

Тема: «Решение смешанной задачи для уравнения гиперболического типа методом сеток»

Цель – освоить метод сеток для решения дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для однородного уравнения колебаний струны. Задача состоит в отыскании функции $u(x, t)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T, \quad (22)$$

начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (23)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (24)$$

Так как замена переменных $t \rightarrow ct$ приводит уравнение (22) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (25)$$

то в дальнейшем будем считать $c = 1$.

Уравнение (25) является уравнением гиперболического типа. В разделе "Аппроксимация уравнений гиперболического типа» мы показали, что решение таких уравнений можно получить, используя трехслойную разностную схему по формуле (13):

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \beta^2)u_{i,j} + \beta^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}.$$

Здесь $\beta = \frac{\tau}{h}$, h - шаг по x , τ - шаг по t

Схема (13) называется трехслойной потому, что связывает между собой значения $u_{i,j}$ функции $u(x,t)$ на трех временных слоях с номерами $j-1, j, j+1$. Схема (13) явная, т.е. позволяет в явном виде выразить $u_{i,j}$ через значения u с предыдущих двух слоев.

Численное решение задачи состоит в вычислении приближенных значений $u_{i,j}$ решения $u(x,t)$ в узлах (x_i, t_j) при $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Алгоритм решения основан на том, что решение на каждом следующем слое ($j = 2, 3, 4, \dots, m$) можно получить пересчетом решений с двух предыдущих слоев ($j = 0, 1, 2, \dots, m-1$) по формуле (13). На нулевом временном слое ($j = 0$) решение известно из начального условия $u_{i,0} = f(x_i)$. Решение на каждом следующем слое получается пересчетом решений с двух предыдущих слоев по формуле (13).

Решение на первом слое ($j = 1$) вычисляем по формуле (15) $u_{i,1} = u_{i,0} + \tau \cdot f_1(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Теперь для вычисления решений на следующих слоях можно применять формулу (13).

Схема устойчива, если выполнено условие Куранта $\tau < h$. Это означает, что малые погрешности, возникающие, например, при вычислении решения на первом слое, не будут неограниченно возрастать при переходе к каждому новому временному слою. При выполнении условия Куранта схема обладает равномерной сходимостью, т. е. при $h \rightarrow 0$ решение разностной задачи равномерно стремится к решению исходной смешанной задачи (22) – (24).

Недостаток схемы в том, что как только выбрана величина шага сетки h в направлении x , появляется ограничение на величину шага τ по переменной t . Если необходимо произвести вычисления для большого значения величины T , то может потребоваться большое количество шагов по переменной t . Указанный недостаток характерен для всех явных разностных схем.

Для оценки погрешности решения обычно прибегают к методам сгущения сетки.

Описанный алгоритм решения смешанной задачи для волнового уравнения по явной разностной схеме (13) реализован в примере 1.

Пример 1. Получить численное решение дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{\sin(x)}{2} \quad 0 \leq x \leq 4$$

и краевыми условиями

$$u(0,t) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad u(4,t) = \cos^2\left(\frac{t}{2} + 2\right) \quad 0 \leq t \leq 2$$

Решение провести с оценкой погрешности $\varepsilon = 0,001$.

Сравнить полученное решение с точным решением:

$$u(x,t) = \cos^2\left(\frac{x+t}{2}\right). \quad (26)$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 5-7.

```

Ni - число узлов сетки по x      h - шаг сетки по x      a - правая граница x
Nj - число узлов сетки по t      t - шаг сетки по t      Tk - верхняя граница t
eps - оценка погрешности вычислений
f(x) - начальное значение функции u
f1(x) - начальное значение производной функции u по t
μ1(t) - краевое условие на левом конце
μ2(t) - краевое условие на правом конце
Ni := 2(Nj := 10  a := 4  Tk := 2  eps := 0.001

μ1(t) := cos(t/2)^2  μ2(t) := cos(t/2 + 2)^2  f(x) := cos(x/2)^2  f1(x) := -sin(x)/2

Giper(Ni, Nj) :=
  h ← a/Ni
  τ ← Tk/Nj
  λ ← τ/h
  k ← "Нарушено условие Куранта" if λ > 1
  otherwise
    for i ∈ 0..Ni
      xi ← i·h
      Ui,0 ← f(xi)
      Ui,1 ← Ui,0 + h·f1(xi)
    for j ∈ 0..Nj
      tj ← j·τ
      U0,j ← μ1(tj)
      UNi,j ← μ2(tj)
    for j ∈ 1..Nj - 1
      for i ∈ 1..Ni - 1
        Ui,j+1 ← 2·(1 - λ^2)·Ui,j + λ^2·(Ui+1,j + Ui-1,j) - Ui,j-1
  UT

```

Рис. 5. Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения по формуле (13)

```

Srez := for m ∈ 0..10
        S1 ← Giper(Ni, Nj)
        S2 ← Giper(2·Ni, 2·Nj)
        for k1 ∈ 0..Ni - 1
            for k2 ∈ 0..Nj - 1
                rk1,k2 ← |S1k2,k1 - S22k2,2k1|
        R ← max(r)
        break if R < eps
    otherwise
        Ni ← 2·Ni
        Nj ← 2·Nj
    (S1 Ni Nj m R)T

Srez1 = 640   Srez2 = 320   Srez3 = 5   Srez4 = 0.0007

```

n := 0..10 n1 := 0..10 SR_{n,n1} := (Srez₀)^{Srez₂}₁₀ⁿ, ^{Srez₁}₁₀ⁿ¹

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0.961	0.848	0.681	0.485	0.292	0.131	0.029	0.001	0.052	0.173
1	0.99	0.913	0.77	0.585	0.386	0.206	0.071	0.005	0.016	0.104	0.255
2	0.961	0.849	0.682	0.486	0.292	0.131	0.028	0	0.051	0.173	0.346
3	0.913	0.771	0.586	0.387	0.206	0.071	0.004	0.016	0.104	0.254	0.444
4	0.848	0.682	0.486	0.292	0.131	0.028	0	0.051	0.172	0.346	0.544
5	0.77	0.585	0.387	0.206	0.072	0.004	0.016	0.103	0.254	0.443	0.642
6	0.681	0.486	0.292	0.132	0.029	0	0.051	0.172	0.345	0.543	0.734
7	0.585	0.387	0.206	0.072	0.005	0.016	0.103	0.254	0.443	0.641	0.817
8	0.485	0.292	0.131	0.029	0.001	0.051	0.172	0.345	0.543	0.734	0.888
9	0.386	0.206	0.071	0.005	0.016	0.104	0.254	0.443	0.641	0.817	0.943
10	0.292	0.131	0.028	0	0.051	0.173	0.346	0.543	0.734	0.888	0.98

Рис. 6. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Результаты вычислений после уточнения.

$$u(x, t) := \cos\left(\frac{x+t}{2}\right)^2 \quad i := 0..10 \quad j := 0..10 \quad xl_i := 0.4 \cdot i \quad tl_j := 0.2 \cdot j \quad u1_{i,j} := u(xl_i, tl_j)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0.961	0.848	0.681	0.485	0.292	0.131	0.029	0.001	0.052	0.173
1	0.99	0.913	0.77	0.585	0.386	0.206	0.072	0.005	0.017	0.105	0.255
2	0.961	0.848	0.681	0.485	0.292	0.131	0.029	0.001	0.052	0.173	0.346
3	0.913	0.77	0.585	0.386	0.206	0.072	0.005	0.017	0.105	0.255	0.444
4	0.848	0.681	0.485	0.292	0.131	0.029	0.001	0.052	0.173	0.346	0.544
5	0.77	0.585	0.386	0.206	0.072	0.005	0.017	0.105	0.255	0.444	0.642
6	0.681	0.485	0.292	0.131	0.029	0.001	0.052	0.173	0.346	0.544	0.734
7	0.585	0.386	0.206	0.072	0.005	0.017	0.105	0.255	0.444	0.642	0.817
8	0.485	0.292	0.131	0.029	0.001	0.052	0.173	0.346	0.544	0.734	0.888
9	0.386	0.206	0.072	0.005	0.017	0.105	0.255	0.444	0.642	0.817	0.943
10	0.292	0.131	0.029	0.001	0.052	0.173	0.346	0.544	0.734	0.888	0.98

Рис. 7. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Точное решение задачи по формуле (26).

