полученное выражение разрешено относительно искомой функции (как у нас), оно обычно называется общим решением исходного дифференциального уравнения.

1.3.5. Строим частное решение уравнения (1.3) – т.е. из множества функций, описываемых выражением (1.6) выбираем ту, которая удовлетворяет начальным условиям нашей задачи. Для этого совмещаем выражения (1.5) и (1.6) с начальными условиями (1.4). Подставляем найденные выражения для функций $x_1, \dot{x}_1$ в начальные условия (1.4)

$$\frac{w\cdot 0^2}{2}+C_1\cdot 0+C_2=0 \Rightarrow C_2=0;$$
$$w\cdot 0+C_1=v_A \quad \Rightarrow \quad C_1=v_A.$$

Подставив найденные постоянные интегрирования C_1 и C_2 в выражения (1.5) и (1.6), получаем частное решение:

$$\dot{x}=wt+v_A\ , \qquad x=\frac{wt^2}{2}+v_At. \tag{1.7}$$

Замечание. Частным решением нашего дифференциального уравнения можно назвать последнее выражение для функции $x(t)$. Если изначально уравнение (1.3) представить в виде системы двух уравнений первого порядка относительно функций $x(t), \dot{x}(t)$, то совокупность обеих функций (1.7) будет частным решением такой («нормальной») системы. Переменные $x(t), \dot{x}(t)$ называются в таком случае фазовыми переменными.

1.3.6. Решаем кинематические проблемы. В конце участка *AB* для момента $t=\tau$ с учетом выражений (1.7) получаем:

$$v_B=w\cdot\tau+v_A; \quad l=\frac{w\cdot\tau^2}{2}+v_A\tau.$$

Подставим числа:

$$\left.\begin{array}{l} v_B=2{,}025+v_A, \\ l=0{,}506+0{,}5v_A. \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

Уравнения (1.8) образуют систему с тремя неизвестными. Скорость v_B найдем, исследовав движение на участке *BC*.

2. Исследуем движение тела на участке BC.

2.1. Сотавляем дифференциальные уравнения движения. На участке *BC* на тело действует только сила тяжести. Уравнение движения имеет вид:

$$m\vec{a}=m\vec{g}.$$

Записываем это уравнение в проекциях на оси x , y :

$$\ddot{x}=0, \tag{1.9}$$
$$\ddot{y}=-g. \tag{1.10}$$

2.2. Записываем начальные условия:

$$x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = v_B \cos\alpha; \tag{1.11}$$

$$y_0 = 0; \quad \dot{y}_0 = -v_B \sin\alpha. \tag{1.12}$$

Замечаем, что ни в одном из шести равенств (1.9) – (1.12) символы «x» и «y» не встречаются вместе. Значит, задачи об отыскании функций $x(t)$ и $x(t)$ решаются независимо друг от друга.

2.3. Интегрируем уравнение (1.9) и находим его общее решение:

$$\frac{d}{dt}\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_3 \quad \Rightarrow \quad dx = C_3 dt \quad \Rightarrow \quad \int dx = C_3 \int dt \quad \Rightarrow \quad x = C_3 t + C_4.$$

Из начальных условий (1.11) находим постоянные интегрирования C_3 и C_4:

$$C_3 \cdot 0 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0; \quad C_3 = \dot{x} = \dot{x}_0 = v_B \cos\alpha.$$

Строим частное решение уравнения (1.9):

$$x = v_B t \cos\alpha\,. \tag{1.13}$$

2.4. Интегрируем уравнение (1.10):

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -gt + C_5 \quad \Rightarrow \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Из начальных условий (1.12) находим постоянные интегрирования C_5 и C_6:

$$C_6 = 0; \quad C_5 = -v_B \sin\alpha.$$

Строим частное решение уравнения (1.10):

$$y = -g\frac{t^2}{2} - v_B t \sin\alpha. \tag{1.14}$$

2.5. Решаем кинематические проблемы. Составим условия попадания тела в точку C. При $t=T$ должно быть:

$$x = d; \;\; y = -h.$$

Подставим величины T, d, h в выражения (1.13) и (1.14):

$$\left.\begin{aligned} 2 &= v_B T \cos 30°; \\ -4 &= -9{,}81\frac{T^2}{2} - v_B T \sin 30°. \end{aligned}\right\}$$

Исключив в этой системе уравнений с двумя неизвестными величину T, получаем:

$$v_B = \sqrt{\frac{9{,}81}{\cos^2 30°(2 - tg30°)}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 4}{3 \cdot 1{,}42}} = 3{,}04\,м/с.$$

3. Возвращаемся к уравнениям (1.8).

Подставляя в них значение v_B, находим:

$$v_A = 3{,}04 - 2{,}025 = 1{,}02\,м/с; \quad l = 0{,}56 + 0{,}5 \cdot 1{,}02 = 1{,}01\,м.$$

4. Ответы: $v_A = 1{,}02\,м/с; \quad l = 1{,}01\,м.$

Задание 2. Теоремы динамики материальной точки

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения *A* внутри трубки ось которой расположена в вертикальной плоскости, как показано на приводимых ниже схемах (рис. 3). Пройдя путь h_o, шарик отделяется от пружины. Найти скорость шарика в положениях *B*, *C* и *D* и давление шарика на стенку трубки в положении *C*. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. Исходные данные приведены в табл.2.

В задании приняты следующие обозначения:

m - масса шарика;
v_A - начальная скорость шарика;
τ - время движения шарика на участке *BD*;
f - коэффициент трения скольжения шарика на стенке трубки;
h_0 - начальная деформация пружины;
c - коэффициент жесткости пружины.

Таблица 2

Исходные данные к заданию 2

Номер варианта исходных данных	Заданные величины								
	m, кг	v_A, м/с	τ, с	R ,м	f	α, град	β, град	h_0, см	c, Н/см
0	0,1	8,0	0,8	0,5	0,10	60	15	4	0,6
1	0,2	2,0	0,25	2,0	0,15	75	60	10	3,0
2	0,3	3,0	0,2	1,2	0,20	30	15	30	2,4
3	0,4	9,0	0,3	3,5	0,45	60	45	16	1,8
4	0,5	0,5	0,5	2,5	0,40	75	30	20	1,0
5	0,6	5,0	1,2	1,0	0,25	45	30	8	1,2
6	0,7	6,0	0,4	0,3	0,35	60	30	2	0,3
7	0,8	10,0	1,5	0,3	0,30	75	45	25	6,0
8	0,9	5,0	0,1	0,4	0,05	75	15	32	1,5
9	1,0	1,0	1,5	0,6	0,50	45	15	15	4,5

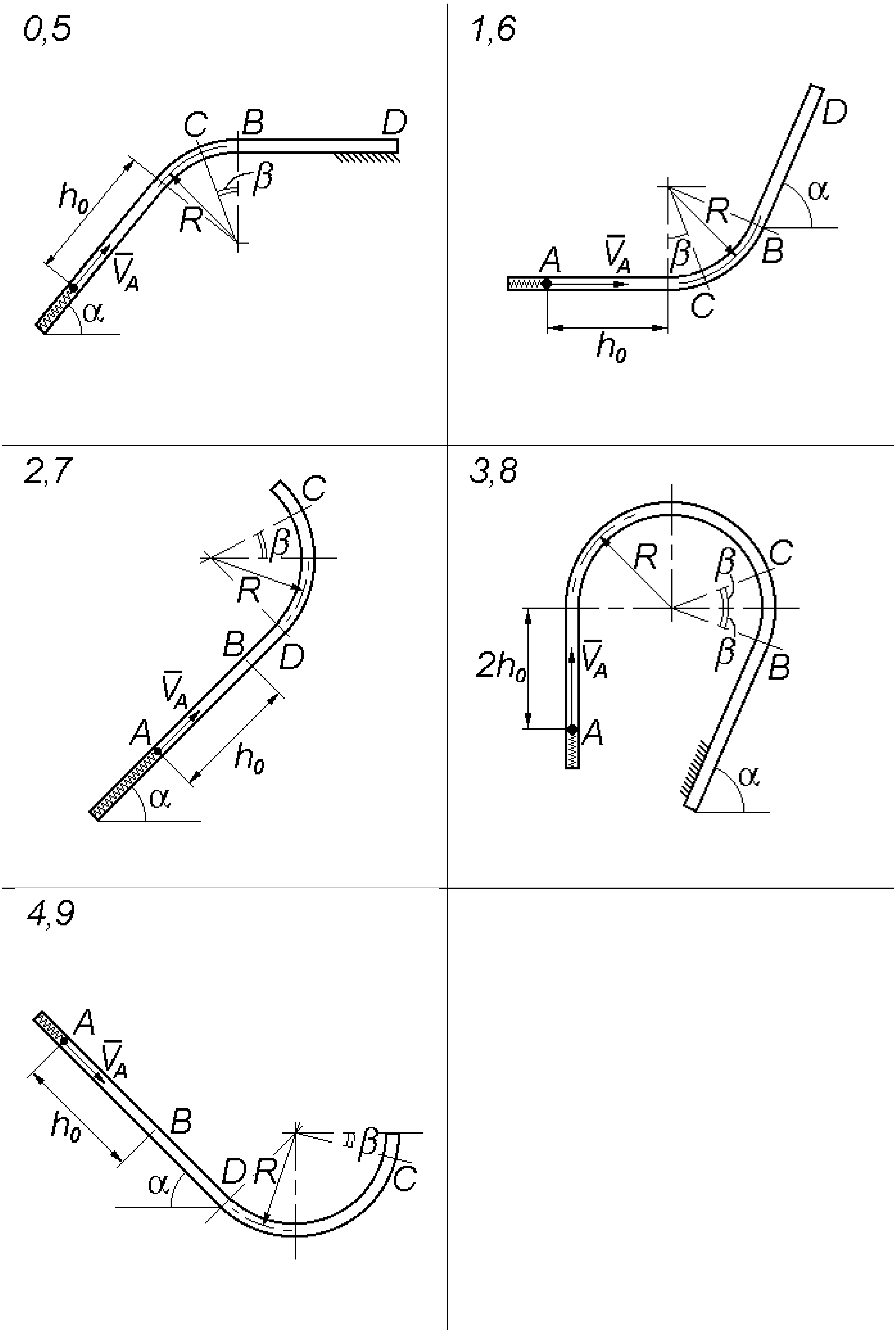


Рис. 3. Расчетные схемы к заданию 2

Основные теоретические положения, используемые при решении задач

Выполняя это задание, применяют теоремы об изменении количества движения и кинетической энергии материальной точки в интегральной форме. Эти теоремы используют, когда хотят сравнить состояния точки в начале и конце некоторого этапа движения.

Когда в условии говорится о временном промежутке движения (t_1, t_2), то применяют теорему об изменении количества движения:

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \vec{S}_{1-2},$$

где $\vec{K}_2 = m\vec{v}_2$ - количество движения точки в конце этапа движения, $\vec{K}_1 = m\vec{v}_1$ - количество движения в начале этапа, $\vec{S}_{1-2}$ - сумма импульсов сил, действующих на точку.

Теорему сначала записывают в векторной форме, а затем в проекциях. Если проекция силы F_x постоянна, то проекция импульса равна

$$F_x(t_2 - t_1) = F_x \tau.$$

Когда речь идет о перемещении точки, то применяют теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = A_{1-2} ,$$

где $T_2 = \dfrac{mv_2^2}{2}$ - кинетическая энергия точки в конце движения, $T_1 = \dfrac{mv_1^2}{2}$ - кинетическая энергия в начале движения, A_{1-2} - сумма работ сил при перемещении точки из начального положения 1 в конечное положение 2.

