Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 1

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(8,6,4),\quad A_2(10,5,5),\quad A_3(5,6,8),\quad A_4(8,10,7)$$

Задача 2. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудаленную от двух заданных точек $A(1,1)$ и $B(3,0)$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{1},\qquad A(4,2,-1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(1,2,3),\qquad \frac{x-0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1\\2&1&-1&-1&1\\1&7&-5&-5&5\\3&-1&-2&1&-1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&1&3&1\\1&1&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\0&-1&1\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}3&1\\1&-1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&1&2\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}2&2\\-1&1\\0&1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(-2,1,1)$, $a_2=(0,3,3)$, $a_3=(2,0,-2)$, $d=(2,4,0)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(2,3,4)$, $a_3=(3,2,3)$, $a_4=(1,1,1)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix}3&2&4&1&2\\3&2&-2&1&0\\3&2&16&1&6\end{pmatrix}$$

Задача 11 а) Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости xOz, а затем сжатие по оси Oy в два раза. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ \alpha & 2 & \gamma \\ \beta & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 = 24$;
2) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.
Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Доказать, что если существует гомоморфизм групп $\varphi : G_1 \to G_2$, то для любой группы H существует гомоморфизм $G_1 \times H \to G_2 \times H$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_{16}^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{Z}$ с операцией умножения матриц?

Задача 18. Пусть $\langle G_1, \cdot \rangle$ — группа всех чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, где хотя бы одно из чисел a, b отлично от 0, с операцией обычного умножения, а $\langle G_2, \cdot \rangle$ — группа всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, где также $a, b \in \mathbb{Q}$, с операцией матричного умножения. Верно ли, что $G_1 \simeq G_2$?

Задача 19. Является ли подгруппа группы S_3, порожденная подстановкой (123), нормальной подгруппой?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $408x \equiv 95 (\operatorname{mod} 451)$;
б) $279x \equiv 855 (\operatorname{mod} 1476)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 2

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(4,6,5), \quad A_2(6,9,4), \quad A_3(2,10,10), \quad A_4(7,5,9)$$

Задача 2. Составить уравнение диаметра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-1,1)$, $B(2,-1)$, $C(4,0)$, проходящего через точку A.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}, \qquad A(2,3,0)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(-3,0,1), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 15 & 48 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX = Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX = Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX = K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX = K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1 = (-1,-1,-1)$, $a_2 = (0,1,-1)$, $a_3 = (-1,2,2)$, $d = (-4,1,-3)$. Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1 = (2,-1,0,0)$, $a_2 = (4,-6,2,0)$, $a_3 = (6,-7,2,0)$, $a_4 = (4,-1,4,3)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX = 0$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -15 & 13 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости $y = -x$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 6 & \gamma & 6 \\ 4 & 6 & \alpha \\ \beta & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $8x^2 + 2\sqrt{7}xy + 2y^2 = 81$;
2) $2x^2 + 5y^2 + +4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 14$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — группа, $H_1 \leqslant G$, $H_2 \leqslant G$. Доказать, что если $|H_1| = 45$ и $|H_2| = 98$, то $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: симметрическая группа S_3 относительно умножения подстановок.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \{a, bi\}, \cdot \rangle$, где $a, b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$?

Задача 18. Найти все возможные гомоморфизмы группы C_{17} в подгруппу группы C_{20}.

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{100}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $1564x \equiv 247 (\bmod 451)$;
б) $246x \equiv 114 (\bmod 486)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 3

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(10,6,6),\quad A_2(-2,8,2),\quad A_3(6,8,9),\quad A_4(7,10,3)$$

Задача 2. При каком значении C прямая $15x+17y+C=0$ будет проходить через точку пересечения прямых $2x+3y-5=0$ и $7x-8y+1=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{2},\qquad A(2,-3,0)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(0,1,-2),\quad 2x+y-3z+7=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 9 & 8\\ 3 & 2 & -1 & 8 & 6\\ 2 & 1 & -1 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 3 & 13 & 14\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1\\ 4 & 3 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 1\\ -3\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 2 & 2\\ 1 & -5\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 3\\ -5\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(0,1,1)$, $a_2=(2,2,0)$, $a_3=(3,1,1)$, $d=(11,7,5)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(-1,2,-3,3,1)$, $a_2=(2,1,-1,1,-1)$, $a_3=(3,1,-1,2,-2)$, $a_4=(-3,2,-3,1,3)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12\\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8\\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости yOz, а затем проектирование на плоскость xOy.
б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} \frac12 & 0 & \frac12\\ 0 & 1 & 0\\ \frac12 & 0 & \frac12\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 6 & -2 & \gamma \\ \beta & 5 & 0 \\ 2 & \alpha & 7 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $7x^2 + 2\sqrt{6}xy + 2y^2 = 24$;
2) $-3x^2 + 4xy - 3y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 5 & 12 & -19 \\ 4 & 8 & -13 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1 и G_2 группы, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. Известно, что $|g_1| = 21$, а $|g_2| = 35$. Чему равен порядок элемента (g_1, g_2) в группе $G_1 \times G_2$?
Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(всего восемь матриц) относительно умножения.

Задача 17. Является ли кольцом следующая алгебраическая система: множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -3y & x \end{pmatrix}$$

где $x, y \in \mathbb{Q}$ относительно сложения и умножения матриц?

Задача 18. Найти все подгруппы группы C_{340}.
Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $441x \equiv 89 (\mathrm{mod}\, 451)$;
б) $335x \equiv 95 (\mathrm{mod}\, 775)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 4

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(6,6,5), \quad A_2(4,9,5), \quad A_3(4,6,11), \quad A_4(6,9,3)$$

Задача 2. Через точку пересечения прямых $4x-5y+9=0$ и $x+4y-3=0$ провести прямую, перпендикулярную прямой $3x-4y+9=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{7}, \qquad A(1,1,-2)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(1,-2,3), \quad 7x+y-z-53=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & -4 & -2 & -2 & 10 \\ 5 & -4 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(-4,-8,5)$, $a_2=(-3,-6,9)$, $a_3=(-6,-7,5)$, $d=(-11,-22,19)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(4,-2,6,0)$, $a_2=(1,-2,0,7)$, $a_3=(3,-4,6,7)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости $z=x$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \alpha \\ \beta & 2 & 0 \\ -2 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $15x^2 + 6\sqrt{3}xy + 9y^2 = 36$;
2) $5x^2 - 2xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \frac{3}{4} = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -11 \\ 1 & 5 & -10 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — группа, $H_1 \leqslant G$, $H_2 \leqslant G$. Верно ли, что $H_1 \cup H_2 \leqslant G$? Ответ обосновать.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа A_3 всех четных подстановок степени три относительно умножения подстановок.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, где операция "$*$" опеределена по правилу $a * b = a + b + a^2 b^2$?

Задача 18. Описать множество всех делителей нуля в кольце матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathbb{R}$.

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $241x \equiv 25 (\bmod 473)$;
б) $248x \equiv 156 (\bmod 404)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 5

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(8,6,4), \quad A_2(10,5,5), \quad A_3(5,6,8), \quad A_4(8,10,7)$$

Задача 2. При каком значении m прямые $(m-1)x+my-5=0$ и $mx+(2m-1)y+7=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс?

