<u>Задача</u> 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

1 $y=\dfrac{3}{x};\ y=4e^{x};\ y=3;\ y=4$

2 $x=\sqrt{36-y^2}\ ;\ x=6-\sqrt{36-y^2}$.

3 $x^2+y^2=72\ ;6y=-x^2\ \ (y\le 0)$

4 $x=8-y^2;\ x=-2y$

5 $y=\dfrac{3}{x};\ y=8e^{x};\ y=3;\ y=8$

6 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2};\ y=\dfrac{1}{2x};\ x=16$

7 $x=5-y^2;\ \ x=-4y$

8 $x^2+y^2=12\ ;\ -\sqrt{6}y=x^2\ (y\le 0)$

9 $y=\sqrt{12-x^2}\ ;\ y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}\ ;x=0\ ;x\ge 0$

10 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\ ;\ y=\dfrac{3}{2x};\ x=9$

11 $y=\sqrt{24-x^2}\ ;\ 2\sqrt{3}y=x^2;\ x=0(x\ge 0)$

12 $y=\sin x;\ y=\cos x;\ x=0(x\ge 0)$

13 $y=20-x^2;\ y=-8x$

14 $y=\sqrt{18-x^2}\ ;\ y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$

15 $y=32-x^2;\ y=-4x$

16 $y=\dfrac{2}{x};\ y=5e^{x};\ y=2;\ y=5$

17 $x^2+y^2=36\ ;\ 3\sqrt{2}\cdot y=x^2\ \ (y\ge 0)$

18 $y=3\sqrt{x}\ ;\ y=\dfrac{3}{x};\ x=4$

19 $\begin{array}{l} y=6-\sqrt{36-x^2} \\ y=\sqrt{36-x^2} \end{array}\quad x=0(x\ge 0)$

20 $y=\dfrac{25}{4}-x^2;\quad y=x-\dfrac{5}{2}$

21 $y=\sqrt{x}\ ;\ y=\dfrac{1}{x};\ x=16$

22 $y=\dfrac{2}{x};\ y=7e^{x}\ ;\ y=2;\ y=7$

23 $x=27-y^2;\ x=-6y$

24 $x=\sqrt{72-y^2}\ ;6x=y^2;\ y=0(y\ge 0)$

25 $y=\sqrt{6-x^2}\ ;\ y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$

26 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\ ;\ y=\dfrac{3}{2x};\ x=4$

27 $y=\sin x;\ y=\cos x;\ x=0(x\le 0)$

28 $y = \frac{1}{x}$; $y = 6e^{x}$; $y = 1$; $y = 6$

29 $y = 3\sqrt{x}$; $y = \frac{3}{x}$; $x = 9$

30 $y = 11 - x^2$; $y = -10x$

<u>Пример решения и оформления (вариант №30)</u>[1]

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 11 - x^2$; $y = -10x$.

Решение:

Сделаем рисунок, на котором отметим точки пересечения кривых (-1,10) и (11,-110):