В общем случае работа – интеграл от элементарной работы – скалярного произведения вектора силы $\vec{F}$ на вектор бесконечно малого перемещения $\overrightarrow{ds}$ (криволинейный интеграл второго рода).

Если вектор силы постоянен, а траектория – прямая, то

$$A_{1-2} = F \cdot s \cdot \cos\alpha,$$

где s – путь точки, α – угол между направлением силы и направлением скорости.

Работа постоянной силы тяжести вычисляется по формуле:

$$A_{1-2} = mg(z_1 - z_2) = \pm mg\,h,$$

где z_1 *и* z_2 - начальная и конечная аппликата центра тяжести тела в системе координат *Oxyz*, ось *Oz* которой направлена вертикально вверх, $h = |z_1 - z_2|$ - «перепад высот» (разность уровней) начального и конечного положений точки. Знак «+» пишут, когда точка опускается, «-» - когда поднимается.

Работа упругой силы, подчиненной закону Гука, вычисляется по формуле:

$$A_{1-2} = \frac{c}{2}(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2),$$

где *c* – коэффициент упругости (жесткость упругого элемента), Δl_1 *и* Δl_2 - начальная и конечная деформация упругого элемента (в задании принято, что $\Delta l_1 = -h_0$).

При движении точки по опорной поверхности работа силы нормальной реакции равна нулю, поскольку эта сила ортогональна вектору элементарного перемещения.

Считается, что прямолинейная траектория переходит в окружность по правилу сопряжения, т.е. эта прямая касается окружности. В точке сопряжения имеет место скачок нормального ускорения, обуславливающий явление мягкого удара.

Пример выполнения задания № 2

Условие задания

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения *A* внутри трубки (рис. 8.1). Пройдя путь h_0, шарик отделяется от пружины, которая была сначала сжата на величину h_0. Пренебрегая трением на криволинейных участках траектории, найти скорость шарика в положениях *B,C* и *D* и давление на стенку трубки в положении *C*. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь.

Схема № 10 (рис. 4), вариант данных № 11.

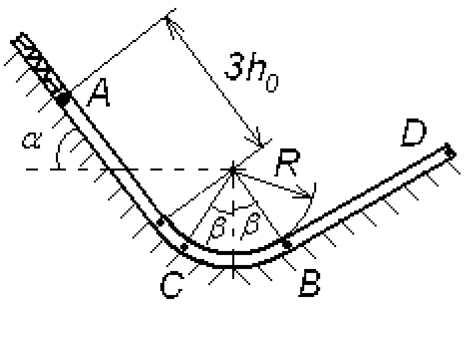


Рис. 4. Расчетная схема задания

Дано:

$m = 0{,}2 м$; $v_A = 1 м/с$; $\tau = 0{,}2 с$;
$R = 0{,}4 м$; $f = 0{,}2$; $\alpha = 60°$;
$\beta = 30°$; $h = 0{,}2 м$; $c = 100 Н/м$.

Требуется найти: $v_C,\ v_B,\ v_D,\ N_C$.

Решение

1. Изображаем силы, действующие на материальную точку на разных этапах движения (рис. 5).

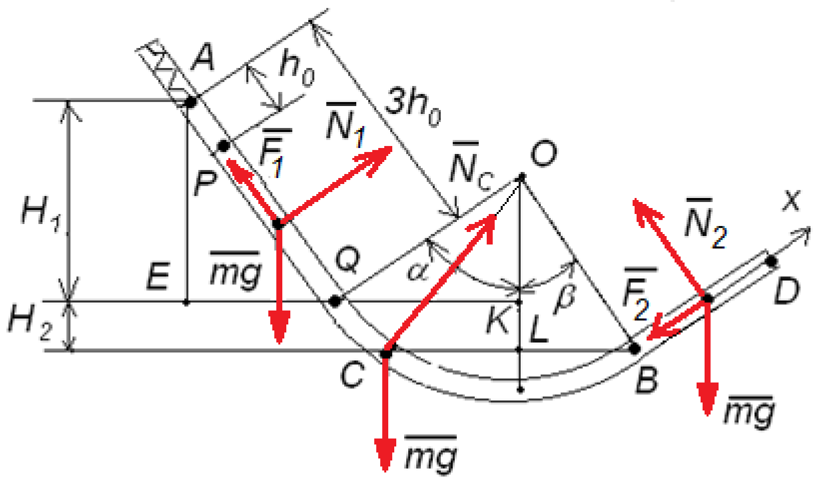


Рис. 5

1. Рассмотрим движение на участке АС.

На этом участке задано перемещение, поэтому применяем теорему об изменении кинетической энергии, записав ее в виде:

$$T_C - T_A = A_{A-C}, \tag{2.1}$$

где $T_C = \dfrac{mv_C^2}{2}$ *и* $T_A = \dfrac{mv_A^2}{2}$ - значения кинетической энергии точки в положениях A и C; A_{A-C} - сумма работ сил, действующих на шарик на пути AC.

Путь этот состоит из участков AP, PQ и QC. На всех этих участках действует сила тяжести mg и нормальная реакция опорной поврхности. На участке AP длиной h_0 действует упругая сила $F_{упр}$. На прямолинейном участке AQ действует сила трения F_1. Работа A_{A-C} равна сумме работ этих сил:

$$A_{A-C} = A(mg) + A(F_1) + A(F_{упр}) + A(N_1). \tag{2.2}$$

Работа силы тяжести равна:

$$A(mg) = +mg(H_1 + H_2) = mg(AE + KL).$$

Отрезок AQ гладко сопряжен с дугой QB окружности, т.е. касается этой окружности в точке Q и перпендикулярен к радиусу OQ. Углы AQE и QOK равны, т.к. имеют взаимно перпендикулярные стороны. Проводим геометрические расчеты:

$$AE = AQ\sin\alpha = 3h_0\sin\alpha; \quad KL = OC\cos\beta - OQ\cos\alpha = R(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Тогда $A(mg) = mg(3h_0\sin\alpha + R(\cos\beta - \cos\alpha))$.

Работа силы трения:

$$A(F_1) = -F_1 AC = -3F_1 h_0, \quad где \quad F_1 = fN_1.$$

Реакцию N_1 найдем, записав основное уравнение динамики точки

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{упр}$$

в проекциях на нормаль к траектории. Нормальное ускорение на участке AC равно нулю. Получаем выражения:

$$N_1 = mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F_1 = mg\, f\cos\alpha.$$

Тогда $A(F_1) = -3mg\, fh_0\cos\alpha.$

Работа упругой силы:

$$A(F_{упр}) = \frac{c}{2}(h_o^2 - 0^2) = \frac{c}{2}h_0^2.$$

Работа силы N_1 равна нулю, так как эта сила во все время движения направлена перпендикулярно траектории тела.

Подставляем полученные выражения для работ в формулу (2.2) и затем в формулу (2.1). Получаем уравнение для скорости v_C и решаем его:

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = 3mgh_0\sin\alpha + mgR(\cos\beta - \cos\alpha) - 3mgh_0 f\cos\alpha + \frac{c}{2}h_0^2;$$

$$v_C = \sqrt{6gh_0(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 2gR(\cos\beta - \cos\alpha) + \frac{c}{m}h_0^2 + v_A^2} =$$

$$= \sqrt{6\cdot 9{,}81\cdot 0{,}2(0{,}87 - 0{,}2\cdot 0{,}5) + 2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}4(0{,}87 - 0{,}5) + \frac{100}{0{,}2}0{,}04 + 1} =$$

$$= 5{,}74 м/с.$$

Найдем нормальную реакцию N_C. Запишем основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона) для точки C

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_C$$

в проекциях на нормаль к траектории в этой точке:

$$m\frac{v_C^2}{R} = -mg\cos\beta + N_C,$$

откуда получаем: $N_C = m(g\cos\beta + \frac{v_C^2}{R}) = 0,2(9,81\cdot 0,87 + \frac{32,97}{0,2}) = 34,68H.$

2. Рассмотрим движение на пути CB.

Здесь снова задано перемещение, поэтому используем теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_B - T_C = A_{C-B}. \tag{2.3}$$

Работу совершает только сила тяжести (трения нет):

$$A_{C-B} = A(mg) = mgH_{C-B}, \quad \text{где } H_{C-B} = R\cos\beta - R\cos\beta = 0.$$

Тогда из формулы (2.3) следует, что $v_B = v_C = 5,74$ *м/с*.

3. Рассмотрим движение на участке BD.

Задано время τ движения на этом этапе, поэтому применяем теорему об изменении количества движения:

$$\vec{K}_D - \vec{K}_B = \vec{S}_{BD},$$

записав ее в проекциях на ось *Bx*:

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = S_{B-D,x}. \tag{2.4}$$

Находим сумму проекций импульсов сил на ось *Bx* как сумму импульсов проекций этих сил:

$$S_{B-D,x} = S(mg_x) + S(F_{2x}) + S(N_{2x}). \tag{2.5}$$

Находим импульсы проекций сил:

$$S(mg_x) = -mg\sin\beta\cdot\tau;$$
$$S(F_{2x}) = -mg\ f\cos\beta\cdot\tau;$$
$$S(N_{2x}) = 0.$$

Подставляем эти выражения в формулу (2.5), а затем в формулу (2.4). Получаем:

$$mv_{Dx} - mv_B = -mg(\sin\beta + f\cos\beta)\cdot\tau;$$
$$v_{Dx} = v_B - g\tau(\sin\beta + f\cos\beta) = 5,74 - 9,81\cdot 0,2(0,5 - 0,2\cdot 0,87) = 5,1 м/с.$$

4. Ответы:

$$v_C = 5,74 м/с; \quad v_B = 5,74 м/с; \quad v_D = 5,1 м/с; \ N_C = 34,68H.$$

Задание 3. Дифференциальные уравнения движения твердого тела

Механическая система состоит из груза 3 и колес 1 и 2 (рис. 6). К колесу 1 приложена сила $P = P(t)$. Время t отсчитывается от момента $t = 0$, когда угловая скорость колеса 1 равна $\omega_{1,0}$. Момент сил сопротивления, приложенных к ведомому колесу 2, равен M_c. Другие силы сопротивления движению системы не учитывать. Массы колес 1 и 2 равны m_1 и m_2, масса груза 3 равна m_3. Радиусы больших и малых окружностей колес равны R_1, r_1, R_2, r_2. Заданы радиусы инерции i_1, i_2 тел слжной формы. Если радиус инерции колеса не задан, то считаем его сплошным однородным диском.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 3.

Найти закон движения того тела T системы, номер которого указан в последнем столбце таблицы 3.

Определить также натяжение нити в заданный момент времени t_1 и окружное усилие в точке соприкосновения колес 1 и 2.