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{7}=\frac{z-2}{3}, \qquad A(-1,3,1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(4,-1,-5), \quad 3x-y-4z-7=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 4 & -1 & 1\\ 11 & 4 & 56 & 5 & 15\\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 5 & 8\\ 1 & 4 & 9 & 18 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 0\\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 1\\ -2 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(2,3,1)$, $a_2=(4,-1,-5)$, $a_3=(-1,3,7)$, $d=(5,10,2)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(1,0,0,-8,3,2)$, $a_2=(-1,4,0,2,6,8)$, $a_3=(3,2,5,1,0,4)$, $a_4=(2,6,5,3,6,12)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия относительно начала координат и растяжения по оси Ox в α раз, по оси Oy в β раз, по оси Oz в γ раз. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & \beta & -1 \\ -1 & -1 & \gamma \\ \alpha & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 = 36$;
2) $x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1 и G_2 — группы. Доказать, что если $H_1 \leqslant G_1$ и $H_2 \leqslant G_2$, то $H_1 \times H_2 \leqslant G_1 \times G_2$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_7^*$.

Задача 17. Является ли кольцом следующая алгебраическая система: множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$ относительно матричного сложения и умножения?

Задача 18. Является ли гомоморфизмом групп (относительно операций умножения) отображение $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, где f определено по правилу $f(z) = 2|z|$? Ответ обосновать.

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $123x \equiv 17 (\bmod 155)$;
б) $245x \equiv 61 (\bmod 295)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 6

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,1,4), \quad A_2(-1,6,1), \quad A_3(1,7,3), \quad A_4(8,5,8)$$

Задача 2. Найти точку Q, симметричную точке $P(1,-2)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+7}{-2}, \qquad A(-3,6,1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(2,1,0), \quad \frac{x-2}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z+0,5}{1}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(2,0,-1)$, $a_2=(3,0,1)$, $a_3=(4,3,3)$, $d=(11,3,-3)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(2,1,-3,1)$, $a_2=(4,2,-6,2)$, $a_3=(6,3,-9,3)$, $a_4=(1,1,1,1)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -5 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости $z=y$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ \alpha & -1 & -2 \\ \beta & \gamma & -2 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $4x^2 + 24xy + 11y^2 = 20$;
2) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 20 \\ 1 & 1 & 2 \\ -11 & -6 & -15 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Доказать, что если существует гомоморфизм групп $\varphi : G_1 \to G_2$, то для любой группы H существует гомоморфизм $H \times G_1 \to H \times G_2$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_6$ относительно сложения.

Задача 17. Является ли кольцом следующая алгебраическая система: $\langle \{a + b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot \rangle$?

Задача 18. Изоморфны ли группы $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ и C_n? Ответ обосновать.

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $841x \equiv 422 (\bmod 961)$;
б) $578x \equiv 286 (\bmod 1476)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 7

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,5,4), \quad A_2(5,8,3), \quad A_3(1,9,9), \quad A_4(6,4,8)$$

Задача 2. Через точки $A(2,1)$ и $B(5,3)$ проведена прямая. Найти основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+4}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}, \qquad A(2,1,-4)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(-1,3,-2), \quad \frac{x+0,5}{2}=\frac{y+0,5}{1}=\frac{z+2}{0}.$$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(2,2,3)$, $a_2=(1,2,-3)$, $a_3=(2,4,-1)$, $d=(4,6,7)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(4,-1,0,0)$, $a_2=(5,0,-3,0)$, $a_3=(6,0,0,-4)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & -8 \\ 3 & -4 & -12 & 18 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость xOy и поворот проекции на 45° в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.
б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ \gamma & \beta & 5 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $2x^2 - 2\sqrt{10}xy + 11y^2 = 10$;
2) $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & 10 & -2 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1, G_2 — группы, e — единица группы G_1. Доказать, что $\{e\} \times G_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(всего четыре матрицы) относительно умножения.

Задача 17. Является ли кольцом следующая алгебраическая система: Множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix},$$

где $x, y \in \mathbb{Q}$, относительно матричного сложения и умножения?

Задача 18. Найти все возможные гомоморфизмы группы C_{20} в подгруппу группы C_{15}.

Задача 19. Является ли подгруппа S_3, порожденная подстановкой $(12)(3)$ нормальной подгруппой S_3?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $529x \equiv 135 (\bmod\, 729)$;
б) $792x \equiv 221 (\bmod\, 873)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 8

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(9,5,5), \quad A_2(-3,7,1), \quad A_3(5,7,8), \quad A_4(6,9,2)$$

Задача 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x+7y+10=0$ и $3x-2y-10=0$, и перпендикулярной прямой $3x-2y+15=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}, \qquad A(5,0,4)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(2,-3,0), \quad 3x+y-z+8=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} -18 \\ 12 \end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix} 31 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(4,8,-5)$, $a_2=(-2,1,0)$, $a_3=(3,11,-1)$, $d=(1,22,-6)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(2,1,0,-1,-2)$, $a_2=(1,1,1,1,1)$, $a_3=(2,0,-2,-4,-6)$, $a_4=(1,-1,2,-2,0)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 9 & -4 \\ 7 & 12 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости $z=-x$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 4 & \alpha & -4 \\ 0 & \gamma & 6 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 = 21$;
2) $15x^2 - 2\sqrt{55}xy + 9y^2 + 4\sqrt{11}x - 4\sqrt{5}y - 20 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 14 \\ -1 & 1 & -1 \\ -7 & -4 & -8 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть R — кольцо, $R_1 \leqslant R$ и $R_2 \leqslant R$. Верно ли, что $R_1 \cap R_2 \leqslant R$?

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_{10}^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, где операция "$*$" определена по правилу $a * b = a^2 b^4$?

Задача 18. Описать смежные классы группы $\langle \mathbb{C}, + \rangle$ по подгруппе $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.

Задача 19. Совпадает ли подгруппа S_4, порожденная подстановками $(12)(3)(4)$ и $(1)(23)(4)$ со всей группой?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $625x \equiv 83 \pmod{841}$;
б) $728x \equiv 51 \pmod{1404}$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 9

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(5,5,4),\quad A_2(3,8,4),\quad A_3(3,5,10),\quad A_4(5,8,2)$$

Задача 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(-6,-4)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $A(-10,-1)$ и $C(6,1)$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{5},\qquad A(-2,4,2)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(-2,5,0),\quad 2x-y+z+3=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1\\ 4 & 8 & 18 & 7\\ 10 & 18 & 40 & 17\\ 1 & 7 & 17 & 3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 1\\ 4\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(4,3,0)$, $a_2=(1,7,2)$, $a_3=(7,-1,27)$, $d=(30,10,83)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(3,-2,4,0)$, $a_2=(6,-4,0,2)$, $a_3=(9,-6,4,2)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 11 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость yOz и поворот проекции на 30° в положительном направлении относительно орта $\vec{\imath}$. Найти матрицу линейного преобразования.
б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

$$\Phi=\begin{pmatrix} 3 & 4 & \gamma \\ \beta & 4 & 3 \\ 4 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α,β,γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'}=e_1-e_2+e_3$, $e_2^{'}=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3^{'}=-e_1+2e_2+e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x,y,z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $6x^2-4xy+9y^2=40$;
2) $9x^2+24xy+16y^2-90x+5y=125$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ -3 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Верно ли, что для любых групп G_1 и G_2 группы $G_1\times G_2$ и $G_2\times G_1$ изоморфны?

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $G\leqslant A_5$, состоящая из всех четных подстановок φ таких, что $\varphi(x)\in\{1,2,3\}$, если $x\in\{1,2,3\}$ и $\varphi(x)\in\{4,5\}$, если $x\in\{4,5\}$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle\mathbb{Q},*\rangle$, где операция "$*$" определена по правилу $a*b=\dfrac{ab}{2}$?

