ТЕМА 14. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задача 1. Изменить порядок интегрирования

1. $$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$$

2. $$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$$

3. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

4. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$

5. $$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)dy$$

6. $$\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_{0}^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\arccos y} f(x,y)dx$$

7. $$\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$$

8. $$\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$$

9. $$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy$$

10. $$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy$$

11. $$\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$$

12. $$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f(x,y)dx$$

13. $$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{0}^{\sin y} f(x,y)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{0}^{\cos y} f(x,y)dx$$

14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$

15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$

17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^2} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx$

19. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$

20. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$

21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

23. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f(x,y)dy$

24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)dx$

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)dy$

26. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy$

28. $$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

29. $$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

30. $$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$$

31. $$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

32. $$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}} f(x,y)dy$$

33. $$\int_{-1}^0 dx \int_0^{2x+2} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{-2x+2} f(x,y)dy$$

34. $$\int_1^2 dx \int_0^{2x-2} f(x,y)dy + \int_2^4 dx \int_0^{-x+4} f(x,y)dy$$

35. $$\int_{-1}^0 dx \int_0^{-x-1} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y)dy$$

36. $$\int_1^2 dx \int_0^{-4x+4} f(x,y)dy + \int_2^3 dx \int_0^{4x-12} f(x,y)dy$$

37. $$\int_{-4}^{-3} dx \int_0^{4x-16} f(x,y)dy + \int_{-3}^{-1} dx \int_0^{2x+2} f(x,y)dy$$

38. $$\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{-y+2} f(x,y)dx$$

39. $$\int_0^2 dy \int_0^{y-1} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_0^{-\frac{y}{2}+2} f(x,y)dx$$

40. $$\int_{-4}^{-3} dy \int_0^{2y+8} f(x,y)dx + \int_{-3}^{-1} dy \int_0^{-y+1} f(x,y)dx$$

41. $$\int_{-1}^0 dy \int_0^{2y+2} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_0^{-2y+2} f(x,y)dx$$

42. $$\int_{-1}^0 dy \int_0^{-2y-2} f(x,y)dx + \int_0^2 dy \int_0^{y-2} f(x,y)dx$$

43. $$\int_{-5}^{-2} dy \int_{0}^{-\frac{y}{3}-\frac{5}{3}} f(x,y)dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{y+1} f(x,y)dx$$

44. $$\int_{1}^{4} dy \int_{0}^{-\frac{2y}{3}+\frac{2}{3}} f(x,y)dx + \int_{4}^{6} dy \int_{0}^{y-6} f(x,y)dx$$

45. $$\int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{-2y-2} f(x,y)dx + \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{y-2} f(x,y)dx$$

46. $$\int_{0}^{1} dx \int_{1}^{x+1} f(x,y)dy + \int_{1}^{3} dx \int_{1}^{-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}} f(x,y)dy$$

47. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{1}^{2x+3} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{1}^{-2x+3} f(x,y)dy$$

48. $$\int_{1}^{2} dx \int_{1}^{2x-1} f(x,y)dy + \int_{2}^{4} dx \int_{1}^{-x+5} f(x,y)dy$$

49. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x,y)dy$$

50. $$\int_{1}^{2} dx \int_{-4x+5}^{1} f(x,y)dy + \int_{2}^{3} dx \int_{4x-11}^{1} f(x,y)dy$$

51. $$\int_{-4}^{-3} dx \int_{-4x-15}^{1} f(x,y)dy + \int_{-3}^{-1} dx \int_{2x+3}^{1} f(x,y)dy$$

52. $$\int_{0}^{1} dy \int_{1}^{y+1} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{1}^{-y+3} f(x,y)dx$$

53. $$\int_{1}^{2} dy \int_{1}^{y} f(x,y)dx + \int_{2}^{4} dy \int_{1}^{-\frac{y}{2}+3} f(x,y)dx$$