Таблица3

Исходные данные для задания 3

Номер варианта	Заданные величины							
	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	$P = P(t)$, Н	M_c, Нм	$\omega_{1,0}$, рад/с	t_1, с	тело T
0	300	100	800	$10200+100t$	600	1	0,5	2
1	150	300	600	$5500+200t$	1500	2	1	3
2	300	250	800	$9800+50t$	500	1	2	1
3	200	300	800	$5000+50t$	800	1	1	1
4	250	150	900	$9800+200t$	700	2	0,5	1
5	240	100	840	$9600+140t$	830	1	1	2
6	250	80	920	$6400+120t$	700	1,5	0,5	3
7	280	90	940	$8100+80t$	600	1	2	2
8	220	90	700	$7200+80t$	1200	1,5	1,5	1
9	210	70	680	$9200+160t$	1200	1	1,5	2

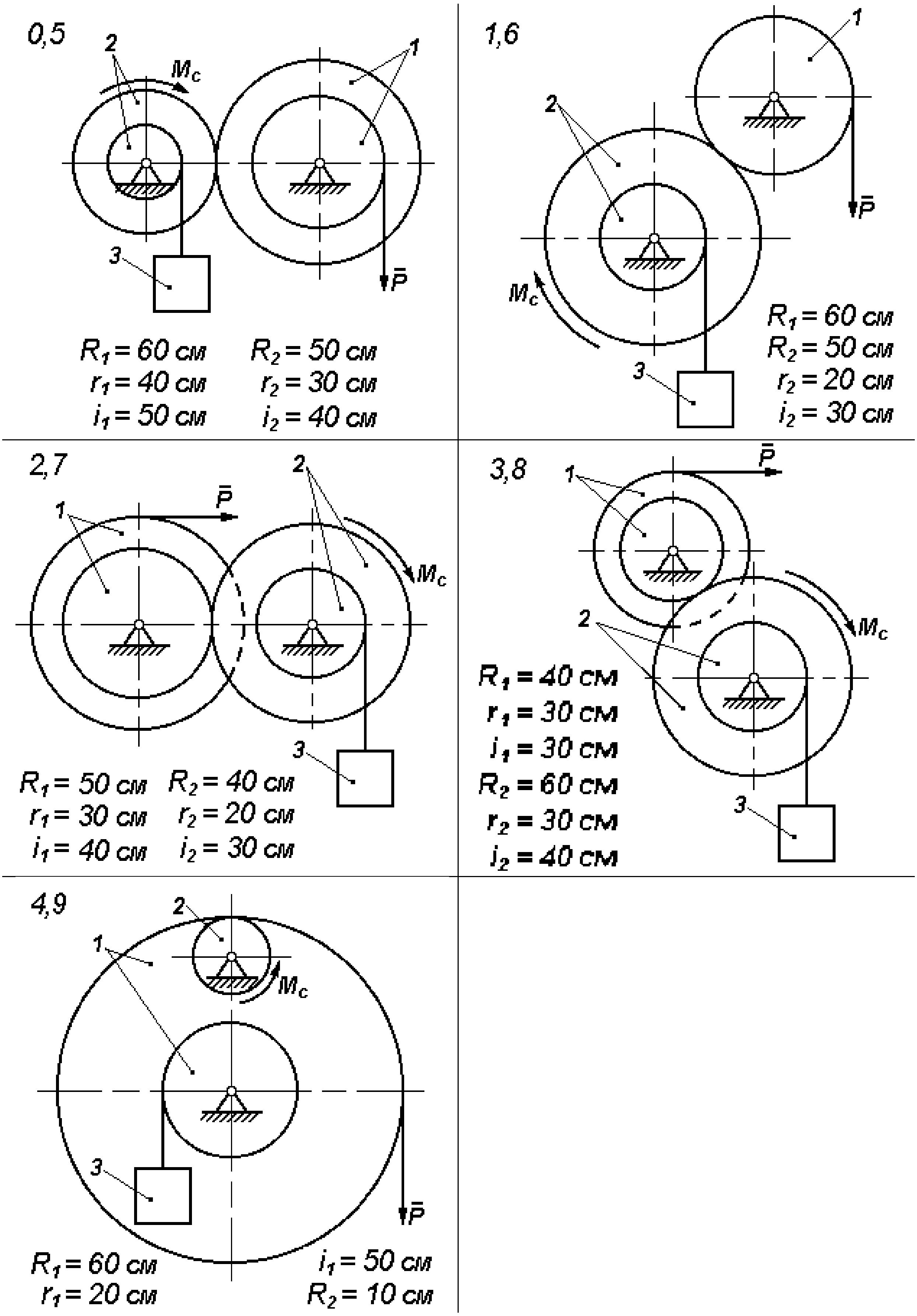


Рис. 6. Схемы механизмов для задания 3

Основные теоретические положения, используемые при решении задачи

В этом задании механизм разбивается на отдельные звенья – твердые тела, для которых составляются динамические уравнения поступательного или вращательного движения.

Груз 3 можно считать твердым телом, движущимся поступательно, или материальной точкой, поскольку его размеры не заданы. Уравнение его поступательного движения выглядит здесь как основное уравнение динамики точки.

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела имеет вид:

$$I_z \varepsilon_z = M_z^E,$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения Oz, $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$ - проекция вектора углового ускорения тела на ось Oz, M_z^E - главный момент (т.е. сумма моментов) внешних сил относительно оси Oz.

Момент инерции тела сложной формы вычисляем через его массу m и радиус инерци i согласно формуле $I_z = mi^2$.

Момент инерции однородного сплошного диска выржаем через его радиус R: $I_z = 0{,}5mR^2$.

Составляем два уравнения вращательного движения тел 1 и 2 и одно уравнение поступательного движения тела 3. В получившейся системе трех уравнений исключаем неизвестные реакции связей, выражаем через ускорение исследуемого тела T ускорения других тел (используя передаточные соотношения). Составляем дифференциальное уравнение движения тела T как уравнение второго порядка относительно обобщенной координаты тела и интегрируем его при заданных начальных условиях.

Пример выполнения задания № 3

Условие задания

Механическая система состоит из груза 3 и колес 1 и 2. К колесу 1 приложена сила $P = P(t)$. Время t отсчитывается от момента $t = 0$, когда угловая скорость колеса 1 равна $\omega_{1,0}$. Момент сил сопротивления, приложенных к ведомому колесу 2, равен M_c. Другие силы сопротивления движению системы не учитывать. Массы колес 1 и 2 равны m_1 и m_2, масса груза 3 равна m_3. Радиусы больших и малых окружностей колес равны R_1, r_1, R_2, r_2. Заданы радиусы инерции i_1, i_2 тел сжной формы. Если радиус инерции колеса не задан, то считаем его сплошным однородным диском.

Найти закон движения того тела T системы, номер которого указан в последнем столбце таблицы 3. Определить также натяжение нити в заданный момент времени t_1 и окружное усилие в точке соприкосновения колес 1 и 2.

Схема № 10 (рис. 7), вариант данных № 11.

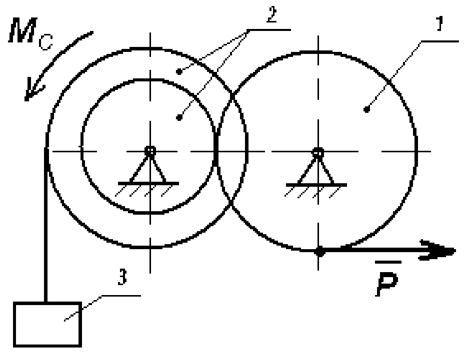
Дано:

$P = 7500 + 150t\ Н;\quad M_C = 600\ Нм;$

$m_1 = 200кг;\quad m_2 = 300кг;$

$m_3 = 300кг;\quad R_1 = R_2 = 0{,}6\,м;\quad r_2 = 0{,}4\,м;$

$i_2 = 0{,}5м;\quad \omega_{1,0} = 1\frac{рад}{с};\quad t_1 = 0{,}5с.$



Найти:

Закон движения тела 1 $\varphi_1 = \varphi_1(t)$; величины сил $T = T_{2,3} = T_{3,2}$, $S = S_{1,2} = S_{2,1}$ при $t_1 = 0{,}5с$.

Рис. 7

Решение

1. ***Объект исследования***: механическая система , состоящая из тел 1, 2, 3 (подъемный механизм).

2. ***Используем прием декомпозиции системы***. Отделяем массивные части конструкции одну от другой, изображаем каждую часть отдельно вместе с приложенными к ней внешними силами (рис. 8).

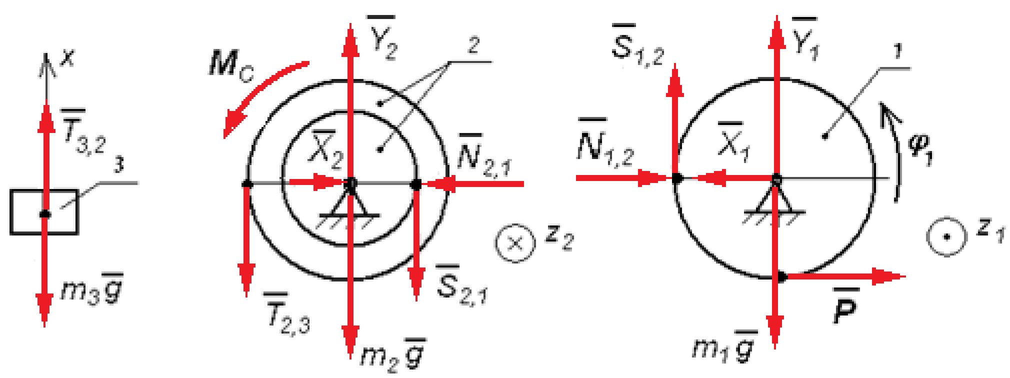


Рис. 8.

Изображаем активные силы тяжести, силу P, момент сопротивления M_C. Силы взаимодействия между колесами 1 и 2 раскладываем на нормальные N и окружные S составляющие. Согласно третьему закону Ньютона $\vec{S}_{1,2} = -\vec{S}_{2,1}$; $\vec{N}_{1,2} = -\vec{N}_{2,1}$; $\vec{T}_{2,3} = -\vec{T}_{3,2}$. Обозначаем величину окружного усилия $S = S_{1,2} = S_{2,1}$, величину силы натяжения нити $T = T_{2,3} = T_{3,2}$. составляющие реакций подшипников $\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{X}_2, \vec{Y}_2$.

Центры тяжести колес считаем находящимися на осях вращения.

3. Составляем уравнения движения тел.

3.1. Тело 1 совершает вращательное движение. Направим ось вращения z_1 на нас. Согласуем направление отсчета обобщенной координаты φ_1 (угла поворота тела 1) с направлением оси z_1 по правилу правого винта. Уравнение движения тела 1:

$$I_1\ddot{\varphi}_1 = PR_1 - SR_1, \tag{3.1}$$

где $I_1 = m_1\dfrac{R_1^2}{2}$ - момент инерции колеса 1.

3.2. Тело 2 совершает также вращательное движение. Направим ось вращения z_2 от нас, противоположно направлению оси z_1. Поскольку зацепление колес внешнее, то угловые ускорения их направлены противоположно друг другу, т.е. если $\ddot{\varphi}_{1,Z1} > 0$, то и $\ddot{\varphi}_{2,Z2} > 0$. Уравнение движения тела 2:

$$I_2\ddot{\varphi}_2 = Sr_2 - M_C - TR_2, \tag{3.2}$$

где $I_2 = m_2 i_2^2$ - момент инерции тела 2.

3.3. Тело 3 совершает поступательное движение. Направим ось x вверх. Отметим, что если $\ddot{\varphi}_{2,Z2} > 0$, то и $a_{3,x} = \ddot{x} > 0$. Уравнение движения тела 3:

$$m_3\ddot{x} = T - m_3 g. \tag{3.3}$$

3.4. Учет связей.