Задача 18. Пусть $G=\langle\{2^n|n\in\mathbb{Z}\},\cdot\rangle$. Верно ли, что $G\simeq\langle\mathbb{Z},+\rangle$?

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{83}.$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $679x\equiv 273 (\mathrm{mod}\, 1416)$;
б) $715x\equiv 527 (\mathrm{mod}\, 806)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 10

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(7,5,3),\quad A_2(9,4,4),\quad A_3(4,5,7),\quad A_4(7,9,6)$$

Задача 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-1)$ параллельно прямой, проходящей через точки $B(8,7)$ и $C(-10,4)$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1},\qquad A(2,3,3)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(0,-3,-2),\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z}{1}.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&7&1\\3&2&18&1\\7&4&40&8\\1&-1&1&2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&-1&-4&-10\\1&5&12&24\\1&4&9&18\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\3&5&0\\1&3&4\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-3&7\\2&-3\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-1&1&5\\2&1&-7\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}1&2\\2&-3\\-1&3\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(2,1,-1)$, $a_2=(1,-2,1)$, $a_3=(1,2,-3)$, $d=(0,9,-7)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(3,7,6,-2,0)$, $a_2=(-1,5,0,-1,0)$, $a_3=(4,2,6,-1,0)$, $a_4=(1,0,0,5,4)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\2&1&-1&2\\3&-2&-1&1\\2&-5&1&-2\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия относительно плоскости $z=-y$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -4 & 4 \\ 4 & \gamma & -2 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $9x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 = 20$;
2) $4x^2 + 24xy + 11y^2 - 8x - 24y - 16 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1 и G_2 — группы. Доказать, что если $H_1 \trianglelefteq G_1$ и $H_2 \trianglelefteq G_2$, то $H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$.

Задача 16. Построить таблицы Кэли для сложения и умножения для следующего кольца: кольцо $\mathbb{Z}_5$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Z}, \oplus \rangle$, где операция "$\oplus$" определена по правилу $a \oplus b = \dfrac{a+b}{2}$?

Задача 18. Верно ли, что $S_3 \trianglelefteq S_4$?

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $874x \equiv 221 (\bmod 1147)$;
б) $945x \equiv 286 (\bmod 1456)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 11

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(1,8,0), \quad A_2(0,-4,5), \quad A_3(-5,7,8), \quad A_4(1,4,3)$$

Задача 2. Дан треугольник $A(-2,3)$, $B(1,2)$, $C(5,4)$. Найти уравнение его высоты, опущенной из вершины C.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{7}, \qquad A(2,2,1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(-1,-2,1), \quad \frac{x+0,5}{1}=\frac{y-0,5}{-1}=\frac{z}{1}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 2 \\ 4 & 3 & -6 & 3 \\ 7 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1=(0,1,-1)$, $a_2=(1,2,0)$, $a_3=(-2,2,0)$, $d=(1,4,-2)$. Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(1,2,3,4)$, $a_2=(2,3,4,5)$, $a_3=(3,4,5,6)$, $a_4=(4,5,6,7)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость xOz и поворот проекции на 60° в положительном направлении относительно орта $\vec{j}$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ \gamma & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 = 22$;
2) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1 и G_2 группы. Верно ли, что если $H_1 \trianglelefteq G_1$, то $H_1 \times G_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$?

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_{14}^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, * \rangle$, где операция "$*$" определена по правилу $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$?

Задача 18. Доказать, что для любого $a \in \mathbb{R} : *$ отображение $f : x \to xa$ является изоморфизмом группы действительных чисел (с операцией сложения) в себя.

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{102}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $566x \equiv 371 (\mathrm{mod}\, 677)$;
б) $485x \equiv 199 (\mathrm{mod}\, 679)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 12

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(-1,0,7),\quad A_2(5,3,9),\quad A_3(3,8,5),\quad A_4(1,3,1)$$

Задача 2. Через точку пересечения прямых $x+2y-6=0$, $2x-y-5=0$ провести прямую, параллельную прямой $3x-4y+9=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{-7},\qquad A(1,-1,-4)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(-3,5,3),\quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 2 & -1 & -1\\ -1 & 5 & 4 & -1 & -1\\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & -2\\ 2 & 2 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3\\ 2 & 2 & -4\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4\\ -3 & 1 & -5\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix} -3 & 1\\ 1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} -2\\ 1\end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix} 5\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(4,3,0)$, $a_2=(1,7,2)$, $a_3=(6,-8,25)$, $d=(11,27,6)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1(2,0,5,-1)$, $a_2=(1,2,0,-4)$, $a_3=(3,2,5,-5)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -2\\ 5 & 1 & 1 & -1\\ 3 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 8 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость $y=x$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & -4 \\ 2 & 4 & \gamma \\ \beta & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $5x^2 + 26xy + 5y^2 = 72$;
2) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 8 & -12 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — группа и $g \in G$ такой, что $|g| = 49$. Найти $|g^2|$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: $\mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_9^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Q}, \oplus \rangle$, где операция "$\oplus$" определена по правилу $a \oplus b = \dfrac{a+b}{2}$?

Задача 18. Дана группа T_4 всех симметрий квадрата. Верно ли, что подгруппа порожденная одним из зеркальных отражений является нормальной подгруппой в T_4?

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{137}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $432x \equiv 73 (\bmod 491)$;
б) $333x \equiv 303 (\bmod 459)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 13

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,4,0), \quad A_2(3,10,8), \quad A_3(0,0,5), \quad A_4(-1,0,2)$$

Задача 2. Определить, при каком значении m прямые $mx+2y+5=0$ и $2x+my-3=0$ перпендикулярны.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{0}, \qquad A(2,-1,5)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(-1,3,2), \quad 5x-y+2z-11=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(1,-1,1)$, $a_2=(3,0,0)$, $a_3=(5,4,2)$, $d=(7,-1,7)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(1,2,3,4,5)$, $a_2=(2,3,4,5,6)$, $a_3=(3,4,5,6,7)$, $a_4=(3,5,7,9,11)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & -2 & 1 \\ 1 & 11 & -12 & -34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на ось Oz и поворот проекции на 45° в плоскости xOz по часовой стрелке относительно орта $\vec{j}$. Найти матрицу линейного преобразования.
б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \gamma \\ \alpha & -2 & 2 \\ -2 & \beta & -2 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $3x^2 - 2\sqrt{5}xy - y^2 = 8$;
2) $5x^2 - 2xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \frac{5}{4} = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 7 \\ 12 & 4 & -10 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть R — кольцо, $I_1 \trianglelefteq R$, $I_2 \trianglelefteq R$. Верно ли, что $I_1 \cap I_2 \in R$? Ответ обосновать.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_5^*$.

Задача 17. Является ли кольцом следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Q}, \oplus, * \rangle$, где операция "$*$" определена по правилу $a * b = a + b + ab$, а операция "$\oplus$" — по правилу $a \oplus b = a + b + 1$?

Задача 18. Верно ли, что фактор-группа $3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ с операцией сложения изоморфна группе C_6?

Задача 19. Совпадает ли подгруппа S_4, порожденная подстановками $(12)(3)(4)$ и $(1)(2)(34)$ со всей группой?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $251x \equiv 49 (\mathrm{mod}\, 288)$;
б) $276x \equiv 66 (\mathrm{mod}\, 312)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 14

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,-2,0), \quad A_2(5,2,4), \quad A_3(8,9,3), \quad A_4(-5,5,-1)$$

Задача 2. Дана прямая $5x - y + 7 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,1)$ под углом 45° к данной прямой ($k > 0$).