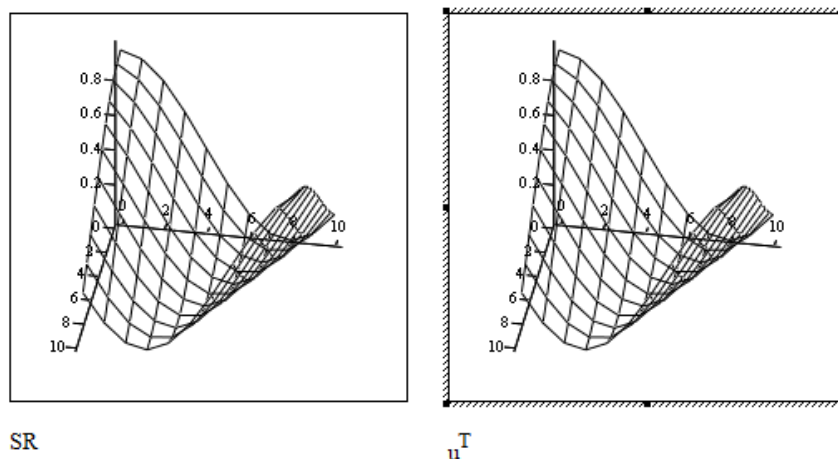


Рис. 8. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Графики численного и точного решений.

$$\begin{array}{l}
 M := \left| \begin{array}{l}
 r_{0,0} \leftarrow \left| SR_{0,0} - (u^T)_{0,0} \right| \\
 \max \leftarrow r_{0,0} \\
 s \leftarrow 0 \\
 c \leftarrow 0 \\
 \text{for } n \in 1..10 \\
 \quad \text{for } n1 \in 1..10 \\
 \quad \quad \left| r_{n,n1} \leftarrow \left| SR_{n,n1} - (u^T)_{n,n1} \right| \right. \\
 \quad \quad \text{if } r_{n,n1} > \max \\
 \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l}
 \max \leftarrow r_{n,n1} \\
 s \leftarrow n \\
 c \leftarrow n1
 \end{array} \right. \\
 \quad \quad \left. (\max \ s \ c)^T \right.
 \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left| (SR)_{M_1, M_2} - (u^T)_{M_1, M_2} \right| = 0.000686 \\
 \left| \frac{(SR)_{M_1, M_2} - (u^T)_{M_1, M_2}}{(SR)_{M_1, M_2}} \right| = 0.003979
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. 9. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Сравнение численного и точного решения.

На рис. 5 задаются начальные значения, число узлов сетки по x и y , границы сетки, оценка погрешности, начальные и краевые условия и функция $Giper(N_i, N_j)$, решающая при выполнении условия Куранта дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа (25) по явной разностной трехслойной схеме (13). Если условие Куранта не выполнено, то выдается сообщение «Нарушено условие Куранта». На рис. 6 задается функция $Srez$, которая уточняет полученное решение с заданной точностью путем сгущения сетки. На рис. 7 проведено вычисление точного решения по формуле (26). На рис. 8 приведены графические результаты по разностной схеме и точного решения. На рис. 9 проведено сравнение приближенного и точного решения. Как видим решение по разностной схеме и точное решение почти полностью

совпали. Максимальная относительная погрешность отклонения от точного решения составила 0,4 %, что приемлемо для инженерных расчетов.

В состав MathCAD входит функция `pdesolve`, предназначенная для решения параболических и гиперболических уравнений. Решение с помощью этой функции представлено на рис. 10.