Дополним уравнения движения кинематическими соотношениями между величинами ускорений (направления уже согласованы):

$$\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_1 \frac{R_1}{r_2}; \quad \ddot{x} = \ddot{\varphi}_2 R_2 = \ddot{\varphi}_1 \frac{R_1 R_2}{r_2}. \tag{3.4}$$

Подставив выражения (3.4) в движения (3.1)-(3.3), получим систему:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 \ddot{\varphi}_1 = PR_1 - SR_1, \\ I_2 \dfrac{R_1}{r_2} \ddot{\varphi}_1 = Sr_2 - M_C - TR_2 \\ m_3 \dfrac{R_1 R_2}{r_2} \ddot{\varphi}_1 = T - m_3 g \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

Исключив из уравнений (3.5) неизвестные S и T, получим дифференциальное уравнение, описывающее движение механизма:

$$J\ddot{\varphi}_1 = M, \tag{3.6}$$

где J - приведенный к телу 1 момент инерции механизма, $M=M(t)$ - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате φ_1 и имеющая размерность момента.

$$J = I_1 + I_2 \frac{R_1^2}{r_2^2} + m_3 \frac{R_1^2 R_2^2}{r_2^2} = (\frac{m_1}{2} + \frac{m_2 i_2^2 + m_3 R_2^2}{r_2^2}) R_1^2 =$$
$$= (\frac{200}{2} + \frac{300 \cdot 0,5^2 + 300 \cdot 0,6^2}{0,4^2}) 0,6^2 = 447,75 \text{кг} = const.$$

$$M = (P - \frac{M_C + m_3 g R_2}{r_2}) R_1 = (7500 + 150t - \frac{600 + 300 \cdot 9,81 \cdot 0,6}{0,4}) \cdot 0,6 =$$
$$= 90t + 951,3 \, (\text{Нм}).$$

Дифференциальное уравнение движения с числовыми коэффициентами имеет вид:

$$\ddot{\varphi}_1 = 0,2t + 2,12.$$

Начальные условия: $\varphi_{1,0} = 0; \quad \dot{\varphi}_{1,0} = \omega_{1,0} = 1.$

4. Интегрируем дифференциальное уравнение (3.6):

$$\dot{\varphi}_1 = 0{,}1t^2 + 2{,}12t + C_1;$$
$$\varphi_1 = 0{,}03t^3 + 1{,}06t^2 + C_1 t + C_2.$$

Из начальных условий следует: $C_1 = 1;\ C_2 = 0.$ Тогда закон движения тела 1

$$\varphi_1 = 0{,}03t^3 + 1{,}06t^2 + t.$$

5. *Расчет сил.*

Из первого уравнения системы (3.5) находим силу S:

$$S(t_1) = P(t_1) - \frac{I_1}{R_1}\ddot{\varphi}_1(t_1) = 7500 + 150 \cdot 0{,}5 - \frac{200 \cdot 0{,}6}{2}(2{,}12 + 0{,}2 \cdot 0{,}5) = 7442\,H.$$

Из третьего уравнения системы (3.5) находим силу T:

$$T(t_1) = m_3\left(g + \frac{R_1 R_2}{r_2}\ddot{\varphi}_1(t_1)\right) = 300\left(9{,}81 + \frac{0{,}6^2}{0{,}4}2{,}22\right) = 3542\,H.$$

6. Ответы: $\varphi_1 = 0{,}03t^3 + 1{,}06t^2 + t;\quad S(t_1) = 7{,}44\,кH;\quad T(t_1) = 3{,}54\,кH.$

Задание 4. ***Теорема об изменении кинетической энергии механической системы***

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 9. Учитывая трение скольжения тела 1 по опорной плоскости, пренебрегая массами нитей и предполагая их нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S.

Исходные данные приведены в табл. 4. Все блоки, для которых радиусы инерция (i) не заданы, считать однородными цилиндрами.

В задании приняты следующие обозначения:

m_1, m_2, m_3, m_4 - массы тел 1, 2, 3, 4, выраженные через эталонную массу m;

α - угол наклона опорной плоскости к горизонту;

f - коэффициент трения скольжения.

Таблица 4

Исходные данные к заданию 4

Номер варианта исходных данных	Заданные величины						
	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	α, град	f	S, м
0	m	$2m$	m	$0{,}6m$	30	0,20	2,5
1	m	$4m$	$0{,}2m$	$1{,}5m$	60	0,10	2
2	m	m	$0{,}1m$	$0{,}5m$	30	0,12	2
3	m	$0{,}25m$	$0{,}5m$	$0{,}2m$	45	0,15	3
4	m	$0{,}3m$	$0{,}1m$	m	60	0,20	1,5
5	m	m	$0{,}1m$	$1{,}2m$	30	0,10	1
6	m	$2m$	$4m$	m	45	0,15	2
7	m	$0{,}5m$	$0{,}2m$	m	60	0,12	3
8	m	$0{,}4m$	$0{,}1m$	$2m$	30	0,20	1,5
9	m	$3m$	m	$0{,}5m$	45	0,10	1

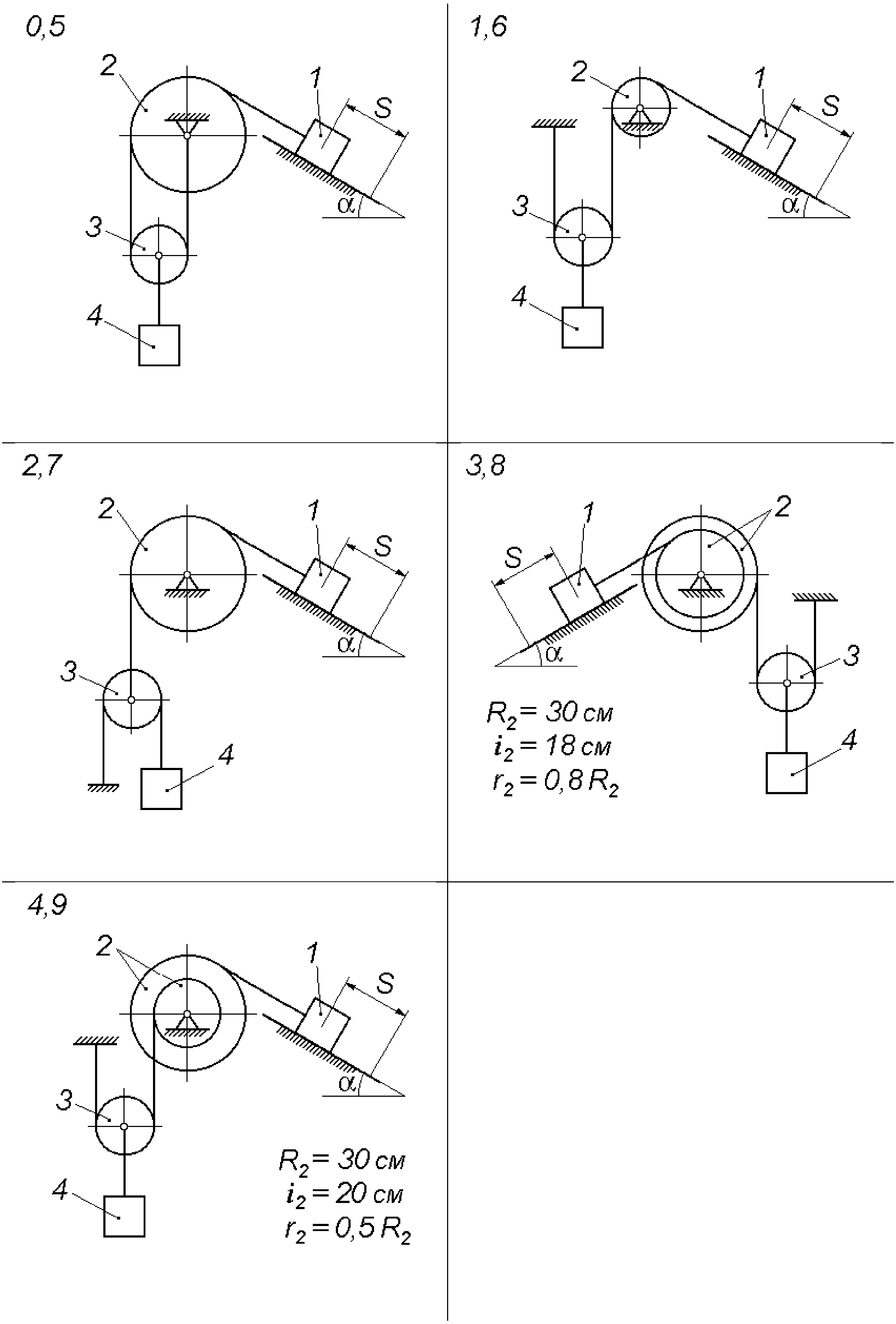


Рис. 9. Расчетные схемы для задания 4

Основные теоретические положения, используемые при решении задач

Для выполнения этого задания рекомендуется применить теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}^{I} + A_{1-2}^{E},$$

где T_2 - кинетическая энергия системы в конце движения, T_1 - кинетическая энергия ее в начале движения, A_{1-2}^{I} - сумма работ внутренних (Interior) сил, A_{1-2}^{E} - сумма работ внешних (Exterior) сил при перемещении механической системы из начального положениея 1 в конечное положение 2.

Кинетическая энергия системы есть сумма энергий ее частей: $T = \sum_i T_i$.

Кинетическая энергия твердого тела определяется по формулам:

- при поступательном движении: $T = \frac{mv_C^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса тела;
- при вращательном движении: $T = \frac{I\omega^2}{2}$, где I – момент инерции тела относительно оси его вращения; ω – угловая скорость тела;
- при плоскопараллельном движении: $T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}$, где v_C - скорость центра масс, I_C - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

Осевые моменты инерции тел простейшей формы приводятся в справочниках. Момент инерции тела сложной формы характеризуется радиусом инерции *i*:

$$I = mi^2.$$

В этом задании механическая система имеет одну степень свободы. Скорость любой ее точки может быть выражена через скорость v_1 тела 1, так что вся ее кинетическая энергия может быть представлена в следующей форме:

$$T = \frac{1}{2}\mu v_1^2,$$

где μ - приведенная к телу 1 масса системы.

При записи теоремы работу представляют как сумму работ внешних (*Exterior – лат.)* и внутренних (*Interior*) сил:

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}^E + A_{1-2}^I .$$

Работа каждой силы есть криволинейный интеграл от элементарной работы δA. Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, равна сумме работ главного вектора $\vec{F}^E$ и главного момента $\vec{M}_C^E$ внешних сил относительно полюса *C*:

$$\delta A = \delta A^E = \vec{F}^E \cdot d\vec{r}_C + \vec{M}_C^E \cdot d\vec{\varphi},$$

где $d\vec{r}_C$ и $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$ - векторы бесконечно малого (элементарного) перемещения полюса C тела и бесконечно малого поворота тела. В частности, при вращении тела вокруг неподвижной оси *z*

$$\delta A = M_z^E \, d\varphi ,$$

где M_z^E - главный момент внешних сил относительно оси вращения.

Элементарная работа всех внутренних сил в нашей задаче равна нулю, поскольку это силы, действующие внутри твердых тел и внутри нерастяжимых нитей (такая механическая система называется неизменяемой):

$$A_{1-2}^I = 0 .$$

При выполнении задания предполагаем сначала некоторое направление движения тела 1 и находим сумму работ сил. Поскольку механическая система имеет одну степень свободы, то все перемещения выражаем через перемещение *S* тела 1, и тогда эта суммарная работа может быть представлена в виде:

$$A = QS,$$

где Q – обобщенная сила системы. Если оказалось, что $Q > 0$, то предположение о направлении движения подтвердилось. Иначе надо рассмотреть альтернативное предположение о направлении движения груза 1 и пересчитать силу Q. Если снова сила Q отрицательна или равна нулю, то конструкция находится в зоне застоя; ответом будет $v_1 = 0$.