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}, \qquad A(0,2,1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(5,10,1), \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{1}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX = Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX = Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX = K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX = K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1 = (1,2,4)$, $a_2 = (3,1,4)$, $a_3 = (-1,-7,9)$, $d = (2,-11,26)$. Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1 = (1,2,6,8)$, $a_2 = (1,2,0,0)$, $a_3 = (1,2,3,4)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX = 0$.

$$R = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость $y = z$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -4 & \alpha & 2 \\ 2 & -5 & 0 \\ \beta & \gamma & -3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $2x^2 - 2\sqrt{10}xy - 7y^2 = 48$;
2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -7 \\ -4 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1, G_2 — группы, $H \leqslant G_1$. Верно ли, что $H \times G_2 \leqslant G_1 \times G_2$?

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_4^* \times \mathbb{Z}_5^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle\{3^a 5^b |, a, b \in \mathbb{Z}\}, \cdot\rangle$?

Задача 18. Является ли гомоморфизмом групп (с операциями умножения) отображение $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, где f определено по правилу $f(z) = 1 + |z|$? Ответ обосновать.

Задача 19. Является ли подгруппа A_4, порожденная подстановками $(12)(34)$, $(13)(24)$ и $(14)(23)$ нормальной подгруппой A_4?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $507x \equiv 275 (\mathrm{mod}\, 578)$;
б) $616x \equiv 819 (\mathrm{mod}\, 1701)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 15

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,4,-1), \quad A_2(-2,3,3), \quad A_3(2,4,-3), \quad A_4(1,2,3)$$

Задача 2. Определить точку пересечения прямой, проходящей через точки $A(2,-2)$ и $B_2(3,-5)$ с осью OY.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}, \qquad A(4,3,1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(1,1,1), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & 40 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & -4 \\ 2 & 1 & 11 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX = Y$ методом Крамера и систему $CX = Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX = K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX = K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1 = (2,-1,-1)$, $a_2 = (-3,3,3)$, $a_3 = (-3,2,4)$, $d = (-11,11,15)$. Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1 = (3,2,0,-1,0)$, $a_2 = (4,3,-1,2,0)$, $a_3 = (5,0,0,-3,5)$, $a_4 = (1,-1,2,4,3)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX = 0$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на ось Ox и поворот проекции на 30° в плоскости xOy по часовой стрелке относительно орта $\vec{k}$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \beta \\ \gamma & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $5x^2 + 4\sqrt{2}xy + 3y^2 = 14$;
2) $4xy + 4x - 4y = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G группа, G_1 и G_2 — ее подгруппы. Доказать, что если $H_1 \leqslant G_1$ и $H_2 \leqslant G_2$, то $H_1 \cap H_2 \leqslant G_1 \cap G_2$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_5^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$?

Задача 18. Верно ли, что кольцо матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, изоморфно кольцу $\mathbb{C}$? Верно ли, что кольцо матриц указанного вида является полем?

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{103}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $529x \equiv 321 (\mathrm{mod}\, 961)$;
б) $1080x \equiv 784 (\mathrm{mod}\, 1456)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 16

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,1,3), \quad A_2(1,-3,1), \quad A_3(2,0,4), \quad A_4(-1,3,1)$$

Задача 2. Даны точки $A(3,-5)$, $B(-5,-1)$, $C(2,-7)$, $D(6,1)$. Составить уравнение прямой, проходящей через середины отрезков AB и CD.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}, \qquad A(-2,4,2)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(-1,3,-1), \quad \frac{x-0,5}{1} = \frac{y+0,5}{-2} = \frac{z+1,5}{3}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 5 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX = Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX = Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX = K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX = K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1 = (-1,0,-2)$, $a_2 = (2,1,4)$, $a_3 = (0,1,5)$, $d = (4,5,18)$.
Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1 = (1,2,0,0)$, $a_2 = (1,2,3,4)$, $a_3 = (3,6,0,0)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX = 0$.

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость $z = x$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \gamma \\ -2 & 1 & \beta \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $-x^2 - 2y^2 + 2\sqrt{6}xy = 64$;
2) $57x^2 - 48xy + 43y^2 - 180x + 10y = 50$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 5 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1 и G_2 группы. Верно ли, что если $H_2 \trianglelefteq G_2$, то $G_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$?

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_5$ относительно сложения.

Задача 17. Является ли кольцом следующая алгебраическая система: множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ относительно матричного сложения и умножения?

Задача 18. Дана группа T_3 всех симметрий равностороннего треугольника. Верно ли, что подгруппа порожденная одним из поворотов является нормальной подгруппой в T_3?

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{100}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $729x \equiv 196 (\mathrm{mod}\, 841)$;
б) $616x \equiv 105 (\mathrm{mod}\, 637)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 17

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(-5,1,3), \quad A_2(-3,2,4), \quad A_3(-4,3,4), \quad A_4(-2,2,2)$$

Задача 2. На прямой, проходящей через точки $A(2,-3)$ и $B(5,1)$ найти точку у которой абсцисса в два раза больше ординаты.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{0}, \qquad A(0,4,-2)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(2,-1,1), \quad 3x+y-z+7=0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX = Y$ методом Крамера и систему $CX = Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX = K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX = K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1 = (1,2,4)$, $a_2 = (-1,3,4)$, $a_3 = (-5,-5,9)$, $d = (-14,-8,39)$. Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1(-3,2,0,5)$, $a_2 = (-3,6,-1,4)$, $a_3 = (0,4,-1,1)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX = 0$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -4 & -1 \\ 5 & -8 & -6 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на ось Oy и поворот проекции на 60° в плоскости yOz по часовой стрелке относительно орта $\vec{i}$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 7 & \beta & \alpha \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & \gamma & 5 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 5y^2 = 40$;
2) $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 10 & -11 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Доказать, что для любых элементов a, b, c, d группы G элементы $abcd$ и $cdab$ имеют одинаковый порядок.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_{24}^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество всех функций $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ относительно операции суперпозиции?

Задача 18. Дана группа T всех симметрий ромба. Верно ли, что подгруппа порожденная одним из зеркальных отражений является нормальной подгруппой в T?

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $552x \equiv 440 (\mathrm{mod}\, 1085)$;
б) $465x \equiv 230 (\mathrm{mod}\, 1105)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 18

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(4,4,10),\quad A_2(7,10,2),\quad A_3(2,8,4),\quad A_4(9,6,9)$$

Задача 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1,7)$ и середину отрезка, соединяющего точки $B(3,4)$ и $C(15,8)$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{1},\qquad A(2,-3,-1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(-2,3,1),\quad 3x-2y-z-1=0.$$

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-2&1&-1\\2&-1&7&-3&5\\1&3&-2&5&-7\\3&-2&7&-5&8\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-5&-1\\3&-2&4\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0\\2\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-1&0&3\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\\0&1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(-1,-2,-4)$, $a_2=(-4,-8,5)$, $a_3=(-1,3,4)$, $d=(-12,-19,2)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(2,2,1,4)$, $a_2=(3,-1,1,-2)$, $a_3=(-4,4,-1,8)$, $a_4=(3,1,1,2)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix}2&-1&3&-1&-1\\1&5&-1&1&2\\1&16&-6&4&7\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость $y=-x$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \beta \\ \alpha & 3 & 1 \\ 3 & \gamma & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $4xy + 3y^2 = 36$;
2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 42 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1, G_2 — группы, e — единица группы G_2. Доказать, что $G_1 \times \{e\} \trianglelefteq G_1 \times G_2$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_9^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \{3^a 7^b | a, b \in \mathbb{Z}\}, \cdot \rangle$?