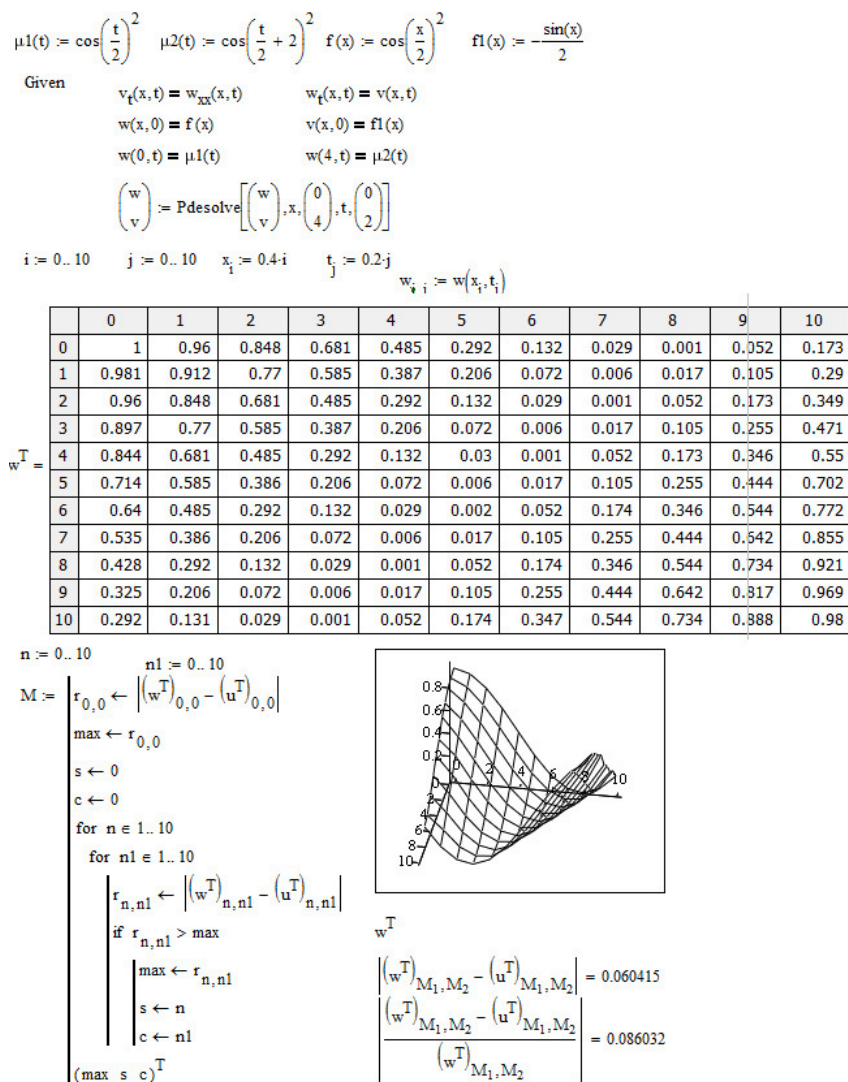


Рис. 10. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Решение примера 1 функцией `pdesolve`.

Решение встроенной функцией `pdesolve` почти полностью совпадает с точным решением во внутренних точках сетки. Однако решение этой функцией приводит к нарушению краевых условий. Максимальная относительная погрешность отклонения от точного решения составила 0,86 %.

Пример 2. Решить задачу о колебании струны единичной длины с закрепленными концами, начальное положение которой изображено на рис. 11а. Начальная скорость имеет форму, изображенную на рис. 11б.

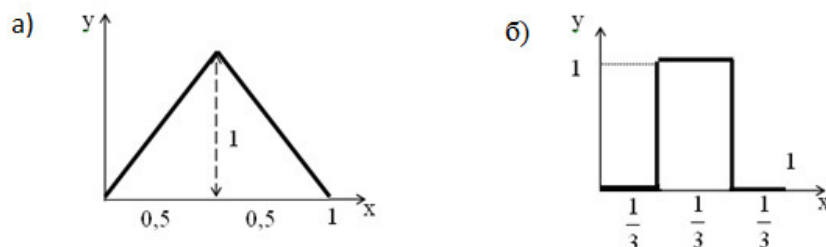


Рис. 11.