Если какая-то сила не участвует в расчете работ, то ее можно на рисунке не изображать. Например, силы, приложенные к неподвижным центрам шарниров блоков: силы тяжести и реакции опор.

Замечание. В этом задании теорема об изменении кинетической энергии в конечном итоге может быть записана в виде:

$$\mu \frac{v_1^2}{2} = Q \cdot S \,.$$

Это выражение, в котором μ и Q - константы, является тождеством относительно переменной t. Приравниваем производные по переменной t от левой и правой частей:

$$\frac{\mu}{2} 2 v_1 \dot{v}_1 = Q \dot{S} \,.$$

Здесь множитель $\dot{S} = v_1$ сокращается, и мы находим ускорение тела 1:

$$\dot{v}_1 = a_1^{\tau} = a_1 = \frac{Q}{\mu}.$$

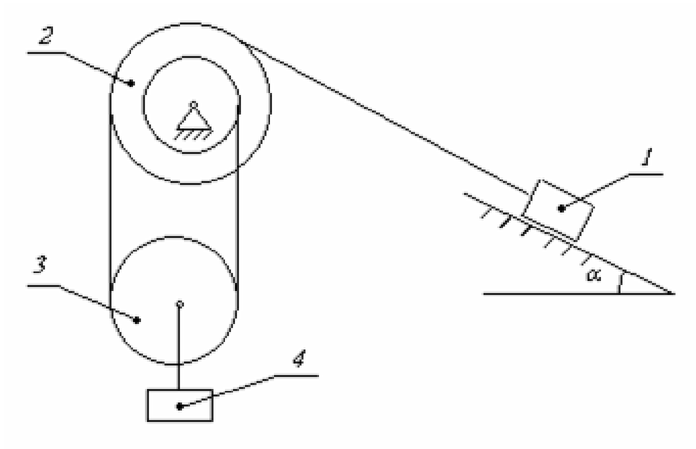
Пример выполнения задания № 4

Условие задания

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 9. Учитывая трение скольжения тела 1 по опорной плоскости, пренебрегая массами нитей и предполагая их нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным *S*. Блоки, для которых радиусы инерция *(i)* не заданы, считать однородными цилиндрами.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 - массы тел 1, 2, 3, 4, выраженные через эталонную массу *m*; α - угол наклона опорной плоскости к горизонту; *f* - коэффициент трения скольжения.

Схема № 10 (рис. 10), вариант данных № 11.



Дано:

$m_1 = 2кг, \quad m_2 = 2кг, \quad m_3 = 4кг,$

$m_4 = 6кг, \quad R_2 = 0{,}4м; \quad r_2 = 0{,}2м;$

$i_2 = 0{,}25м; \quad \alpha = 30°, \quad f = 0{,}2;$

$S = 1{,}2м.$

Требуется найти: v_1.

Рис. 10

Решение

1. Объект исследования - механическая система, состоящая из массивных тел *1, 2, 3, 4,* соединенных через посредство блоков гибкими нерастяжимыми нитями. Движение системы изучаем относительно геоцентрической системы отсчета в течение времени, за которое тело 1 перемещается на расстояние S. Предполагаем, что тело 1 поднимается.

2. Метод исследования - теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = A^E, \tag{4.1}$$

где T - кинетическая энергия системы в конце движения, T_0 - ее кинетическая энергия в начале движения, A^E - суммарная работа внешних сил, действующих на неизменяемую систему.

Так как в начальном положении система находится в покое, то

$$T_0 = 0 \tag{4.2}$$

3. Кинетическая энергия системы равна сумме энергий ее частей:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

3.1. Тело 1 движется поступательно; кинетическая энергия тела равна

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2.$$

3.2. Тело 2 совершает вращательное движение:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,$$

где I_2 - момент инерции составного блока 2 относителтно оси его вращения, ω_2 - его угловая скорость. Момен инерции тела сложной формы выражаем через заданный радиус инерции: $I_2 = m_2 i_2^2$.

В силу нерастяжимости нитей и отсутствия скольжения их относительно ручьев блоков, имеем: $\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$. Тогда

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} v_1^2.$$

3.3. Тело 3 совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия согласно теореме Кёнига равна

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

где v_C - скорость центра масс C блока 3, $I_3 = \dfrac{m_3 R_3^2}{12}$ - момент инерции блока относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости его движения, ω_3 - угловая скорость блока 3. Здесь R_3 - радиус блока 3.

Для определения кинематических параметров блока 3 изобразим распределение скоростей его точек (рис. 11, *а*). Очевидно, $v_K = v_1$, $v_L = \omega_2 r_2 = v_1 \dfrac{r_2}{R_2}$. Изобразив в некотором масштабе векторы скоростей точек K и L, строим мгновенный центр скоростей P и скорость точки C.

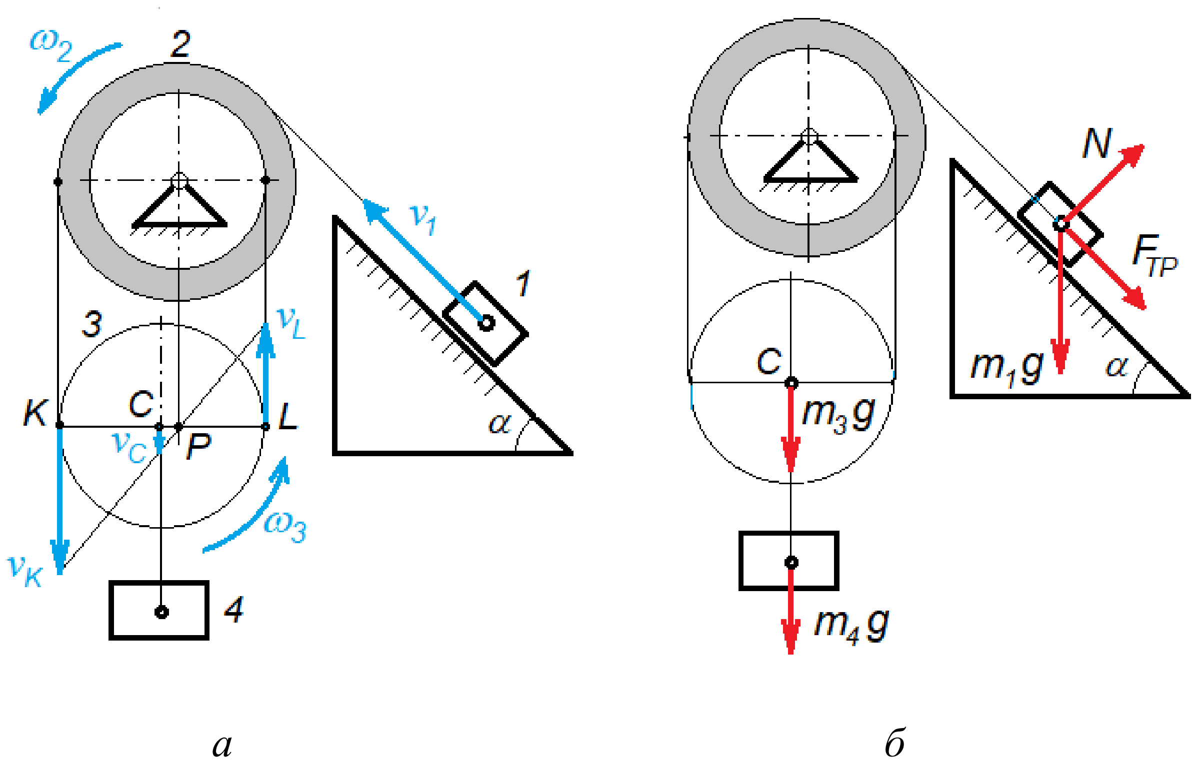


Рис. 11. Система четырех тел: *а* – распределение скоростей точек блока 3, *б* - силы, участвующие в расчете работы

Точка P делит диаметр блока 3 в отношении $R_2 : r_2$, так что

$$\omega_3 = \frac{v_K}{KP} = \frac{v_1}{R_2} = \omega_2 .$$

Радиус блока 3: $R_3 = KC = \dfrac{R_2 + r_2}{2}$. Имеем далее:

$$CP = KP - KC = R_2 - \frac{R_2 + r_2}{2} = \frac{R_2 - r_2}{2}, \quad v_C = \omega_3 \cdot CP = v_1 \frac{R_2 - r_2}{2R_2}.$$

Тогда $\quad T_3 = m_3 \frac{v_1^2}{2} \frac{(R_2 - r_2)^2}{4R_2^2} + m_3 \frac{v_1^2}{2} \frac{(R_2 + r_2)^2}{8R_2^2}.$

3.4. Кинетическая энергия тела 4, совершающего поступательное движение:

$$T_4 = m_4 \frac{v_4^2}{2} = m_4 \frac{v_C^2}{2} = m_4 \frac{v_1^2}{2} \frac{(R_2 - r_2)^2}{4R_2^2}.$$

3.5. Вся кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \left[m_1 + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + (m_3 + m_4) \frac{(R_2 - r_2)^2}{4R_2^2} + m_3 \frac{(R_2 + r_2)^2}{8R_2^2} \right] \cdot \frac{v_1^2}{2}.$$

Представляем это выражение как

$$T = \mu \frac{v_1^2}{2}, \tag{4.3}$$

где μ - приведенная масса системы:

$$\mu = m_1 + m_2 \frac{i_2^2}{R_2^2} + (m_3 + m_4) \frac{(R_2 - r_2)^2}{4R_2^2} + m_3 \frac{(R_2 + r_2)^2}{8R_2^2} =$$

$$= 2 + 2 \frac{0,25^2}{0,4^2} + 10 \frac{0,2^2}{4 \cdot 0,4^2} + 4 \frac{0,6^2}{8 \cdot 0,4^2} = 4,53 \textit{кг}.$$

4. Работа сил. Изображаем на рис. 11, *б* те внешние силы, которые соверершают работу (сила N работу не совершает, но участвует в расчете силы трения F_{TP}). Общая работа:

$$A = A(m_1 g) + A(F_{TP}) + A(m_3 g) + A(m_4 g).$$

4.1. Работа силы $m_1 \vec{g}$ (тело 1, согласно предположению, поднимается):

$$A(m_1 g) = -m_1 g S \sin\alpha.$$

4.2. Работа силы трения $F_{TP} = fN$. Чтобы найти силу N, запишем основное уравнение динамики груза 1 в проекциях на нормаль к его траектории:

$$0 = m_1 a_{1,n} = N - m_1 g \cos\alpha.$$

Тогда $N = m_1 g \cos\alpha$, следовательно, $F_{TP} = m_1 g f \cos\alpha = const$. Работа:

$$A(F_{TP}) = -F_{TP}S = -m_1 g f S\cos\alpha.$$

4.3. Суммарная работа сил $m_3\vec{g}$ и $m_4\vec{g}$:

$$A(m_3 g) + A(m_4 g) = m_3 g h_3 + m_4 g h_{4.}$$

Здесь $h_3 = h_4$ - высота, на которую опускается центр тела 3 и тело 4:

$$h_3 = h_4 = \int_0^\tau v_4 dt = \int_0^\tau \frac{R_2 - r_2}{2R_2} v_1 dt = \frac{R_2 - r_2}{2R_2}\int_0^\tau v_1 dt = \frac{R_2 - r_2}{2R_2} S,$$

при этом τ – время движения, $\int_0^\tau v_1 dt = S$ - путь, пройденный телом 1. Тогда

$$A(m_3 g) + A(m_4 g) = (m_3 + m_4) g \frac{R_2 - r_2}{2R_2} S.$$

Полная работа:

$$A = \left[(m_3 + m_4)\frac{R_2 - r_2}{2R_2} - m_1(\sin\alpha + f\cos\alpha) \right] g\,S = Q\,S. \qquad (4.4)$$

Рассчитываем обобщенную силу Q:

$$Q = \left[10\frac{0,2}{2\cdot 0,4} - 2(0,5 + 0,2\cdot 0,87) \right]\cdot 9,81 = 8,85\,H.$$

Это величина положительная, следовательно, предположение о направлении движения тела 1 подтвердилось.