54. $$\int_{-4}^{-3} dy \int_{1}^{\frac{3}{4}y+4} f(x,y)dx + \int_{-3}^{-1} dy \int_{1}^{-2y+4} f(x,y)dx$$

55. $$\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{-2y+4} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{2}^{-2y+4} f(x,y)dx$$

56. $$\int_{-1}^{0} dy \int_{-2y-3}^{-1} f(x,y)dx + \int_{0}^{2} dy \int_{y-3}^{-1} f(x,y)dx$$

57. $$\int_{-5}^{-2} dy \int_{-\frac{y}{3}-\frac{8}{3}}^{-1} f(x,y)dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_{y}^{-1} f(x,y)dx$$

58. $\int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{-\frac{2y}{3}-\frac{1}{3}}^{-1} f(x,y)dx + \int\limits_{4}^{6} dy \int\limits_{y-7}^{-1} f(x,y)dx$

59. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2y-4}^{-2} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y-4}^{-2} f(x,y)dx$

60. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{1}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{1}^{-x+4} f(x,y)dy$

Задача 2. Вычислить двойной интеграл

1. $\iint\limits_{D} \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=x^2; \quad y=-\sqrt{x};$

2. $\iint\limits_{D} \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=\sqrt{x}; \quad y=-x^2;$

3. $\iint\limits_{D} \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=-x^3;$

4. $\iint\limits_{D} \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=x^3; \quad y=-\sqrt[3]{x};$

5. $\iint\limits_{D} \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=x^2; \quad y=-\sqrt[3]{x};$

6. $\iint\limits_{D} \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=-x^2;$

7. $\iint\limits_{D} \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=x^3; \quad y=-\sqrt{x};$

8. $\iint\limits_{D} \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=\sqrt{x}; \quad y=-x^3;$

9. $\iint\limits_{D} \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=x^2; \quad y=-\sqrt{x};$

10. $\iint\limits_{D} \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=\sqrt{x}; \quad y=-x^2;$

11. $\iint\limits_{D} \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=-x^3;$

12. $\iint\limits_{D} \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy \quad D: x=1; \quad y=x^3; \quad y=-\sqrt[3]{x};$

13. $\iint\limits_D \left(12xy+27x^2y^2dxdy\right)$; $D: x=1; \quad y=x^2; \quad y=-\sqrt[3]{x};$

14. $\iint\limits_D \left(8xy+18x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=-x^2;$

15. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^3; \quad y=-\sqrt{x};$

16. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy$

$D: x=1; \quad y=\sqrt{x}; \quad y=-x^3;$

17. $\iint\limits_D (24xy-48x^3y^3)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^2; \quad x=-\sqrt{x};$

18. $\iint\limits_D (6xy+24x^3y^3)dxdy$; $D: x=1; \quad y=\sqrt{x}; \quad y=-x^2;$

19. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=-x^3;$

20. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^3; \quad y=-\sqrt[3]{x};$

21. $\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^2; \quad y=-\sqrt[3]{x};$

22. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=-x^2;$

23. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^3; \quad y=-\sqrt{x};$

24. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=\sqrt{x}; \quad y=-x^3;$

25. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^2; \quad y=-\sqrt{x};$

26. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=\sqrt{x}; \quad y=-x^2;$

27. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=-x^3;$

28. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^3; \quad y=-\sqrt[3]{x};$

29. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^2; \quad y=-\sqrt[3]{x};$

30. $\iint\limits_D \left(xy-9x^5y^5\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=\sqrt[3]{x}; \quad y=-x^2;$

31. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$; $D: x=1; \quad y=x^3; \quad y=-\sqrt{x};$

32. $\iint\limits_D \left(xy+2x^2y^2\right)dxdy$; $D: y=0; \quad y=x; \quad y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2};$

33. $\iint\limits_D \left(x^2y+3xy^2\right)dxdy$; $D: y=0; \quad y=2x+2; \quad y=-2x+2;$