Вычисления выполнить при изменении пространственной переменной от 0 до $T = 2$ с оценкой погрешности $\varepsilon = 0,01$. Таким образом задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0, T],$$

4

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,1], \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_1(x), \quad x \in [0,1],$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0,0.5] \\ 2-2x, & \text{если } x \in [0.5,1] \end{cases} \quad f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0,1/3] \\ 1, & \text{если } x \in [1/3,2/3] \\ 0, & \text{если } x \in [2/3,1] \end{cases}$$

Решение в математическом пакете MATHCAD по явной трехслойной схеме представлено на рис. 12-13.

```

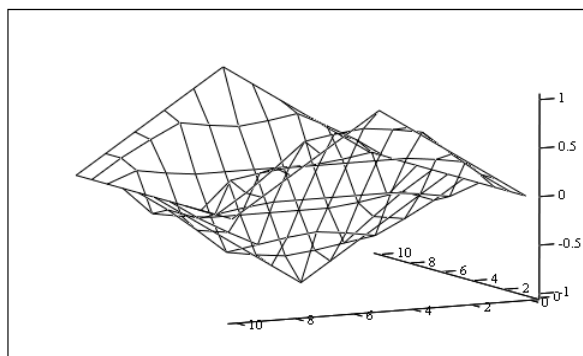
Ni := 10 Nj := 20 a := 1 Tk := 2 eps := 0.01 f1(x) :=
| 0 if 0 ≤ x ≤ 1/3
| 1 if 1/3 < x < 2/3
| 0 if 2/3 ≤ x ≤ 1
μ1(t) := 0 μ2(t) := 0 f(x) :=
| 2·x if 0 ≤ x ≤ 0.5
| 2 - 2·x otherwise
Giper(Ni, Nj) :=
| h ← a/Ni
| τ ← Tk/Nj
| λ ← τ/h
| k ← "Условие Куранта нарушено" if λ > 1
| otherwise
|   for i ∈ 0..Ni
|     | xi ← i·h
|     | Ui,0 ← f(xi)
|     | Ui,1 ← Ui,0 + h·f1(xi)
|     | for j ∈ 0..Nj
|       | tj ← j·τ
|       | U0,j ← μ1(tj)
|       | UNi,j ← μ2(tj)
|       | for j ∈ 1..Nj - 1
|         | for i ∈ 1..Ni - 1
|           | Ui,j+1 ← 2·(1 - λ²)·Ui,j + λ²·(Ui+1,j + Ui-1,j) - Ui,j-1
|         | Uᵀ
Srez :=
| for m ∈ 0..10
|   | S1 ← Giper(Ni, Nj)
|   | S2 ← Giper(2·Ni, 2·Nj)
|   | for k1 ∈ 0..Ni - 1
|     | for k2 ∈ 0..Nj - 1
|       | rk1,k2 ← |S1k2,k1 - S22k2,2k1|
|   | R ← max(r)
|   | break if R < eps Srez1 = 320
|   | otherwise Srez2 = 640
|   |   | Ni ← 2·Ni Srez3 = 5
|   |   | Nj ← 2·Nj
|   | (S1 Ni Nj m R)ᵀ Srez4 = 6.25 × 10-3

```

Рис. 12. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Решение примера 2 по формуле (13) с заданной точностью.