5. Скорость тела 1.

Подставляем выражения (4.2) – (4.4) в формулу (4.1):

$$\mu\frac{v_1^2}{2} = QS,$$

откуда получаем $v_1 = \sqrt{\dfrac{2QS}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 8,85\cdot 1,2}{4,53}} = 2,17\,м/с.$

6. Ответ: $v_1 = 2,17\,м/с.$

Задание 5. Уравнения Лагранжа второго рода. Колебания линейной системы с несколькими степенями свободы.

Составить дифференциальные уравнения движения линейной колебательной системы с несколькими степенями свободы. Найти собственные частоты колебаний. Схемы механизмов и исходные числовые данные прмведены в табл. 5.

Катки и колеса считать сплошными однородными цилиндрами, катящимися без скольжения по соприкасающимся с ними телам.

Таблица 5

Исходные данные к заданию 5

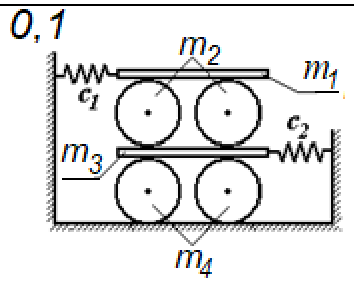
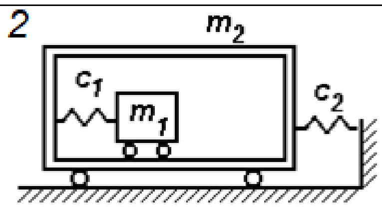
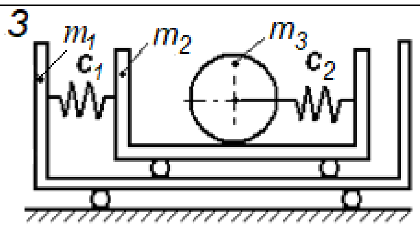
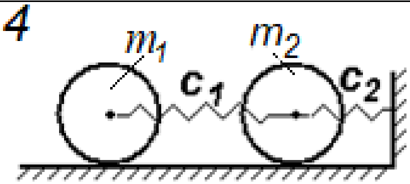
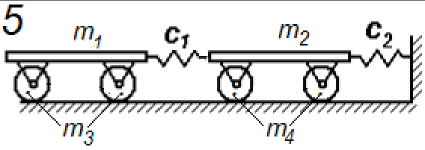
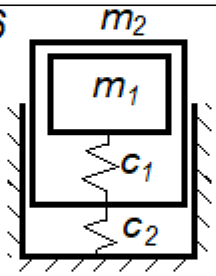
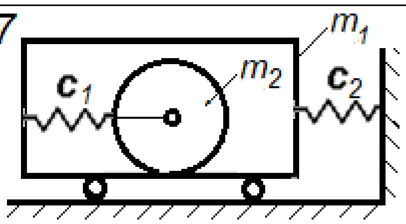
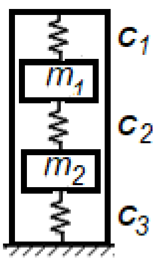
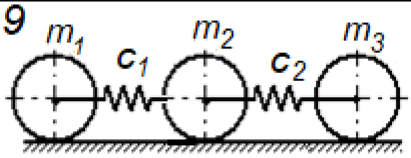
Схема механизма	Заданные величины	Номер варианта исходных данных									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	m_1, кг	12	13	14	5	6	20	22	32	42	52
	m_2, кг	2	8	3	1	3	8	9	14	7	4
	m_3, кг	15	10	25	30	12	18	28	40	32	24
	m_4, кг	7	5	4	6	2	4	6	8	6	10
	c_1, кН/м	13	18	20	12	17	15	20	24	15	18
	c_2, кН/м	12	21	24	15	25	13	10	18	11	15
	m_1, кг	5	4	3	2	60	6	5	4	3	2
	m_2, кг	28	12	27	30	15	14	24	16	25	20
	c_1, кН/м	5	10	5	3	12	8	8	4	32	4
	c_2, кН/м	11	5	10	6	25	9	14	18	16	10
	m_1, кг	16	26	28	21	22	23	24	18	15	17
	m_2, кг	6	4	9	11	15	18	7	2	1	3
	m_3, кг	15	10	25	30	12	8	8	4	9	5
	c_1, кН/м	18	15	12	6	8	14	0	6	7	8
	c_2, кН/м	12	2	5	1	5	1	8	2	11	6

Таблица 5 - продолжение

Схема механизма	Заданные величины	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4 	m_1, кг	6	14	12	9	8	7	6	12	25	13
	m_2, кг	8	12	17	13	15	14	11	6	23	9
	c_1, кН/м	15	10	25	16	12	18	16	4	32	4
	c_2, кН/м	18	8	32	24	20	11	10	6	27	8
5 	m_1, кг	3	5	12	6	7	8	9	10	12	16
	m_2, кг	2	8	10	11	4	16	9	14	17	12
	m_3, кг	1	2	3	2	1	3	3	8	4	5
	m_4, кг	1	2	2	4	2	4	4	4	6	5
	c_1, кН/м	10	14	18	6	7	2	10	6	10	8
	c_2, кН/м	15	10	15	10	16	4	20	5	25	10
6 	m_1, кг	1	5	4	2	9	6	3	4	7	9
	m_2, кг	6	8	9	5	2	3	1	8	7	4
	c_1, кН/м	3	10	7	4	8	10	2	10	15	4
	c_2, кН/м	18	5	12	6	10	8	4	12	22	8
7 	m_1, кг	13	15	12	16	17	18	9	12	14	6
	m_2, кг	7	9	8	3	2	6	9	1	6	2
	c_1, кН/м	15	20	50	25	14	34	12	13	12	4
	c_2, кН/м	16	32	20	25	25	10	10	4	16	8
8 	m_1, кг	17	15	81	42	32	26	21	18	36	40
	m_2, кг	13	11	22	27	48	50	14	29	40	56
	c_1, кН/м	16	24	15	25	15	32	12	10	20	14
	c_2, кН/м	20	32	20	25	10	24	14	16	26	12
	c_3, кН/м	17	25	40	20	16	16	12	15	20	10
9 	m_1, кг	5	5	40	32	24	36	48	54	70	16
	m_2, кг	4	7	5	3	16	8	9	12	20	14
	m_3, кг	6	16	36	60	64	28	72	40	10	25
	c_1, кН/м	14	23	30	30	25	13	28	16	9	16
	c_2, кН/м	10	20	15	25	14	13	16	21	12	15

Основные теоретические положения, используемые при решении задач

В задании даны схемы устройств, совершающих колебательное движение. Уравнения движения составляются как уравнения Лагранжа второго рода для консервативной механической системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad (5.1)$$

где L - функция Лагранжа, равная разности кинетической (T) и потенциальной (U) энергий системы: $L=T-U$. Консервативность обеспечена тем, что задаваемые силы, действующие на систему и совершающие работу, относятся к классу потенциальных (или консервативных) сил: это силы тяжести и силы упругости.

В начале решения следует определить число w степеней свободы системы и назначить обобщенные координаты так, чтобы положение равновесия системы соответствовало нулевым их значениям: тогда уравнения движения будут иметь наиболее простой вид однородных уравнений. В тех вариантах, где число степеней свободы равно трем, начало отсчета одной из координат можно назначить произвольным образом.

Составляется выражение для кинетической энергии, которая в общем случае является функцией обобщенных координат $q_1,q_2,\ldots q_w$, обощенных скоростей $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots\dot{q}_w$ и времени: $T=T(q_1,\ldots q_w,\dot{q}_1,\ldots\dot{q}_w,t)$. Механические системы, представленные в данном задании таковы, что кинетическая энергия не зависит от обобщенных координат и времени и может быть представлена квадратичной формой с постоянными коэффициентами:

$$T=\frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q}.$$

Здесь $\dot{q}=\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \cdots\\ \dot{q}_w\end{pmatrix}$ - вектор-столбец обобщенных скоростей, $\dot{q}^T$ - транспонированный вектор $\dot{q}$ (т.е. вектор-строка), A - симметричная матрица инерционных параметров.

Учитываем, что кинетическая энергия, как мера движения, является аддитивной функцией системы: общая энергия системы равна сумме энергий отдельных ее частей. В некоторых вариантах надо выполнить отдельный рисунок, поясняющий расчет скоростей при плоском движении твердого тела или при сложном движении точки.

Далее составляется выражение для потенциальной энергии.

В тех вариантах, где в положении равновесия упругие элементы Гука (пружины) деформированы, надо составить уравнения равновесия для вычисления их статических деформаций и использовать их для упрощения выражения для суммарной потенциальной энергии. Следует добиться того, чтобы потенциальная энергия предстала в виде квадратичной формы обобщенных координат:

$$U = \frac{1}{2} q^T C q,$$

где $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_w \end{pmatrix}$ - вектор-столбец обобщенных координат, C - матрица упругих параметров задачи.

Уравнения Лагранжа (5.1) в нашем случае будут иметь вид следующей системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$A\ddot{q} + Cq = 0. \tag{5.2}$$

Решение системы (5.2) ищется в форме синфазных колебаний:

$$q = h \sin(\omega t + \alpha). \tag{5.3}$$

Здесь $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_w \end{pmatrix}$ - вектор амплитуд колебаний, ω - циклическая частота колебаний, α - начальная фаза. Подстановка выражения (5.3) в уравнеия (5.2) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для амплитуд, матричная запись которой имеет вид:

$$(C - \omega^2 A)h = 0.$$

Нетривиальное (ненулевое) решение однородная СЛАУ имеет при условии обращения в нуль ее определителя:

$$\det(C - \omega^2 A) = 0. \tag{5.4}$$

Из частотного уравнения (5.4) находим собственные частоты системы ω_1, ω_2. Это уравнение приводим к виду квадратного уравнения относительно неизвестной ω^2. Если кинетическая и потенциальная энергии найдены верно, то матрицы A и C положительно определены, и тогда собственные частоты вещественны и неотрицательны. В тех вариантах, где число степеней свободы равно трем, получаем кубическое уравнение, имеющее нулевой корень $\omega_3^2 = 0$. Тела должны при этом колебаться так, чтобы силы упругости, как внутренние силы, не влияли на движение центра масс системы.

Пример выполнения задания № 6

Условие задания

Составить дифференциальные уравнения движения колебательной системы и найти собственные частоты ее колебаний.

Схема № 11 (рис. 12), вариант данных № 12.

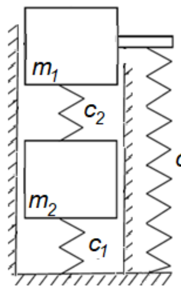


Рис. 12. Схема к заданию 6

Дано: m_1 =80 кг, m_2 =60 кг, c_1=4•10^4 Н/м, c_2=3•10^4 Н/м, c_3=2•10^4 Н/м

Требуется: составить дифф. уравнения движения и найти собственные частоты ω_1, ω_2.