Задача 18. Дана группа T_3 всех симметрий равностороннего треугольника. Верно ли, что подгруппа порожденная одним из зеркальных отражений является нормальной подгруппой в T_3?

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{150}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $651x \equiv 136 (\mathrm{mod}\, 940)$;
б) $1653x \equiv 582 (\mathrm{mod}\, 1353)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 19

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,5,4),\quad A_2(8,7,4),\quad A_3(5,10,4),\quad A_4(4,7,8)$$

Задача 2. На продолжении отрезка AB с координатами $A(-5,5)$, $B(1,-4)$ найти точку, абсцисса которой равна 9.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{9},\qquad A(5,-6,10)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(-2,3,1),\quad 2x-3y+2z-6=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2\\ 10 & 2 & 0 & 13 & 4\\ 6 & 2 & 2 & 8 & 3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 2 & -5\\ 3 & 1 & 3 & 0\\ 6 & 1 & 4 & 18\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 2\\ 8\\ 8\\ -4\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(2,3,1)$, $a_2=(4,1,3)$, $a_3=(-6,-2,4)$, $d=(-6,0,12)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(2,2,-2,-4)$, $a_2=(5,2,-3,1)$, $a_3=(4,1,-2,3)$, $a_4=(3,4,-1,2)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ -2 & -3 & -4 & -5 & -6\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость $x=y$, а затем растяжение по оси Oy в два раза. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \gamma \\ \alpha & 2 & 2 \\ 2 & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $7x^2 - 24xy = 144$;
2) $3x^2 - 2\sqrt{5}xy - y^2 - 2\sqrt{5}x - 2y - 9 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1, G_2 — группы, $H \leqslant G_2$. Верно ли, что $G_1 \times H \leqslant G_1 \times G_2$?

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_8$ относительно сложения.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Z} \backslash \{0\}, \cdot \rangle$?

Задача 18. Является ли гомоморфизмом групп (с операциями умножения) отображение $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, где f определено по правилу $f(z) = \dfrac{1}{|z|}$? Ответ обосновать.

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $835x \equiv 430 (\bmod 953)$;
б) $414x \equiv 96 (\bmod 756)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 20

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(1,8,2), \quad A_2(5,2,6), \quad A_3(5,7,4), \quad A_4(4,10,9)$$

Задача 2. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками $A(-8,-6)$ и $B(-3,-1)$ и имеющая абсциссу $x=5$?

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-7}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{-3}, \qquad A(3,-3,-5)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(1,0,-1), \quad \frac{x-3,5}{2}=\frac{y-1,5}{2}=\frac{z}{0}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & -5 & 4 & 4 \\ 3 & 16 & -9 & 7 & 6 \\ 1 & 7 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ 10 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(-1,1,1)$, $a_2=(1,2,1)$, $a_3=(3,2,3)$, $d=(1,3,-1)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1(3,-4,1,2)$, $a_2=(1,2,3,-4)$, $a_3=(2,3,-4,1)$, $a_4=(2,-5,8,-3)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость $z=-y$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \beta & 2 & -2 \\ \gamma & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $6x^2 - 4\sqrt{14}xy + 5y^2 = 26$;
2) $13x^2 - 48xy + 27y^2 + 5x + 35y - 45 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & -11 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1, G_2, G_1', G_2' — группы. Доказать, что если $G_1 \simeq G_1'$ и $G_2 \simeq G_2'$, то $G_1 \times G_2 \simeq G_1' \times G_2'$.

Задача 16. Построить таблицы Кэли для сложения и умножения для следующего кольца: кольцо $\mathbb{Z}_4$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество $\mathbb{Q} \backslash \{0\}$ относительно операции деления?

Задача 18. Найти все возможные гомоморфизмы группы C_{15} в подгруппу группы C_{17}.

Задача 19. Является ли подгруппа S_4, порожденная подстановкой $(123)(4)$ нормальной?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $471x \equiv 222 (\mathrm{mod}\, 491)$;
б) $444x \equiv 148 (\mathrm{mod}\, 520)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 21

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(7,2,2), \quad A_2(5,7,7), \quad A_3(5,3,1), \quad A_4(2,3,7)$$

Задача 2. Определить, при каком значении m прямые $mx+8y-7=0$ и $2x+my-1=0$ параллельны $(m>0)$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+1}{7}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{5}, \qquad A(2,4,-1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(0,-2,-5), \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(3,0,0)$, $a_3=(3,1,-1)$, $d=(10,3,-1)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(3,5,-1,-3)$, $a_2=(4,-2,4,-2)$, $a_3=(5,-9,9,-1)$, $a_4=(-1,-2,-3,4)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & -1 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & -13 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть поворот вектора относительно оси Ox на 45° в положительном направлении, а затем симметрия относительно xOy. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & \gamma & 4 \\ 3 & 4 & \alpha \\ \beta & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $2x^2 + 2\sqrt{3}xy + 4y^2 = 25$;
2) $-x^2 - y^2 + 10xy - 18\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 42 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -11 & -4 & 13 \\ -8 & -4 & 11 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — абелева группа, $H_1 \leqslant G$, $H_2 \leqslant G$. Доказать, что $H_1 H_2 \leqslant G$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_{12}^*$.

Задача 17. Является ли кольцом следующая алгебраическая система: множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$ относительно матричного сложения и умножения?

Задача 18. Дана группа T всех симметрий ромба. Верно ли, что подгруппа порожденная одним из поворотов является нормальной подгруппой в T?

Задача 19. Является ли подгруппа группы S_4, порожденная подстановками $(12)(3)(4)$ и $(1)(2)(34)$ нормальной?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $215x \equiv 69 (\bmod\, 311)$;
б) $378x \equiv 78 (\bmod\, 678)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 22

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(7,7,3), \quad A_2(6,5,8), \quad A_3(3,5,8), \quad A_4(8,4,1)$$

Задача 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-3)$ параллельно прямой $2x+3=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+1}{6}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{-1}, \qquad A(6,2,0)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(-1,1,0), \quad 5x-2y+z-8=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & -5 & -7 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 15 \\ 1 & 7 & 14 & 63 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(-3,4,2)$, $a_2=(-6,8,-25)$, $a_3=(7,-1,27)$, $d=(-13,9,6)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(8,-2,4,7,0)$, $a_2=(1,0,2,1,3)$, $a_3=(9,-2,6,8,3)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость $x=-z$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ \alpha & 2 & \beta \\ \gamma & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $7x^2 + 6\sqrt{2}xy + 4y^2 = 15$;
2) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y = 50$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 14 \\ -1 & 0 & -1 \\ -7 & -4 & -9 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Доказать, что для любых элементов a, b, c группы G элементы abc и cab имеют одинаковый порядок.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_4^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество дробей вида $\dfrac{a}{2^k}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, относительно сложения?

Задача 18. Дана группа T_3 всех симметрий равностороннего треугольника. Верно ли, что подгруппа порожденная одним из поворотов является нормальной подгруппой в T_3?