$$n := 0..10 \quad n1 := 0..10 \quad SR_{n,n1} := \left(Srez_0 \right) \frac{Srez_2}{10} \cdot n, \frac{Srez_1}{10} \cdot n1$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
1	0	0.2	0.434	0.684	0.734	0.769	0.734	0.684	0.434	0.2	0
2	0	0.284	0.334	0.369	0.369	0.369	0.369	0.369	0.334	0.284	0
3	0	-0.116	-0.066	-0.031	-0.031	-0.031	-0.031	-0.031	-0.066	-0.116	0
4	0	-0.2	-0.366	-0.516	-0.466	-0.431	-0.466	-0.516	-0.366	-0.2	0
5	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0
6	0	-0.2	-0.434	-0.684	-0.734	-0.769	-0.734	-0.684	-0.434	-0.2	0
7	0	-0.284	-0.334	-0.369	-0.369	-0.369	-0.369	-0.369	-0.334	-0.284	0
8	0	0.116	0.066	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031	0.066	0.116	0
9	0	0.2	0.366	0.516	0.466	0.431	0.466	0.516	0.366	0.2	0
10	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0



SR

Рис. 13. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Решение примера 2 (таблица значений и график решения).

На рис. 12 задаются начальные значения, число узлов сетки по x и y , границы сетки, оценка погрешности, начальные и краевые условия и функция $Giper(N_i, N_j)$, решающая при выполнении условия Куранта дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа (25) по явной разностной трехслойной схеме (13). На рис. 13 представлена таблица уточненного в пределах заданной точности таблица приближенного решения и график решения. Далее проведем решение данной задачи встроенной в MATHCAD функцией `pdsolve` и сравним решения (рис. 14-15).

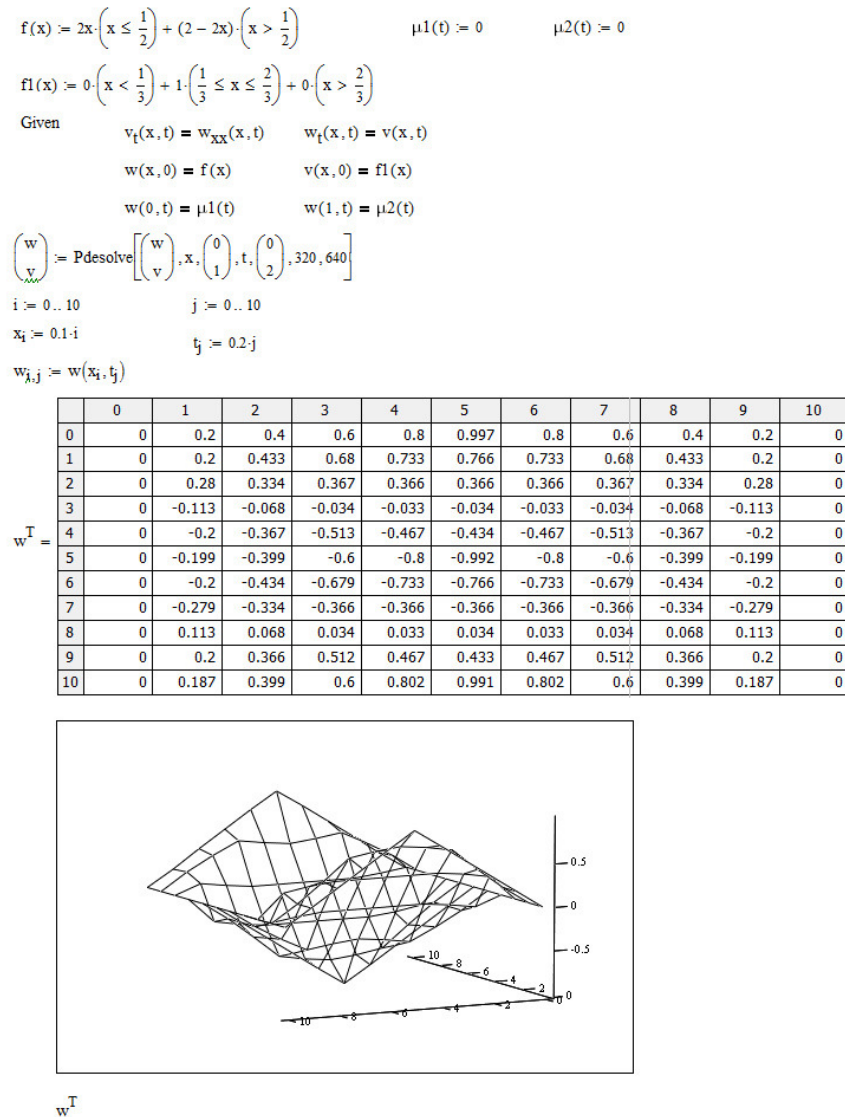


Рис. 14. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Решение примера 2 функцией pdesolve