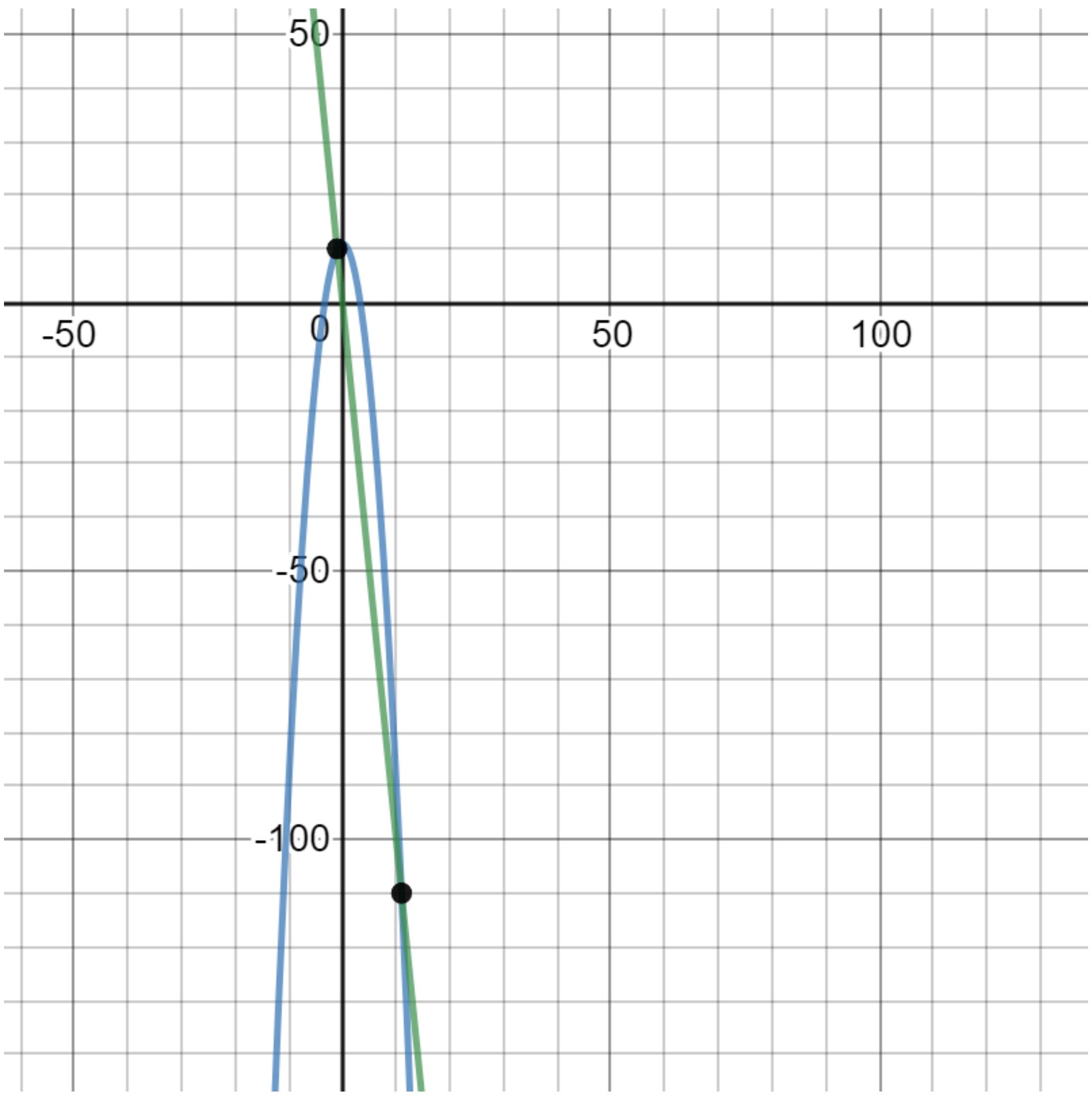

Рис.1.Графики функций $y = 11 - x^2$; $y = -10x$

Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 11 - x^2$ и $y = -10x$ вычисляется с помощью определённого интеграла:

[1] Если оформление формул в редакторе вызывает сложности, можно вставить фотографию с решением, написанным на бумаге.

$$S=\int_{-1}^{11}(11-x^2-(-10x))dx=\int_{-1}^{11}(11-x^2+10x)dx=\left(11x-\frac{x^3}{3}+10\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{11}=121+11-\frac{1331}{3}-\frac{1}{3}+5\cdot(121-1)=$$
$$=132-444+600=288$$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера :
https://www.desmos.com/calculator/dmrmbir4du

Задача 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

1 $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$; $x=2 \quad (x\ge 2)$

2 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$; $y=2 \quad (y\ge 2)$

3 $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \quad (y\ge 4) \\ y=4(1-\cos t) \quad y=4 \quad (0\le t\le 8\pi) \end{cases}$

4 $\begin{cases} x=16\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ $x=2 \ (x\ge 2)$

5 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=6\sin t \quad y=3 \ (y\ge 3) \end{cases}$

6 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \quad y=3(y\ge 3) \\ y=2(1-\cos t) \quad (0\le x\le 4\pi) \end{cases}$

7 $\begin{cases} x=16\cos^3 t \quad x=6\sqrt{3} \\ y=\sin^3 t \quad (x\ge 6\sqrt{3}) \end{cases}$

8 $\begin{cases} x=6\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$ $y=\sqrt{3}(y\ge\sqrt{3})$

9 $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \quad y=3(y\ge 3) \\ y=3(1-\cos t) \quad (0\le t\le 6\pi) \end{cases}$

10 $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t \quad x=4(x\ge 4) \end{cases}$

11 $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t \quad y=3 \\ y=3\sqrt{2}\sin t \quad (y\ge 3) \end{cases}$

12 $\begin{cases} x=6(t-\sin t) \quad y=9(y\ge 9) \\ y=6(1-\cos t) \quad (0\le t\le 2\pi) \end{cases}$