Решение

1. Назначение обобщенных координат. Очевидно, данная система имеет 2 степени свободы. Положение системы будем описывать обобщенными координатами x_1, x_2, которые будем отсчитывать от положений равновесия центров тяжести тел (рис. 13). Найдем статические деформации упругих элементов (пружин).

Пусть Δ_1, Δ_3 - величины деформаций (например, деформаций сжатия) пружин 1 и 3 в равновесном положении системы. Деформация средней пружины равна $\Delta_3 - \Delta_1$; пусть при этом $\Delta_3 > \Delta_1$, т.е. пружина 2 тоже сжата. Запишем выражения для величин упругих сил, действующих на грузы:

$$F_1 = c_1\Delta_1,\ F_1 = c_2(\Delta_3 - \Delta_1),\ F_3 = c_3\Delta_3.$$

Составляем уравнения равновесия тел в положении $x_1 = x_2 = 0$:

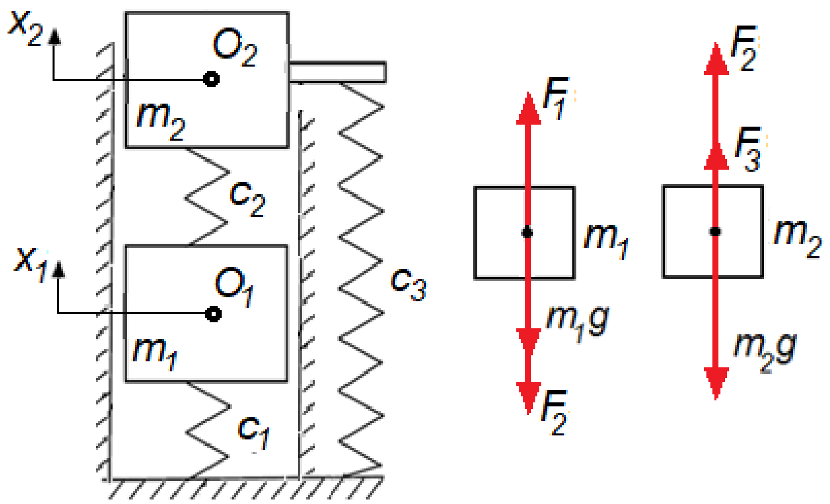


Рис. 13. Грузы в положении равновесия и силы, действующие на них

$$\left.\begin{aligned} m_1g + F_2 = F_1 \\ m_2g = F_2 + F_3 \end{aligned}\right\}, \text{ или } \quad \left.\begin{aligned} m_1g = c_1\Delta_1 + c_2(\Delta_1 - \Delta_3) \\ m_2g = c_3\Delta_3 - c_2(\Delta_1 - \Delta_3) \end{aligned}\right\}. \tag{5.5}$$

2. Кинетическая энергия системы.

Проскольку грузы совершают поступательное движение, то

$$T = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}.$$

Обозначим: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$ - векторы-столбцы обобщенных координат и обобщенных скоростей. Представляем кинетическую энергию в матричной форме:

$$T = \frac{1}{2}\dot{X}^T A \dot{X},$$

где $\dot{X}^T$ - транспонированный вектор $\dot{X}$. Составляем матрицу инерционных коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

3. Потенциальная энергия системы.

При движении тел работу совершают задаваемые силы тяжести и силы упругости. Потенциальную энергию системы в положении равновесия полагаем равной нулю. В силу аддитивности энергии представляем ее как сумму гравитационных энергий массивных тел и упругих энергий элементов Гука:

$$U = U_{grav} + U_{elast}\,.$$

Потенциальная энергия есть работа, совершаемая силой поля при возвращении объекта в пространстве обобщенных координат на поверхность нулевого уровня энергии. Поэтому

$$U_{grav} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2\,,$$

$$U_{elast} = \frac{c_1}{2}(\Delta_{1,t}^2 - \Delta_1^2) + \frac{c_2}{2}(\Delta_{2,t}^2 - \Delta_2^2) + \frac{c_3}{2}(\Delta_{3,t}^2 - \Delta_3^2)\,.$$

В выражении потенциальная энергия каждой пружины фигурирует разность квадратов деформаций в момент времени t и в положении равновесия. Тщательно выписываем деформации, например: $\Delta_{1,t}^2 = (x_1 - \Delta_1)^2$. С увеличением координаты x_1 пружина 1 растяивается, т.е. приобретает деформацию противоположного смысла, нежели Δ_1, которая, согласно договору, есть деформация сжатия. Имеем далее:

$$\Delta_{2,t}^2 = (x_2 - x_1 - \Delta_2)^2 = [(x_2 - x_1 - (\Delta_3 - \Delta_1)]^2,\;\; \Delta_{3,t}^2 = (x_2 - \Delta_3)^2\,.$$

Получаем слдующее выражение для потенциальной энергии:

$$U = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \frac{c_1}{2}\left((x_1 - \Delta_1)^2 - \Delta_1^2\right) +$$

$$+ \frac{c_2}{2}\left((x_2 - x_1 + \Delta_1 - \Delta_3)^2 - (\Delta_3 - \Delta_1)^2\right) + \frac{c_3}{2}\left((x_2 - \Delta_3)^2 - \Delta_3^2\right)$$

Упрощаем это выражение, раскрывая скобки и приводя подобные члены. В силу уравнений равновесия (5.5) коэффициенты при x_1 и x_2 в первой степени оказываются равными нулю, так что

$$U = \frac{c_1}{2}x_1^2 + \frac{c_2}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{c_3}{2}x_2^2 = \frac{c_1 + c_2}{2}x_1^2 - c_2 x_2 x_1 + \frac{c_2 + c_3}{2}x_2^2\,. \qquad (5.6)$$

Получили потенциальную энергию как квадратичную форму обобщенных координат. Представляем ее в матричном виде: $U = \frac{1}{2}X^T C X$, где матрица упругих коэффициентов имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. При сборке колебательного устройства (рис. 12) какие-то пружины могут оказаться растянутыми, какие-то - сжатыми. Абсолютные кординаты грузов могут отсчитываться вниз. Все равно после правильного учета балансов деформаций получим потенциальную энергию в виде (5.6).

Замечание 2. После вынесения коэффициента ½ в выражении (5.6) за скобки получим член квадратичной формы $-2c_2x_2x_1$, коэффициент которого поровну распределяем между соответствующими местами в матрице *C*.

4. Дифференциальные уравнния движния

В матричной форме дифференциальные уравнения движения записываются в виде:

$$A\ddot{X} + CX = 0.$$

В развернутой форме получаем:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + (c_2 + c_3)x_2 = 0 \end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 875x_1 - 375x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - 500x_1 + 833{,}33x_2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

5. Расчет собственных частот

Составляем частотное уравнение:

$$\det(C - \omega^2 A) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} 875 - \omega^2 & -375 \\ -500 & 833{,}33 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решаем это уравнение как квадратное относительно ω^2:

$$\left(\omega^2\right)^2 - 1708\omega^2 + 539664 = 0$$

и после извлечения корней получаем $\omega_1 = 20{,}5\dfrac{рад}{с}, \quad \omega_2 = 35{,}9\dfrac{рад}{с}$.

6. Ответы:

уравнения движения $\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 875x_1 - 375x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - 500x_1 + 833{,}33x_2 = 0 \end{aligned}\right\},$

собственные частоты $\omega_1 = 20{,}5\dfrac{рад}{с}, \quad \omega_2 = 35{,}9\dfrac{рад}{с}$.

3. Содержание дисциплины «Теоретическая механика»

Учебный модуль 1. Кинематика
Тема 1. Основные определения и понятия теоретической механики.
Тема 2. Кинематика точки. Векторный, координатный и естественный способы задания движения точки. Основы дифференциальной геометрии кривых.
Тема 3. Классификация движений твердого тела. Кинематика поступательного движения тела.
Тема 4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Простейшие передачи.
Тема 5. Сложное движение точки. Расчет скорости и ускорения точки.
Тема 6. Плоскопараллельное движение твердого тела. Кинематический анализ плоского механизма.
Тема 7. Сложение вращений твердого тела. Сферическое движение тела.
Тема 8. Движение свободного твердого тела в пространстве.
Учебный модуль 2. Основы динамики и статика твердого тела
Тема 9. Аксиомы Галилея-Ньютона динамики материальной точки.
Тема 10. Теоремы динамики.
Тема 11. Уравнения равновесия твердого тела. Приведение системы сил, действующих на твердое тело, к простейшему виду. Классификация систем сил.
Тема 12. Равновесие плоской системы сил. Реакции связей. Сочлененные конструкции. Статически определенные задачи.
Тема 13. Трение скольжения и сопротивление качению.
Тема 14. Равновесие пространственной системы сил.
Тема 15. Центр тяжести.
Учебный модуль 3. Динамика материальной точки и механической системы
Тема 16. Основные задачи динамики точки. Основные приемы интегрирования дифференциальных уравнений движения. Численное интегрирование дифференциальных уравнений движения и моделирование движения точки с помощью компьютера.
Тема 17. Три простейшие задачи теории колебаний. Свободные гармонические колебания механической системы с одной степенью свободы, затухающие и вынужденные колебания
Тема 18. Геометрия масс.
Тема 19. Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента механической системы. Динамика поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения твердого тела. Движение сочленённых тел. Определение ре-

акций связей. Физический маятник.
Тема 20. Работа силы. Потенциальное силовое поле.
Тема 21. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к решению задач динамики.
Тема 22. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела при его сферическом движении. Приближенная теория гироскопа. Динамика свободно движущегося твердого тела.
Тема 23. Теория удара. Коэффициент восстановления. Прямой удар двух тел. Удар по вращающемуся телу. Центр удара.
Тема 24. Принцип Даламбера. Динамика относительного движения материальной точки. Главный вектор и главный момент сил инерции. Метод кинетостатики.
Учебный модуль 4. Аналитическая механика
Тема 25. Классификация связей. Голономные системы. Принцип виртуальных (возможных) перемещений. Общее уравнение динамики механической системы.
Тема 26. Уравнения Лагранжа второго рода. Консервативные системы.
Тема 27. Устойчивость равновесия и движения. Теорема Лагранжа об изолированном положении равновесия.
Тема 28. Малые колебания консервативной механической системы вблизи положения устойчивого равновесия.

4. Вопросы к экзамену

1) Основные понятия теоретической механики: материальная точка, механическая система, твердое тело, система отсчета. Обобщенныее координаты и число стеепеней свободы мееханичской систмы. Механическое взаимодействие. Сила; характеристики ее действия. Проявления действия силы. Три раздела теоретической механики.
2) Связи внешние и внутренние. Ограничивающие и удерживающие связи. Уравнения связей. Обобщенные координаты механической системы. Число степеней свободы голономной механической системы. Изменение числа степеней свободы при наложении связей. Кинематические уравнения движения системы. Число степеней свободы материальной точки и твердого тела. Механизмы с одной или несколькими степенями свободы.
3) Векторный способ задания движения точки. Уравнение движения, векторы перемещения, средней и мгновенной скорости, среднего и мгновенного ускорения точки. Направление мгновенной скорости в данной точке траектории. Путь, пройденный точкой за заданный промежуток времени.
4) Естественный способ задания движения материальной точки. Уравнение движения. Секущая и касательная к траектории, соприкасающаяся плоскость. Оси касательной, нормали и бинормали к траектории. Естественный трехгранник. Проекции скорости и ускорения точки на оси трехгранника.
5) Классификация движений твердого тела: названия, определения, число степеней свободы и обобщенные координаты, кинематические уравнения движения.

6) Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Кинематическое уравнение движения. Определения векторов угловой скорости и углового ускорения. Формулы для расчета векторов скорости, нормального (центростремительного) и касательного (вращательного) ускорений точки тела в виде векторных произведений. Формулы для расчета модулей этих векторов.
7) Простейшие передаточные механизмы (зубчатая передача, ременная, цепная передача, передача винт-гайка). Передаточные соотношения между скоростями. Многоступенчатые редукторы угловой скорости. Передаточное число редуктора. Кинематическая схема нереверсивного коаксиального редуктора. Расчет угловой скорости и вращающего момента на выходном валу редуктора при установившемся его движении.
8) Плоскопараллельное движение твердого тела. Скорость точки плоской фигуры. Мгновенный центр скоростей (МЦС) точек плоской фигуры и способы определения его положения. Расчет скорости точки плоской фигуры с помощью построения МЦС. Построение плана скоростей точек плоского рычажного механизма.
9) Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей. Теорема о сложении угловых скоростей. Мгновенная ось вращения. Сферическое движение тела как сложное вращение. Углы Эйлера. Скорость и ускорение точки тела при его сферическом движении.
10) Движение свободного твердого тела как результат сложения поступательного и сферического его движений. Мгновенная угловая скорость и мгновенная ось вращения. Скорость точки тела. Вектор бесконечно малого поворота. Вектор бесконечно малого перемещения точки тела.
11) Две основные задачи динамики материальной точки. Описание процесса решения обратной (второй) задачи. Общее и частное решение системы дифференциальных уравнений движения. Определение постоянных интегрирования. Корректность постановки задачи Коши.
12) Интегрирование дифференциального уравнения (ДУ) движения материальной точки в случае, когда сила зависит от времени или постоянна. Задача о прицельном бомбометании. Решение задачи о теле, брошенном под углом к горизонту. Определение угла вертикальной наводки орудия по координатам цели.
13) Способы интегрирования дифференциальных уравнений движения матер. точки в случае, когда сила зависит от скорости точки.
14) Интегрирование дифференциальных уравнений движения матер. точки в случае действия силы, зависящей от положения точки. Интеграл энергии.
15) Движение материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной смещению из положения равновесия. Общее и частное решения дифф. уравнения свободных незатухающих гармонических колебаний. Круговая частота и период колебаний. Амплитуда и начальная фаза колебаний; их определение из начальных условий. График движения. Фазовый «портрет» гармонического осциллятора.
16) Упругая сила, подчиняющаяся закону Гука. Коэффициенты жесткости и податливости упругих элементов. Расчет эквивалентной жесткости системы упругих элементов при их параллельном и последовательном соединениях.
17) Движение материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной смещению точки от положения равновесия, и силы сопротивления, пропорциональной скорости точки. Построение общего решения дифференциального уравнения движения в зависимости от дискриминанта характеристического уравнения. Исследование свободных затухающих колебаний. Фазовый «портрет» осциллятора с демпфером.
18) Вынужденные колебания материальной точки под действием гармонической вынуждающей силы. Построение общего и частного решения. Свободные, сопровож-

дающие и чисто вынужденные колебания. Коэффициент динамичности. АЧХ колебательного звена.

19) Сила инерции, действующая на материальную точку. Принцип Даламбера. Уравнение кинетостатики точки. Основное уравнение динамики относительного движения материальной точки. Переносная и кориолисова сила инерции.
20) Классификация сил. Внешние и внутренние силы. Главный вектор и главный момент системы сил относительно заданного полюса. Главный вектор и главный момент системы внутренних сил. Понятие о связях в теоретической механике. Активные силы и реакции связей. Примеры реакций отдельных видов связей.
21) Количество движения материальной точки и механической системы. Теорема об изменении количества движения точки и системы в дифференциальной и интегральной форме. Центр масс механичской системы. Выражение количества движения через скорость центра масс. Закон движения центра масс.
22) Момент вектора (например, вектора силы) относительно полюса как векторное произведение. Величина и направление момента. Плечо вектора относительно полюса. Расчет момента вектора относительно начала декартовой системы координат по правилу символического определителя. Моменты относительно координатных осей.
23) Момент вектора относительно оси, проходящей через заданный полюс. Графоаналитический способ его расчета. Случаи равенства его нулю.
24) Моменты инерции твердого тела относительно полюса, оси и плоскости. Связь между моментами инерции относительно начала декартовой системы координат, координатных осей и плоскостей.
25) Кинетический момент материальной точки и механической системы относительно полюса и относительно оси. Доказательство теоремы об изменении кинетического момента материальной точки.
26) Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Момент инерции тела относительно оси. Динамическое уравнение вращательного движения твердого тела.
27) Исследование колебаний физического маятника вблизи положения устойчивого равновесия. Малые колебания маятника. Приведенная длина физичекого маятника. Оптимизация ударных реакций
28) Гироскоп. Приближенная теория гироскопа. Гироскопический момент: его величина и направление. Применение гироскопов в технике.
29) Доказательство теоремы Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции тела относительно двух параллельных осей, одна из которых – центральная.
30) Вывод формул для моментов инерции однородного стержня (пластины) относительно центральной оси и относительно оси, проходящей через конец стержня.
31) Вывод формул моментов инерции однородного тонкого обруча (трубы) и однородного диска (цилиндра).
32) Кинетический момент твердого тела, имеющего неподвижную точку, совпадающей с началом декартовой системы координат. Центробежные моменты инерции. Матрица инерции. Понятие о тензоре инерции тела. Главные и центральные оси инерции.
33) Удар материальной точки о неподвижную преграду. Коэффициент восстановления. Прямой удар двух тел. Расчет скоростей тел после удара. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удар.
34) Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Доказательство теоремы Кёнига о кинетической энергии.
35) Элементарная работа силы. Работа силы на «конечном» перемещении как криволинейный интеграл. Выражение для элементарной работы в декартовой системе координат. Мощность силы. Мощность сил, приложенных к вращающемуся твердому

телу. Выражение работы через мощность.

36) Мощность и элементарная работа сил, действующих на твердое тело. Элементарная работа при поступательном и мгновенно-вращательном движениях тела. Мощность и работа сил, приложенных к вращающемуся вокруг неподвижной оси телу.
37) Вывод формулы для работы постоянной силы тяжести.
38) Вывод формулы для работы упругой силы, подчиняющейся закону Гука.
39) Потенциальное силовое поле: определение и свойства его. Циркуляция и ротор вектора силы. Формулировка свойств поля с использованием символического оператора Гамильтона.
40) Потенциальная энергия материальной точки и механической системы. Расчет работы потенциальной силы при перемещении тела в потенциальном силовом поле. Обобщенные потенциальные силы.
41) Вывод теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы (в дифференциальной и интегральной форме).
42) Теорема Кёнига о кинетической энергии.
43) Вывод формул для кинетической энергии твердого тела при его поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях.
44) Кинетическая энергия твердого тела при его сферическом движении. Кинетическая энергия свободно движущегося тела.
45) Равновесие материальной точки, механической системы, твердого тела. Вывод уравнений равновесия твердого тела из теорем динамики механической системы.
46) Главный вектор и главный момент плоской системы сил. Система уравнений равновесия (три её формы). Графоаналитический расчет момента силы относительно полюса в плоской задаче статики. Статически определенные и статически неопределенные задачи.
47) Классификация систем сил, приложенных к твердому телу. Равнодействующая. Пара сил и ее момент. Инварианты статики твердого тела. Динама.
48) Законы Кулона «сухого» трения скольжения. Задача о страгивании тела с шероховатой поверхности. Угол трения, конус трения. Задача о теле на наклонной шероховатой плоскости. Трение тонкой гибкой нити о шероховатый цилиндр: формула Эйлера.
49) Сопротивление качению колеса по неподвижной направляющей. Приведение системы сил реакций направляющей к основанию вертикального диаметра и к равнодействующей. Момент сопротивления качению. Геометрическая интерпретация коэффициента сопротивления качению.
50) Центр тяжести (ЦТ) тела: определение ЦТ, формулы для расчета радиус-вектора и декартовых координат ЦТ. ЦТ однородного симметричного тела. ЦТ однородного трехмерного тела, плоской фигуры, нити. Метод отрицательных объемов.
51) Главный вектор и главны момент сил инерции. Уравнения кинетостатики твердого тела.
52) Связи стационарные и реономные, позиционные и дифференциальные. Голономные механические системы.
53) Виртуальные (возможные) перемещения точек голономной механической системы. Понятие о вариации функции (функционала). Идеальные связи.
54) Принцип виртуальных (возможных) перемещений для голономной механич. системы, подчиненной идеальным связям.
55) Обобщенные координаты и обобщенные скорости голономной системы. Обобщенные задаваемые силы. Обобщенные потенциальные силы. Условия равновесия механической системы в терминах обобщенных сил.
56) Общее уравнение динамики системы; его запись в терминах обобщенных сил. системы. Методика применения общего уравнения динамики системы для решения задач.

57) Представление обобщенных сил инерции через производные от кинетической энергии Вывод уравнений Лагранжа второго рода из общего уравнения динамики системы.
58) Функция Лагранжа. Вид уравнений Лагранжа второго рода в случае, когда задаваемые силы являются потенциальными. Методика составления уравнений Лагранжа.
59) Структура выражения для кинетической энергии как функции обобщенных координат и скоростей при стационарных связях. Разложение в ряд Тейлора потенциальной энергии в окрестности положения устойчивого равновесия консервативной механической системы. Составление дифференциальных уравнений малых колебаний системы вблизи этого положения. Матричная запись системы уравнений. Вековое (частотное) уравнение.
60) Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. Вывод уравнений Лагранжа второго рода из принципа Гамильтона.

5. Учебная литература

а) Основная учебная литература

1. Красюк А.М. Сборник заданий для расчетно-графических работ по теоретической механике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Красюк А.М., Рыков А.А.— Электрон. текстовые данные.— Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013.— 164 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45433.

2. Вронская Е.С. Основы аналитической механики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Вронская Е.С., Павлов Г.В., Элекина Е.Н.— Электрон. текстовые данные.— Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.— 110 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20493.

3. Усов, А. Г. Теоретическая механика. Опорный конспект лекций. Ч 2. [Электронный ресурс]: учебное пособие /А.Г. Усов. – СПб.: СПГУТД, 2011. – 67 с. – Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=908.

б) Дополнительная учебная литература

1. *Щербакова, Ю.В.* Теоретическая механика: учебное пособие / Ю.В. Щербакова— С.: Научная книга, 2012. - 159 с. http://www.iprbookshop.ru/6345

2. *Козинцева, С.В.* Теоретическая механика: учебное пособие / С.В.Козинцева, М.Н.Сусин— С.: Ай Пи Эр Медиа, 2012. - 152 с. http://www.iprbookshop.ru/728

3. Применение информационных технологий при решении задач теоретической механики. Кинематика точки [Электронный ресурс] : методические указания к самостоятельной работе и выполнению домашних заданий для студентов СПГУТД всех специальностей / СПГУТД ; сост. А. Г. Усов. - СПб. : СПГУТД, 2011. - 13 с. – Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=909.

4. Компьютерные методы решения задач по кинематике сложного движения точки и плоского движения твердого тела [Электронный ресурс] : методические указания / сост. А. Г. Усов. - СПб. : СПГУТД, 2013. - 25 с. – Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=1285