Заметим, что здесь при задании начальных условий функции $f(x)$ и $f_1(x)$ определены с помощью булевских операторов. Это надо сделать для того, чтобы можно было использовать функцию pdesolve. Так как функция pdesolve не имеет никаких возвращающих значений, то все условные выражения должны задаваться без использования элементов программирования.

```

n := 0..10    n1 := 0..10
M :=
  r0,0 ← |(w^T)0,0 - (SR)0,0|
  max ← r0,0
  s ← 0
  c ← 0
  for n ∈ 1..10
    for n1 ∈ 1..10
      rn,n1 ← |(w^T)n,n1 - (SR)n,n1|
      if rn,n1 > max
        max ← rn,n1
        s ← n
        c ← n1
  (max s c)^T
  (w^T)M1,M2 - (SR)M1,M2 = 0.013456
  (w^T)M1,M2 = 0.072132
  M1 = 10
  M2 = 1

```

Рис. 15. Фрагмент рабочего документа MATHCAD. Сравнение решения по формуле (13) с решением функцией pdesolve.

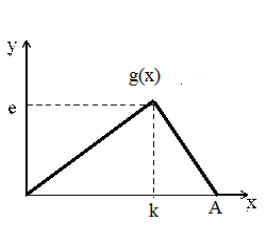
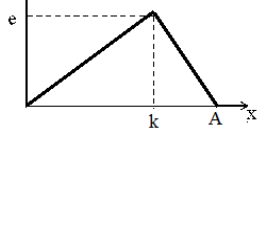
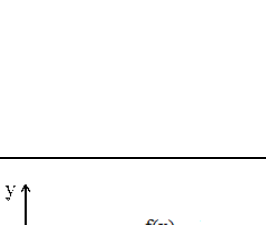
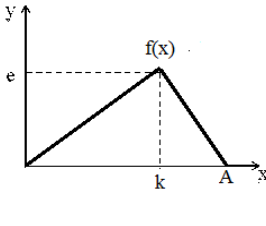
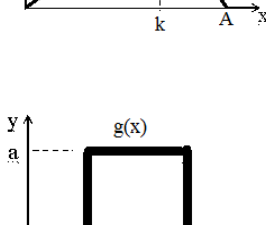
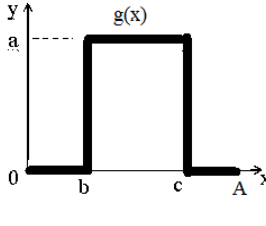
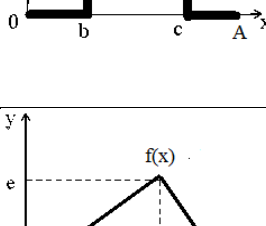
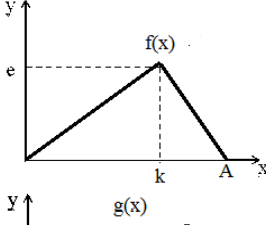
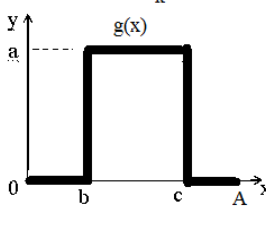
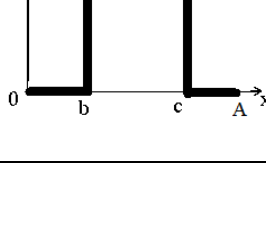
Анализ результатов вычислений показывает, что они совпадают между собой в пределах заданной точности. Неполное совпадение связано с тем, что мы пользуемся явной разностной схемой, а в функции pdesolve используется неявная разностная схема. Из теории знаем, что если точное решение, которое неизвестно, возрастает по времени, т.е. $u_{i,j+1} > u_{i,j}$, то явная разностная схема (13) дает заниженное решение по сравнению с точным, так как $u_{i,j+1}$ определяется по меньшим значениям сеточной функции на предыдущем временном слое, поскольку решение является возрастающим по времени. Для неявной разностной схемы на возрастающем решении, наоборот, решение завышено по сравнению с точным, поскольку оно определяется по значениям сеточной функции на верхнем временном слое. На убывающем решении картина изменяется противоположным образом: явная конечно-разностная схема завышает решения, а неявная занижает. Поэтому точное решение находится в области между решением, полученным по явной разностной схеме (13) и решением, полученным функцией pdesolve.