34. $\iint\limits_D \left(2x^2y+4xy^2\right)dxdy$; $D: y=0; \quad y=2x-2; \quad y=-x+4;$

35. $\iint\limits_D \left(3xy^3+4x^2y^3\right)dxdy$; $D: y=0; \quad y=x-1; \quad y=-x-1;$

36. $\iint\limits_D \left(2x^2y^2+5x^2y\right)dxdy$; $D: y=0; \quad y=-4x+4; \quad y=4x-12;$

37. $\iint\limits_D \left(3xy+5x^2y\right)dxdy$; $D: y=0; \quad y=-4x-16; \quad y=2x+2;$

38. $\iint\limits_D \left(7xy+2xy^2\right)dxdy$; $D: x=0; \quad x=y; \quad x=-y+2;$

39. $\iint\limits_D \left(9x^2y+5xy^2\right)dxdy$; $D: x=0; \quad x=y-1; \quad x=-\dfrac{y}{2}+2;$

40. $\iint\limits_D \left(x^2y+2xy^2\right)dxdy$; $D: x=0; \quad x=2y+8; \quad x=-y-1;$

41. $\iint\limits_D \left(xy^2+7x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=0; \quad x=2y+2; \quad x=-2y+2;$

42. $\iint\limits_D \left(8xy+5x^2y\right)dxdy$; $D: x=0; \quad x=-2y-2; \quad x=y-2;$

43. $\iint\limits_D \left(6xy+3xy^2\right)dxdy$; $D: x=0; \quad x=-\dfrac{1}{3}y-\dfrac{5}{3}; \quad x=y+1;$

44. $\iint\limits_D \left(5x^2y+2x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=0; \quad x=-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{2}{3}; \quad x=y-6;$

45. $\iint\limits_D \left(7xy+4x^2y\right)dxdy$; $D: x=0; \quad x=-2y-2; \quad x=y-2;$

46. $\iint\limits_D \left(2x^2y+3xy^2\right)dxdy$; $D: y=1;\quad y=x+1;\quad y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2};$

47. $\iint\limits_D \left(3xy+4x^2y\right)dxdy$; $D: y=1;\quad y=2x+3;\quad y=-2x+3;$

48. $\iint\limits_D \left(4xy+5x^2y^2\right)dxdy$; $D: y=1;\quad y=2x-1;\quad y=-x+5;$

49. $\iint\limits_D \left(5x^2y+6xy^2\right)dxdy$; $D: y=1;\quad y=-x;\quad y=x;$

50. $\iint\limits_D \left(6xy^2+7x^2y\right)dxdy$; $D: y=1;\quad y=-4x+5;\quad y=4x-11;$

51. $\iint\limits_D \left(7xy+8x^2y^2\right)dxdy$; $D: y=1;\quad y=-4x-15;\quad y=2x+3;$

52. $\iint\limits_D \left(8x^2y+9xy^2\right)dxdy$; $D: x=1;\quad x=y+1;\quad x=-y+3;$

53. $\iint\limits_D \left(9xy+x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=1;\quad x=y;\quad x=-\frac{y}{2}+3;$

54. $\iint\limits_D \left(8xy+3x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=1;\quad x=\frac{3}{4}y+4;\quad x=-2y+4;$

55. $\iint\limits_D \left(7xy+2x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=2;\quad x=2y+4;\quad x=-2y+4;$

56. $\iint\limits_D \left(6xy+x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=-1;\quad x=-2y-3;\quad x=y-3;$

57. $\iint\limits_D \left(5x^2y-3xy^2\right)dxdy$; $D: x=-1;\quad x=-\frac{y}{3}-\frac{8}{3};\quad x=y;$

58. $\iint\limits_D \left(xy-2x^2y^2\right)dxdy$; $D: x=-1;\quad x=-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3};\quad x=y-7;$

59. $\iint\limits_D \left(x^2y-3xy^2\right)dxdy$; $D: x=-2;\quad x=-2y-4;\quad x=y-4;$

60. $\iint\limits_D \left(2x^2y-4xy^2\right)dxdy$; $D: y=1;\quad y=x;\quad y=-x+4;$

ТЕМА 14. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задача 1.