13 $\begin{cases} x=32\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \quad x=4(x\ge 4) \end{cases}$

14 $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=8\sin t \quad y=4(y\ge 4) \end{cases}$

15 $\begin{cases} x=6(t-\sin t) \quad y=6(y\ge 6) \\ y=6(1-\cos t) \quad (0\le t\le 12\pi) \end{cases}$

16 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}(x \ge 3\sqrt{3})$

17 $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}(y \ge 2\sqrt{3})$

18 $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) & y = 15(y \ge 15) \\ y = 10(1 - \cos t) & (0 \le t \le 20\pi) \end{cases}$

19 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1(x \ge 1)$

20 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 4\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 4(y \ge 4)$

21 $\begin{cases} x = t - \sin t & y = 1(y \ge 1) \\ y = 1 - \cos t & (0 \le t \le 2\pi) \end{cases}$

22 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1(x \ge 1)$

23 $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $y = 2(y \ge 2)$

24 $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) & y = 12(y \ge 12) \\ y = 8(1 - \cos t) & (0 \le x \le 16\pi) \end{cases}$

25 $\begin{cases} x = 24\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3}(x \ge 9\sqrt{3})$

26 $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3}(y \ge 4\sqrt{3})$

27 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) & y = 2(y \ge 2) \\ y = 2(1 - \cos t) & (0 \le x \le 4\pi) \end{cases}$

28 $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = 2(x \ge 2)$

29 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 5\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 5(y \ge 5)$

30 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) & y = 6(y \ge 6) \\ y = 4(1 - \cos t) & (0 \le x \le 8\pi) \end{cases}$

<u>Пример решения и оформления (вариант №30)</u>

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, \quad \begin{matrix} y = 6(y \ge 6) \\ (0 \le x \le 8\pi) \end{matrix}.$$

Решение:

Сделаем рисунок, на котором отметим заданные линии в указанных ограничениях:

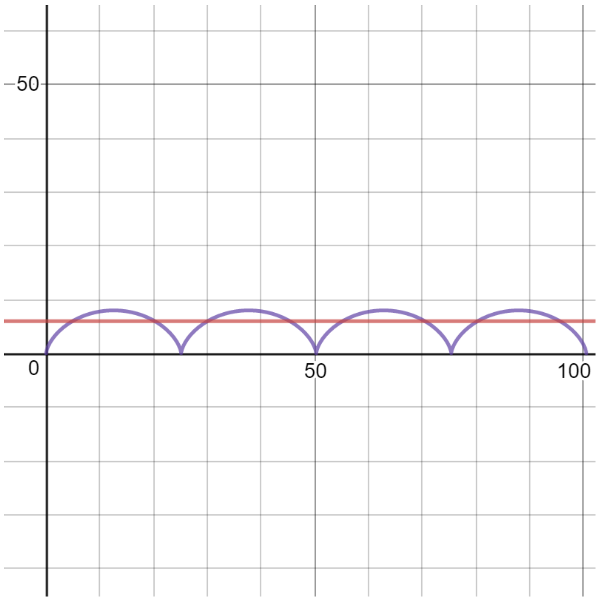

Рис.2. Область, ограниченная 4-мя арками циклоиды и прямой y=6.

Очевидно, что для того, чтобы вычислить площадь всей фигуры, достаточно вычислить площадь области, ограниченную одной аркой циклоиды и $y = 6(y \geq 6)$,и умножить её на 4:

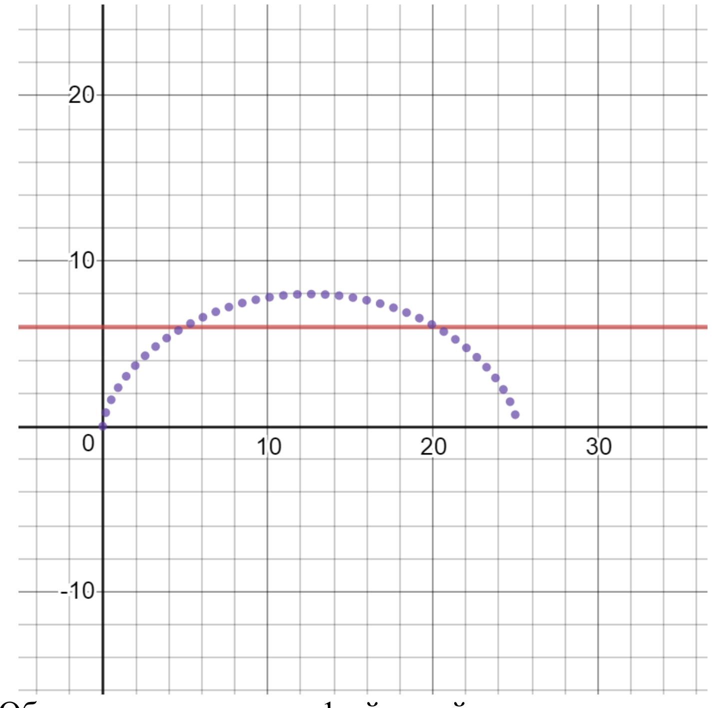

Рис.3. Область, ограниченная 1-ой аркой циклоиды и прямой y=6.

Для этого необходимо найти точки пересечения кривых из условия: $4(1-\cos t) = 6$, откуда находим, что $\cos t = -\frac{1}{2}, t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}$. При найденных значениях параметров $t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}$ получаем следующие точки пересечения:

$$\begin{cases} x = 4(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}) = \frac{8\pi}{3} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 4.9 \\ y = 4(1-\cos t) = 4(1-\cos\frac{2\pi}{3}) = 4(1+\frac{1}{2}) = 6 \end{cases}$$, т.е. точку (4.9,6)

$$\begin{cases} x = 4(\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}) = \frac{16\pi}{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 20.2 \\ y = 4(1-\cos t) = 4(1-\cos\frac{4\pi}{3}) = 4(1+\frac{1}{2}) = 6 \end{cases}$$, т.е. точку (20.2,6)

Отметим их на графике функций:

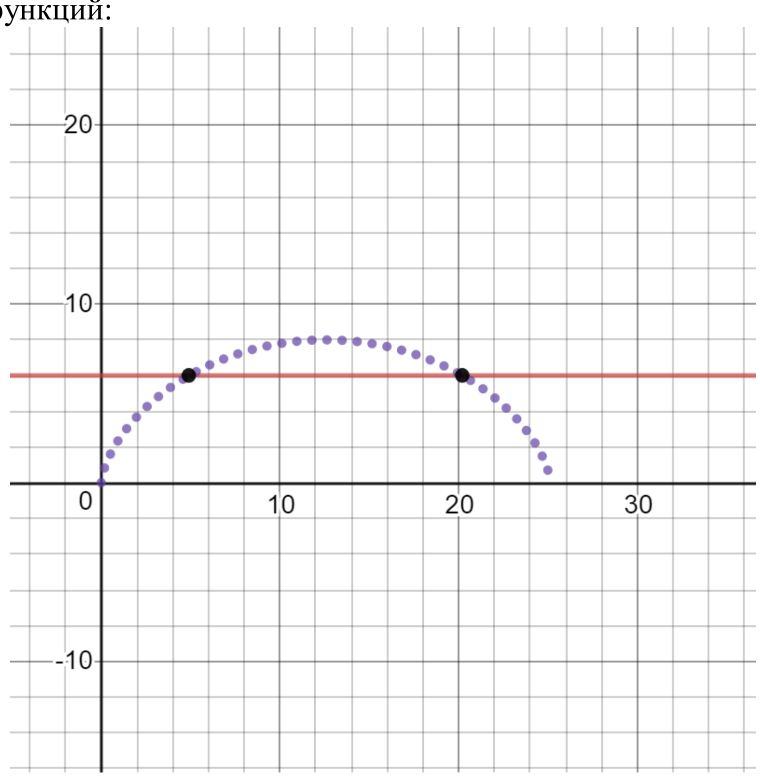

Рис.4. Область, ограниченная 1-ой аркой циклоиды и прямой y=6 и точки пересечения кривых

Площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 4(t-\sin t) \\ y = 4(1-\cos t) \end{cases}$, $(\frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3})$.