Задание 1. Решить смешанную задачу для волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальными условиями $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f1(x)$, $0 \leq x \leq A$ и краевыми условиями $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(a,t) = \mu_2(t)$, $0 \leq t \leq T$ с оценкой погрешности eps . Построить график решения. Сравнить полученное решение с решением встроенной в MATHCAD функцией pdesolve. Исходные данные представлены в таблице 1.

Варианты заданий

Таблица 1

Номер варианта	$f(x)$ $g(x)$	$\mu_1(t)$ $\mu_2(t)$	A	T	eps			
1	$0.5 \cdot (x+1)^2$ $(x+0.5) \cdot \cos(\pi \cdot x)$	0.5 $2-3 \cdot t$	1	1	0.001			
2	$x^2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$ $x^2 \cdot (x+1)$	$0.5 \cdot t$ $t-1$	1	0.2	0.001			
3	$x+1$ 0	$0.5 \cdot t^2$ $t+1$	1	1.2	0.001			
4	$e^x \cdot \sin x$ $e^x(\cos x + \sin x)$	$\cos^2 t + \sin t$ $\cos^2(t+6) + 12 \cdot t$	6	2	0.001			
5	$\cos^2 x + \sin x$ $2 \cdot x - \sin(2 \cdot x)$	$e^t \cdot \sin t$ $\sin(t+2) \cdot e^{t+2}$	2	2	0.001			
6	$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ $-\frac{\sin x}{2}$	$\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ $\cos^2\left(\frac{t}{2} + 3\right)$	6	6	0.001			
Номер варианта	$f(x)$ $g(x)$	$\mu_1(t)$ $\mu_2(t)$	A T	eps	a b	c	e	k
7		$\frac{1}{2} \cdot t$ $\frac{1}{2} \cdot t$	1 2	0.01	1 $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{2}$
8		$\frac{1}{3} \cdot t^2$ 0	1 1	0.01	2 $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
9		0 0	5 3	0.01	3 $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ 1	1	$\frac{1}{4}$
Номер варианта	$f(x)$ $g(x)$	$\mu_1(t)$ $\mu_2(t)$	A T	eps	a b	c	e	k
10		0 0	2 2	0.01	4 $\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{2}$

11		0 0	7 5	0.01	1 2	5 8	1
12		$0.3 \cdot t$ 0	8 4	0.01	2 2	5 1	6
13		$\frac{1}{4} \cdot t$ 0	5 3	0.01	$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ 1	$\frac{1}{4}$
14		t 0.5	1 1	0.01	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ 1	$\frac{1}{3}$
15		0 $0.2 \cdot t$	2 2	0.01	4 1	$\frac{3}{2}$ 2	1
16		0 0	4 2	0.01	$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ 1	$\frac{1}{4}$
17		0 0	7 5	0.01	1 1	3 5	5
18		0 0	3 2	0.01	$\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ 1	$\frac{3}{4}$
19		0 0	7 5	0.01	1 1	3 2	4
20		$0.1 \cdot t$ 0	4 2	0.01	$\frac{3}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$ 1	3