Изменить порядок интегрирования $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$.

Решение.

Сначала решим задачу определения области интегрирования. Для этого используем известное правило сведения двойного интеграла к повторному для областей, изображенных на рис.1 и рис. 2.

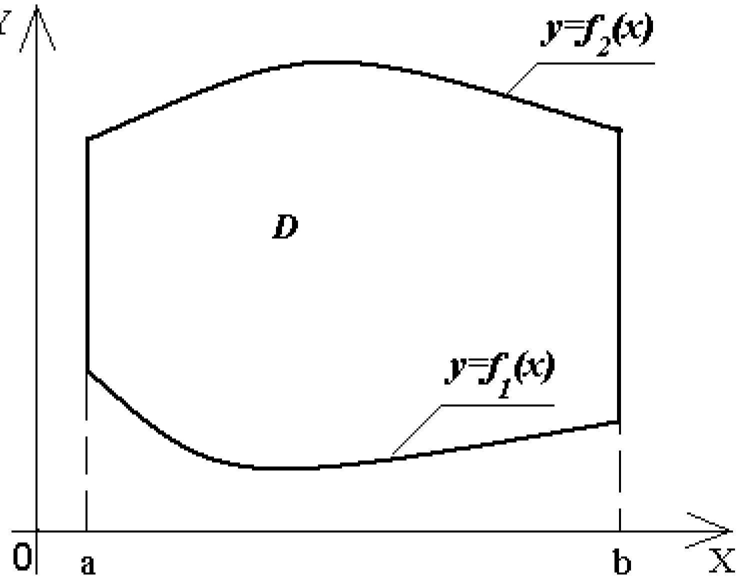

Рис. 1. Область интегрирования первого типа

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

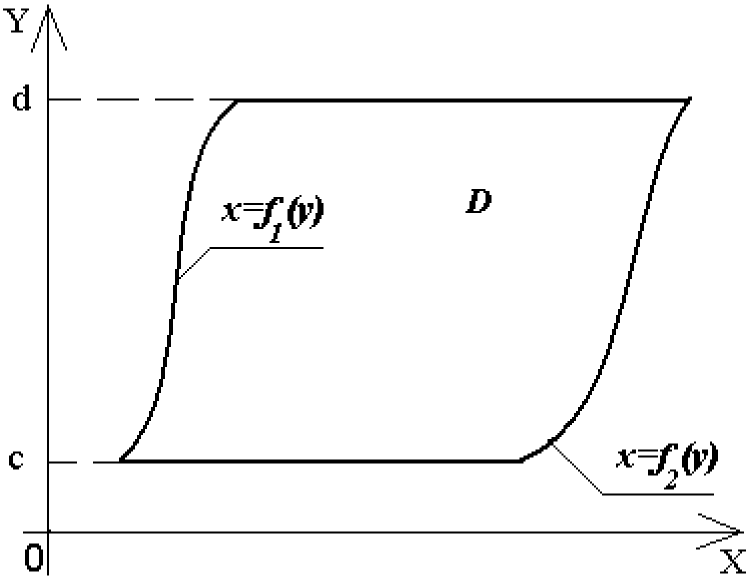

Рис. 2. Область интегрирования второго типа

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

Первое слагаемое в задаче соответствует случаю изображенному на рис.1, а второе – на рис.2. Таким образом, сопоставляя 1-ое слагаемое с формулой (1) получаем следующие уравнения границ области D_1:

$$a=0,\ b=1,\ y=f_1(x)=0,\ y=f_2(x)=\sqrt{x}. \quad (3)$$

Строим графики полученных уравнений и в результате получаем искомую область D_1 для первого из интегралов. Она представлена на рис. 3.