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{112}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $605x \equiv 247 (\mathrm{mod}\, 1352)$;
б) $693x \equiv 531 (\mathrm{mod}\, 455)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 23

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,3,9),\quad A_2(6,9,1),\quad A_3(1,7,3),\quad A_4(8,5,8)$$

Задача 2. Дан треугольник $A(1,-1)$, $B(-2,1)$, $C(3,5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на медиану, проведенную из вершины A.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{-1},\qquad A(-1,0,1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(1,-1,3),\quad 5x-3y+2z+5=0.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&2&3\\2&1&3&5&2\\3&2&5&8&6\\4&3&7&11&11\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&2&1&1\\2&3&3&2\\2&2&3&0\\1&1&1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&1\\3&4&2\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&3\\-1&2\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&2&0\\-3&1&2\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\3&-2\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(1,1,0)$, $a_2=(1,1,2)$, $a_3=(1,-1,1)$, $d=(2,-4,-1)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(1,2,-2,3,0)$, $a_2=(2,-3,1,1,3)$, $a_3=(4,1,-3,7,3)$, $a_4=(-5,11,-5,0,-9)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix}2&1&-1&-1\\4&-2&-2&3\\2&5&-1&-6\\2&-3&-1&4\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть поворот вектора вокруг оси Ox на 60°, а затем проекция на плоскость xOy. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\0&0&7\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 2 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $4x^2 - 2\sqrt{7}xy - 2y^2 = 60$;
2) $144x^2 + 120xy + 25y^2 + 182x + 312y = 169$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 14 \\ -1 & 2 & -1 \\ -7 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть R — кольцо, $R_1 \leqslant R$ и $R_2 \leqslant R$. Верно ли, что $R_1 \cup R_2 \leqslant R$?

Задача 16. Построить таблицы Кэли для сложения и умножения для следующего кольца: кольцо $\mathbb{Z}_7$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество всех подмножеств некоторого множества $M \neq \varnothing$ относительно операции объединения множеств?

Задача 18. Изоморфны ли группы $\langle \{3^a | a \in \mathbb{Z}\}, \cdot \rangle$ и $\langle \{2^b | b \in \mathbb{Z}\}, \cdot \rangle$?
Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $625x \equiv 211 (\operatorname{mod} 961)$;
б) $693x \equiv 102 (\operatorname{mod} 468)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 24

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(2,4,3),\quad A_2(7,6,3),\quad A_3(4,9,3),\quad A_4(3,6,7)$$

Задача 2. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,1)$ и пересекающей данную прямую в точке B, ордината которой равна нулю.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-4}{3}=\frac{y}{7}=\frac{z+1}{2},\qquad A(3,0,-2)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(14,-8,-2),\quad 4x-2y-3z+9=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 14 & -3 & -1 & -1\\ 7 & 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ -3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 5 & 4 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 2 & 5\\ 1 & 0\\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(-1,2,2)$, $a_3=(-1,3,1)$, $d=(-2,13,7)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(6,3,-9,3)$, $a_2=(2,2,2,2)$, $a_3=(4,2,-6,2)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3\\ 2 & -6 & 6 & -7\\ -2 & 6 & -2 & 5\\ 3 & -9 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть отображение вектора $\vec{x}$ в вектор $[\vec{x},\vec{i}]$, где $\vec{i}$ — орт оси Ox. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \gamma \\ \alpha & 4 & \beta \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $2x^2 + 10xy + 2y^2 = 21$;
2) $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 6y - 6 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -7 & -3 & -10 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1, G_1' и G_2 — группы. Верно ли, что если $G_1 \simeq G_1'$, то $G_1 \times G_2 \simeq G_1' \times G_2$? Ответ обосновать.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_{12}^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Q}, \oplus \rangle$, где операция "$\oplus$" определена по правилу $a \oplus b = 2a + b$?

Задача 18. Является ли гомоморфизмом групп (с операциями умножения) отображение $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, где f определено по правилу $f(z) = |z|$? Ответ обосновать.

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}^{107}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $529x \equiv 83 (\bmod 625)$;
б) $468x \equiv 385 (\bmod 507)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 25

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(0,7,1), \quad A_2(4,1,5), \quad A_3(4,6,3), \quad A_4(3,9,8)$$

Задача 2. Составить уравнение прямой, симметричной оси Ox относительно прямой $3x-2y+3=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-5}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+7}{3}, \qquad A(5,1,-6)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(-2,-3,0), \quad \frac{x+0,5}{1}=\frac{y+1,5}{0}=\frac{z-0,5}{1}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & 8 & -4 & 2 & 12 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(0,-1,1)$, $a_2=(-2,1,1)$, $a_3=(-1,1,3)$, $d=(-7,3,7)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(4,5,6,7)$, $a_2=(2,3,4,5)$, $a_3=(2,4,6,8)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть отображение симметрии относительно оси Oy, а затем поворот в плоскости xOz на 45° в положительном направлении. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -3 & 1 & \gamma \\ \alpha & 1 & -3 \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$;
2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2\sqrt{5}x + 3\sqrt{5}y + \frac{129}{20} = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ -1 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1 и G_2 группы, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. Известно, что $|g_1| = 15$, а $|g_2| = 10$. Чему равен порядок элемента (g_1, g_2) в группе $G_1 \times G_2$?

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа всех симметрий ромба.

Задача 17. Является ли кольцом следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Q}, \oplus, * \rangle$, где операция "$*$" определена по правилу $a * b = -a - b + ab + 2$, а операция "$\oplus$" — по правилу $a \oplus b = a + b - 1$?

Задача 18. Для каких целых a отображение $f : x \to xa$ является изоморфизмом группы целых чисел относительно сложения в себя?

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $605x \equiv 442 (\mathrm{mod}\, 868)$;
б) $533x \equiv 527 (\mathrm{mod}\, 806)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 26

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(6,1,1),\quad A_2(4,6,6),\quad A_3(4,2,0),\quad A_4(1,2,6)$$

Задача 2. Найти точку, симметричную точке $A(2,-4)$ относительно прямой $4x+3y+1=0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{-3},\qquad A(1,2,1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(2,-4,7),\quad \frac{x-1}{0}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-2}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 3\\ 0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -4\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} -2\\ 1\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} -5\\ 1\\ -2\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(-3,4,2)$, $a_2=(5,10,2)$, $a_3=(9,-12,23)$, $d=(20,-10,50)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(2,-1,3,5)$, $a_2=(4,-3,1,3)$, $a_3=(3,-2,3,4)$, $a_4=(7,-6,-7,0)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 2 & 2 & -1 & -1 & -1\\ 3 & 7 & -6 & -3 & -5\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть отображение вектора $\vec{x}$ в вектор $[\vec{x},\vec{j}]$, где $\vec{j}$ — орт оси Oy. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \alpha \\ \beta & 1 & 3 \\ 1 & \gamma & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$;
2) $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — группа, $H_1 \leqslant G$, $H_2 \leqslant G$. Доказать, что если $|H_1| = 35$ и $|H_2| = 27$, то $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_4$ относительно сложения.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество дробей вида $\dfrac{a}{2^k 3^l}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $k, l \in \mathbb{N}$ относительно сложения?

Задача 18. Найти все подгруппы группы C_{455}.

Задача 19. Совпадает ли подгруппа группы S_4, порожденная подстановками $(1)(2)(34)$ и $(1)(23)(4)$ со всей группой?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $840x \equiv 75 (\operatorname{mod} 299)$;
б) $1035x \equiv 187 (\operatorname{mod} 1404)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 27

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(6,6,2),\quad A_2(5,4,7),\quad A_3(2,4,7),\quad A_4(7,3,0)$$

Задача 2. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,1)$ под углом 45° к данной прямой ($k>0$).