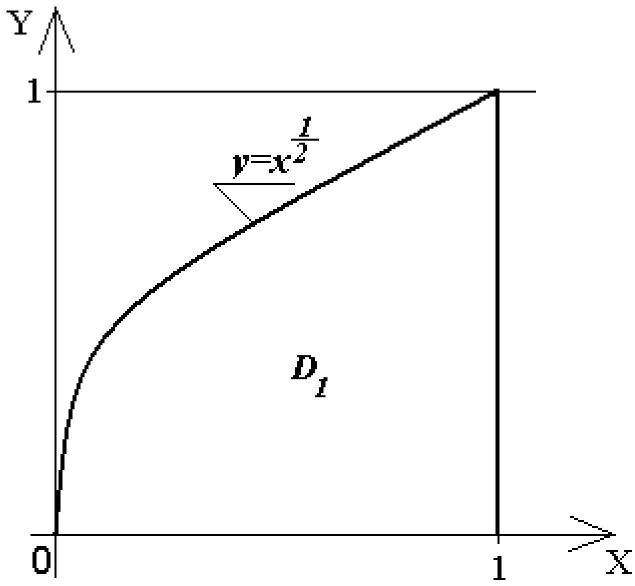

Рис. 3. Вид области интегрирования D_1

Второе слагаемое также соответствует случаю, изображенному на рис.1. Сопоставим его с формулой (1) получаем следующие уравнения границ области D_1:

$$a=1,\ b=2,\ y_1(x)=0,\ y_2(x)=\sqrt{2-x}. \quad (4)$$

Строим графики полученных уравнений и в результате получаем искомую область D_2 для второго из интегралов задания. Она представлена на рис. 4.

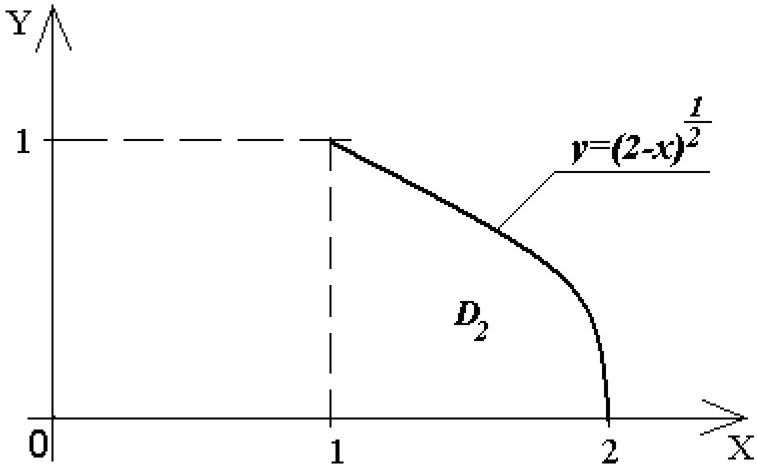

Рис. 4. Вид области интегрирования D_2

Изобразив обе области интегрирования D_1 и D_2 на одном рисунке, получаем всю область интегрирования в виде, представленном на рис. 5.

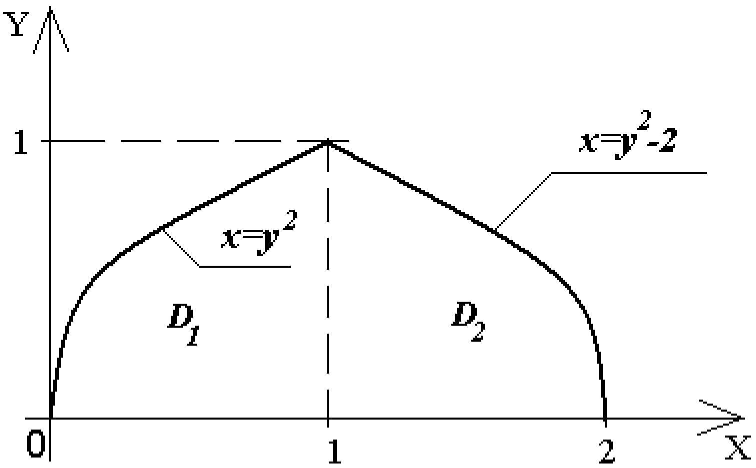

Рис. 5. Вид области интегрирования D_2

Найдем функцию, обратную последний из функций (3). Для этого обе части уравнения возведем в квадрат: $x = y^2$.

Найдем функцию, обратную последний из функций (4). После очевидных преобразований получим: $x = 2 - y^2$.

Таким образом, сумма интегралов является следующим интегралом: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где область $D = D_1 + D_2$ - представлена на рис. 5.

Сведем теперь полученный интеграл к повторному с применением второй схемы, описываемой формулой (2) и иллюстрированной рис. 2

$$\iint\limits_D fdxdy = \int\limits_2^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy = \int\limits_2^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx$.

Задача 2.

Вычислить: $\iint\limits_D \left(xy - 9x^5y^5\right)dxdy$; $D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

Решение.

В декартовой системе координат построим графики границ области интегрирования D. Результаты построения представлены на рис. 1. Эти действия позволяют определить саму область D.

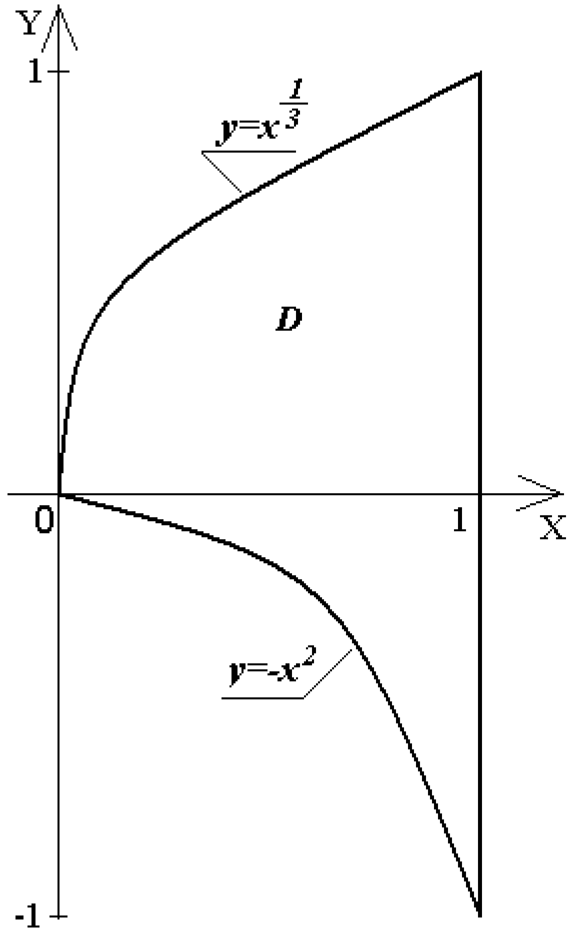

Рис. 1. Область интегрирования D

Применим схему 1 вычисления интеграла, описанную в предыдущей задаче:

$$\iint_D \left(xy-9x^5y^5\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}(xy-9x^5y^5)dy=$$

$$=\int_0^1\left(x\frac{y^2}{2}\Big|_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}-9x^5\frac{1}{6}y^6\Big|_{-x^2}^{\sqrt[3]{x}}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x}{2}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^4\right)-\frac{3x^5}{2}\left(x^2-x^{12}\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}x^5-\frac{3}{2}x^7+\frac{3}{2}x^{17}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3}{8}-\frac{1}{2\cdot 6}-\frac{3}{2\cdot 8}+\frac{3}{2\cdot 18}=0\,.$$

Ответ: $\iint_D \left(xy-9x^5y^5\right)dxdy=0$.