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{3},\qquad A(4,5,1)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(-1,0,3),\quad x-2y+5z+1=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 3 & 4\\ 3 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 5 & 2 & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -5\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(-2,1,0)$, $a_2=(0,5,8)$, $a_3=(-2,-9,5)$, $d=(-6,-12,18)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(6,4,0,3)$, $a_2=(-2,0,5,1)$, $a_3=(4,4,5,4)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -3 & 6\\ 1 & 7 & -10 & 20\\ 3 & 6 & 5 & -10\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть отображение вектора $\vec{x}$ в вектор $[\vec{x},\vec{a}]$, где $\vec{a}$=(1,1,1). Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$.

$$\Phi=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ \alpha & -1 & \gamma\\ \beta & -1 & 2\end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α,β,γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'}=e_1-e_2+e_3$, $e_2^{'}=-e_1+e_2-2e_3$, $e_3^{'}=-e_1+2e_2+e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x,y,z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $x^2-2\sqrt{21}xy+5y^2=24$;
2) $3y^2+4xy+\sqrt{5}x+\sqrt{5}y-\frac{11}{16}=0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'},Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi=\begin{pmatrix} 9 & -10 & -1\\ 4 & -4 & -1\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Доказать, что для любых элементов a,b,c группы G элементы abc и bca имеют одинаковый порядок.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_{20}^{*}$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество всех подмножеств некоторого множества $M\neq\varnothing$ относительно операции пересечения множеств?

Задача 18. Пусть G — группа всех матриц $\begin{pmatrix}\pm1 & 0\\ 0 & \pm1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & \pm1\\ \pm1 & 0\end{pmatrix}$ (всего 8 матриц) относительно матричного умножения, а $H\leqslant G$ — подгруппа матриц $\begin{pmatrix}\pm1 & 0\\ 0 & \pm1\end{pmatrix}$. Верно ли, что $H\trianglelefteq G$?

Задача 19. Является ли подгруппа S_4, порожденная подстановками $(12)(34)$, $(13)(24)$ и $(14)(23)$ нормальной подгруппой S_4?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $465x\equiv104(\mathrm{mod}\,1804)$;
б) $1173x\equiv190(\mathrm{mod}\,1254)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 28

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(4,7,9), \quad A_2(-1,-4,-5), \quad A_3(-3,3,1), \quad A_4(5,-6,10)$$

Задача 2. Зная уравнения сторон параллелограмма $y = 2x + 1$, $y = 2x - 5$, $y = x - 2$, $y = x + 2$, найти уравнение его диагонали, для которой $k > 0$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1}, \qquad A(3,0,2)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(-1,5,2), \quad x + 2y - 5z - 29 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ Z = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX = Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX = Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX = K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX = K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1 = (1,-1,1)$, $a_2 = (3,2,2)$, $a_3 = (-4,1,5)$, $d = (11,4,8)$. Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1 = (1,2,-1,1,1)$, $a_2 = (2,1,1,1,1)$, $a_3 = (3,-1,1,2,3)$, $a_4 = (-3,5,-2,-2,-4)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX = 0$.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть отображение вектора $\vec{x}$ в вектор $[\vec{x}, \vec{k}]$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \gamma \\ \alpha & 6 & \beta \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $2x^2 + 2\sqrt{6}xy - 3y^2 = 48$;
2) $23x^2 + 42xy - 33y^2 + 32\sqrt{10}x = 40$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — группа и $g \in G$ такой, что $|g| = 25$. Найти $|g^2|$.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_8^*$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество дробей вида $\dfrac{a}{2^k}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ относительно умножения?

Задача 18. Является ли гомоморфизмом групп (с операциями умножения) отображение $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, где f определено по правилу $f(z) = |z|^2$? Ответ обосновать.

Задача 19. Совпадает ли подгруппа группы S_3, порожденная подстановками $(12)(3)$ и $(1)(23)$, со всей группой?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $562x \equiv 79 \pmod{773}$;
б) $328x \equiv 125 \pmod{533}$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 29

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(1,5,7),\quad A_2(2,4,0),\quad A_3(0,-7,8),\quad A_4(3,3,4)$$

Задача 2. Дан треугольник $A(3,2)$, $B(5,-2)$, $C(1,0)$. Составить уравнение медианы угла B.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{1},\qquad A(-1,2,3)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(2,-1,1),\qquad \frac{x-4,5}{1}=\frac{y+3}{-0,5}=\frac{z-2}{1}.$$

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 0 & -2 & -5\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2 & -1\\ 2 & 3 & 4 & -1\\ -2 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} -2\\ -3\\ -4\\ 5\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & -2\\ -2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} -4\\ -1\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} -3\\ -1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(0,1,0)$, $a_2=(1,1,2)$, $a_3=(3,1,1)$, $d=(10,6,5)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(4,3,4)$, $a_2=(1,2,3)$, $a_3=(2,3,4)$, $a_4=(3,2,3)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 0 & -1\\ 5 & 4 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть проектирование вектора на плоскость $x=z$ и растяжение вдоль оси Oy в два раза. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 5 & \alpha & \beta \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & \gamma & 2 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $3x^2 + 2\sqrt{14}xy + 8y^2 = 10$;
2) $-2x^2 + 2xy - 2y^2 - 6x + 6y + 3 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ -1 & -5 & 3 \\ -1 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G_1, G_2 и G_2' — группы. Верно ли, что если $G_2 \simeq G_2'$, то $G_1 \times G_2 \simeq G_1 \times G_2'$? Ответ обосновать.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $\mathbb{Z}_7$ относительно сложения.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, * \rangle$, где операция "$*$" определена по правилу $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$?

Задача 18. Верно ли, что группа всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, относительно сложения изоморфна группе $\langle \mathbb{R}, + \rangle \times \langle \mathbb{R}, + \rangle$

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{86}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $487x \equiv 31 (\operatorname{mod} 814)$;
б) $375x \equiv 205 (\operatorname{mod} 625)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 30

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(0,7,0), \quad A_2(-1,8,5), \quad A_3(-4,0,3), \quad A_4(3,8,-1)$$

Задача 2. Определить, при каком значении a прямая $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$ параллельна оси ординат, и написать ее уравнение ($a>0$).

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-3}, \qquad A(1,2,0)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(0,-2,3), \quad \frac{x}{1}=\frac{y+0,5}{-2}=\frac{z}{1}.$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(1,-2,3)$, $a_2=(2,1,-1)$, $a_3=(-2,5,1)$, $d=(-1,9,4)$.
Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(5,0,1,0,-1)$, $a_2=(2,-4,1,0,5)$, $a_3=(3,2,0,6,-2)$, $a_4=(5,-2,1,6,3)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 4 & 8 & 13 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть отображение вектора $\vec{x}$ в вектор $[\vec{a},\vec{x}]$, где $\vec{a}=(1,0,1)$. Найти матрицу линейного преобразования.
б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha \\ \beta & 1 & \gamma \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $15x^2 - 2\sqrt{55}xy + 9y^2 = 20$;
2) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей Ox', Oy'.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -9 \\ -6 & 0 & 8 \\ 10 & 5 & -7 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — группа, $H \leqslant G$ такая, что $|H| = 50$. Пусть также $g \in G$ и $|g| = 15$. Возможно ли, что $g \in H$? Ответ обосновать.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

относительно умножения.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{Z}$ с операцией умножения матриц?

Задача 18. Найти все возможные гомоморфизмы группы C_{10} в подгруппу группы C_{25}.

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $867x \equiv 133 (\mathrm{mod}\, 1444)$;
б) $616x \equiv 819 (\mathrm{mod}\, 1701)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра". Вариант 31

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(3,0,3), \quad A_2(-1,4,7), \quad A_3(-2,3,-1), \quad A_4(5,6,0)$$

Задача 2. Даны точки $P(-1,2)$ и $Q(0,3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно отрезку PQ.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x+1}{9} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5}, \qquad A(-1,1,2)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(1,-1,3), \quad 2x-3y+z-1=0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 18 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ методом Крамера и систему $CX=Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1=(2,-1,0)$, $a_2=(-3,4,4)$, $a_3=(1,12,-1)$, $d=(-3,34,10)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(5,2,-3,1)$, $a_2=(4,1,-2,3)$, $a_3=(1,1,-2,-1)$, $a_4=(3,4,-1,2)$

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно координатной плоскости xOy и сжатие по оси Oz в 3 раза. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \gamma \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 27$;
2) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 7 \\ 12 & 8 & -10 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — группа, $H \leqslant G$ такая, что $|H| = 30$. Пусть также $g \in G$ и $|g| = 20$. Возможно ли, что $g \in H$? Ответ обосновать.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $G \leqslant S_4$, состоящая из всех подстановок φ таких, что $\varphi(x) \in \{1,2\}$, если $x \in \{1,2\}$ и $\varphi(x) \in \{3,4\}$, если $x \in \{3,4\}$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: $\langle \mathbb{Q}^*; \cdot \rangle$?

Задача 18. Найти все подгруппы группы C_{330}.

Задача 19. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{96}.$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $729x \equiv 38 (\mathrm{mod}\, 961)$;
б) $507x \equiv 65 (\mathrm{mod}\, 1001)$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 32

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(2,-4,1), \quad A_2(-1,3,2), \quad A_3(4,-2,-1), \quad A_4(2,-3,3)$$

Задача 2. Найти проекцию точки $A(2,1)$ на прямую, проходящую через точки $B(5,3)$ и $C(3,-4)$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-1}{7}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{4}, \qquad A(1,2,2)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(1,-1,1), \quad x+3y-5z-28=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & -6 & -12 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX=Y$ с помощью обратной матрицы и систему $CX=Z$ методом Крамера.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX=K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX=K$.

Задача 8. Даны векторы a_1,a_2,a_3,d: $a_1=(1,-1,1)$, $a_2=(3,2,2)$, $a_3=(-1,3,7)$, $d=(2,9,25)$. Показать, что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1=(2,0,-3,5)$, $a_2=(2,-7,1,7)$, $a_3=(0,-7,4,2)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX=0$.

$$R=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости xOy, а затем сжатие по оси Ox в два раза и растяжение по оси Oy в два раза. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 7 & -4 & \beta \\ \alpha & 5 & 4 \\ 0 & \gamma & 3 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $13x^2 - 48xy + 27y^2 = 45$;
2) $-x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Доказать, что отображение $\varphi : G \to G$, действующее по правилу $\varphi(x) = gxg^{-1}$ для некоторого фиксированного элемента $g \in G$ является изоморфизмом.

Задача 16. Построить таблицу Кэли для следующей группы: группа $G \leqslant A_5$, состоящая из всех четных подстановок φ таких, что $\varphi(x) \in \{1,2\}$, если $x \in \{1,2\}$ и $\varphi(x) \in \{3,4,5\}$, если $x \in \{3,4,5\}$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество дробей вида $\dfrac{a}{2^k 3^l}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $k, l \in \mathbb{N}$ относительно умножения?

Задача 18. Описать смежные классы группы $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ по подгруппе $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Задача 19. Найти порядок подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $625x \equiv 84 \pmod{729}$;
б) $847x \equiv 143 \pmod{902}$.

Типовой расчет по курсу "Высшая алгебра".
Вариант 33

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, площадь грани $A_1A_2A_3$, проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4, объем пирамиды.

$$A_1(2,1,-2), \quad A_2(3,1,-4), \quad A_3(4,3,0), \quad A_4(1,3,2)$$

Задача 2. Даны точки $A(3,-2)$, $B(2,-4)$ и $C(-1,-5)$. Точка D симметрична точке C относительно прямой, проходящей через точки A и B. Найти координаты точки D.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую (α) и точку A.

$$(\alpha)\ \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{3}, \qquad A(3,-3,0)$$

Задача 4. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

$$M(-5,5,7), \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & 2 & -7 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Решить систему $BX = Y$ методом Крамера и систему $CX = Z$ с помощью обратной матрицы.

Задача 6. а) Найти $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank}(GBF)$, $\operatorname{rank}(ZK^T)$.

б) Проверить на совместимость систему $AX = K$.

Задача 7. Решить методом Гаусса систему $DX = K$.

Задача 8. Даны векторы a_1, a_2, a_3, d: $a_1 = (2,1,-3)$, $a_2 = (-2,-2,1)$, $a_3 = (1,1,1)$, $d = (7,5,-6)$.
Показать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис. Разложить вектор d по этому базису.

Задача 9. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов: $a_1 = (-4,6,0,0)$, $a_2 = (5,3,2,0)$, $a_3 = (2,0,-3,8)$, $a_4 = (7,3,-1,8)$.

Задача 10. Найти размерность и базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений $RX = 0$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 11 а)Линейное преобразование есть симметрия вектора относительно плоскости $y = x$. Найти матрицу линейного преобразования.

б) Линейное преобразование задано матрицей A. Выяснить геометрический смысл этого линейного преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Задача 12. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ \gamma & 2 & 2 \\ \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

а) Подобрать параметры α, β, γ так, чтобы матрица Φ была симметричной. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
б) Найти матрицу линейного преобразования в базисе из собственных векторов и в базисе $e_1^{'} = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2^{'} = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3^{'} = -e_1 + 2e_2 + e_3$.
в) По матрице Φ составить квадратичную форму от переменных x, y, z. Найти канонический вид квадратичной формы и установить, является ли она положительно определенной. Ответ пояснить.

Задача 13. Даны уравнения кривых второго порядка в системе координат $x0y$.
1) $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 63$;
2) $-x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$.
Для обеих кривых:
а) Найти канонический базис и направление новых осей $Ox^{'}, Oy^{'}$.
б) Написать матрицу перехода от старого базиса к новому. Проверить, что эта матрица является ортогональной, объяснить ее геометрический смысл.
в) Привести уравнение кривой к каноническому виду.
г) Изобразить кривую в первоначальной системе координат.

Задача 14. Линейное преобразование задано матрицей Φ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найти Жорданову форму линейного преобразования, заданного матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

и Жорданов базис этого преобразования.

Задача 15. Пусть G — группа и $g \in G$ такой, что $|g| = 30$. Найти $|g^2|$.

Задача 16. Построить таблицы Кэли для сложения и умножения для следующего кольца: кольцо $\mathbb{Z}_6$.

Задача 17. Является ли группой следующая алгебраическая система: множество линейных функций, то есть функций вида $f(x) = kx + b$, где $k \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ относительно операции суперпозиции?

Задача 18. Является ли гомоморфизмом групп отображение $f : \langle \mathbb{C}^*, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$, где f определено по правилу $f(z) = 1$? Ответ обосновать.

Задача 19. Совпадает ли подгруппа группы S_4, порожденная подстановками $(123)(4)$ и $(12)(3)(4)$ со всей группой?

Задача 20. Решить сравнения. Ответы записать в виде наименьших положительных представителей соответствующих классов вычетов по исходному модулю:

а) $529x \equiv 51 (\mathrm{mod}\, 841)$;
б) $693x \equiv 1323 (\mathrm{mod}\, 1148)$.