вычисляется с помощью определённого интеграла:

$$S_1 = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (4(1-\text{cost}) \cdot (4(t-\sin t))' dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (4(1-\text{cost}) \cdot 4(1-\cos t) dt = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 16(1-\text{cost})^2\, dt = 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1-2\text{cost}+\cos^2 t) dt =$$

$$= 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1-2\text{cost}+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}) dt = 16\left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} \right)\Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} =$$

$$= 16\left(\frac{2\pi}{3} - 2\sin\frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{8\pi}{3}}{4} - \frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{4} \right) =$$

$$= 16\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = 16\left(\pi + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 112.62$$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера https://www.desmos.com/calculator/87wv0uisfx

Далее, необходимо отнять площадь "прямоугольника", ограниченного сверху прямой y=6, а справа и слева - прямыми $x=\frac{8\pi}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x=\frac{16\pi}{3}+4\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$S_2=\left(\frac{16\pi}{3}+4\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{8\pi}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cdot 6=\left(\frac{8\pi}{3}+8\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 6=\left(\frac{8\pi}{3}+4\sqrt{3}\right)\cdot 6\approx 91.83.$$

Эту же площадь можно посчитать и с помощью интеграла:

$$\mathrm{S}_2=\int\limits_{\frac{8\pi}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{16\pi}{3}+4\frac{\sqrt{3}}{2}}6dx=\left(\frac{16\pi}{3}+4\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{8\pi}{3}-4\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cdot 6=\left(\frac{8\pi}{3}+8\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 6=\left(\frac{8\pi}{3}+4\sqrt{3}\right)\cdot 6\approx 91.83$$

Тогда окончательно площадь заданной фигуры будет равна: $4\mathrm{S}=4(\mathrm{S}_1-\mathrm{S}_2)=4(112.62-91.83)=83.16$

<u>Задача</u> 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

1 $\rho=4\cos 3\varphi$; $\rho=2$ $(\rho\ge 2)$

2 $\rho=\cos 2\varphi$

3 $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$; $\rho=\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

4 $\rho=4\sin 3\varphi$; $\rho=2$ $(\rho\ge 2)$

5 $\rho=2\cos\varphi$; $\rho=2\sqrt{3}\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

6 $\rho=\sin 3\varphi$

7 $\rho=6\sin 3\varphi$; $\rho=3$ $(\rho\ge 3)$

8 $\rho=\cos 3\varphi$

9 $\rho=\cos\varphi$; $\rho=\sqrt{2}\cos(\varphi-\frac{\pi}{2})$ $(-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

10 $\rho=\sin\varphi$; $\rho=\sqrt{2}\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})$ $(0\le\varphi\le\frac{3\pi}{4})$

11 $\rho=6\cos 3\varphi$; $\rho=3$ $(\rho\ge 3)$

12 $\rho=\frac{1}{2}+\sin\varphi$

13 $\rho=\cos\varphi$; $\rho=\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

14 $\rho=\sqrt{2}\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})$; $\rho=\sqrt{2}\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})$ $(\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4})$

15 $\rho=\cos\varphi$; $\rho=2\cos\varphi$

16 $\rho=\sin\varphi$; $\rho=2\sin\varphi$

17 $\rho=1+\sqrt{2}\cos\varphi$

18 $\rho=\frac{1}{2}\cos\varphi$

19 $\rho=1+\sqrt{2}\sin\varphi$

20 $\rho=\frac{3}{2}\sin\varphi$; $\rho=\frac{5}{2}\sin\varphi$

21 $\rho = \frac{3}{2}\cos\varphi$; $\rho = \frac{5}{2}\cos\varphi$

22 $\rho = 4\cos 4\varphi$

23 $\rho = \cos 6\varphi$

24 $\rho = 2\cos\varphi$; $\rho = 3\sin\varphi$

25 $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$

26 $\rho = 2\sin 4\varphi$

27 $\rho = 2\cos 6\varphi$

28 $\rho = \cos\varphi - \sin\varphi$

29 $\rho = 3\sin\varphi$; $\rho = 5\sin\varphi$

30 $\rho = 2\sin\varphi$; $\rho = 4\sin\varphi$

<u>Пример решения и оформления (вариант №30)</u>

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\sin\varphi$; $\rho = 4\sin\varphi$.

Решение:

Сделаем рисунок, на котором отметим заданные линии - это две окружности с центрами в точках (0;1) и (0;2) и радиусами 1 и 2 соответственно:

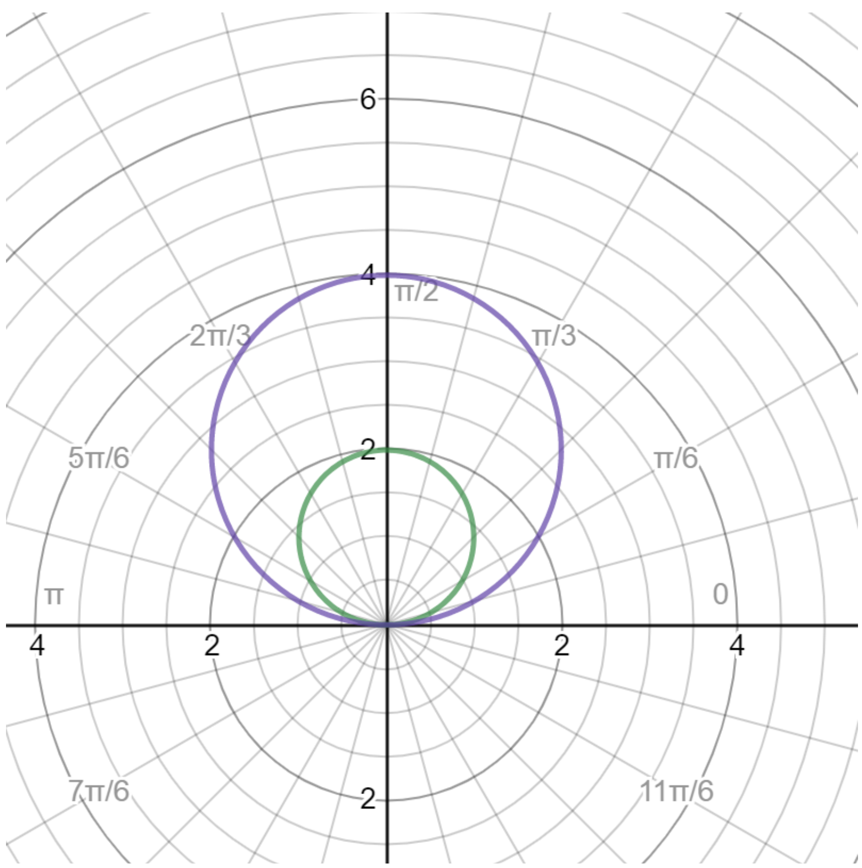

Рис.5. Область, ограниченная линиями $\rho = 2\sin\varphi$; $\rho = 4\sin\varphi$

Площадь фигуры, ограниченной этими линиями вычисляется с помощью определённого интеграла:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}((4\sin\theta)^2-(2\sin\theta)^2)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}12\sin^2\theta d\theta=6\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta=6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=3\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta=3\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=3\left(\pi-\frac{\sin(2\pi)}{2}+\frac{\sin 0}{2}\right)=3\pi$$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера: https://www.desmos.com/calculator/bgzix3xov2

<u>Задача</u> 4. Найти длину кривой, заданной параметрически

1 $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \quad (0\le t\le\pi) \end{cases}$

2 $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t) \\ y=3(2\sin t-\sin 2t) \quad (0\le t\le 2\pi) \end{cases}$

3 $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t) \\ y=4(\sin t-t\cos t) \quad (0\le t\le 2) \end{cases}$

4 $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \quad (0\le t\le\pi) \end{cases}$

5 $\begin{cases} x=10\cos^3 t \\ y=10\sin^3 t \quad (0\le t\le\frac{\pi}{2}) \end{cases}$

6 $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t) \quad (0\le t\le\pi) \end{cases}$

7 $x=3(t-\sin t)$

$y=3(1-\cos t) \quad (\pi\le t\le 2\pi)$

8 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}\cos 2t \\ y=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{4}\sin 2t \quad (\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{2\pi}{3}) \end{cases}$

9 $\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t) \\ y=3(\sin t-t\cos t) \end{cases} \quad (0\le t\le\frac{\pi}{3})$

10 $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \quad (0\le t\le\frac{\pi}{3}) \end{cases}$

11 $\begin{cases} x=6\cos^3 t \\ y=6\sin^3 t \quad (0\le t\le\frac{\pi}{3}) \end{cases}$

12 $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t) \quad (\frac{\pi}{2}\le t\le\pi) \end{cases}$

13 $\begin{cases} x=2{,}5(t-\sin t) \\ y=2{,}5(1-\cos t) \end{cases} \quad (\frac{\pi}{2}\le t\le\pi)$

14 $\begin{cases} x = 3.5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3.5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

15 $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$

16 $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

17 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{6})$

18 $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

19 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} \quad (\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3})$

20 $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{3})$

21 $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{4})$

22 $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

23 $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} \quad (\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4})$

24 $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{3\pi}{2})$

25 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

26 $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$

27 $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

28 $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 3\pi)$

29 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{4})$

30 $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad (\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4})$

<u>Пример решения и оформления (вариант №30)</u>

Вычислить длину линии, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \left(\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}\right).$$

Решение:

Сделаем рисунок линии на всей области определения:

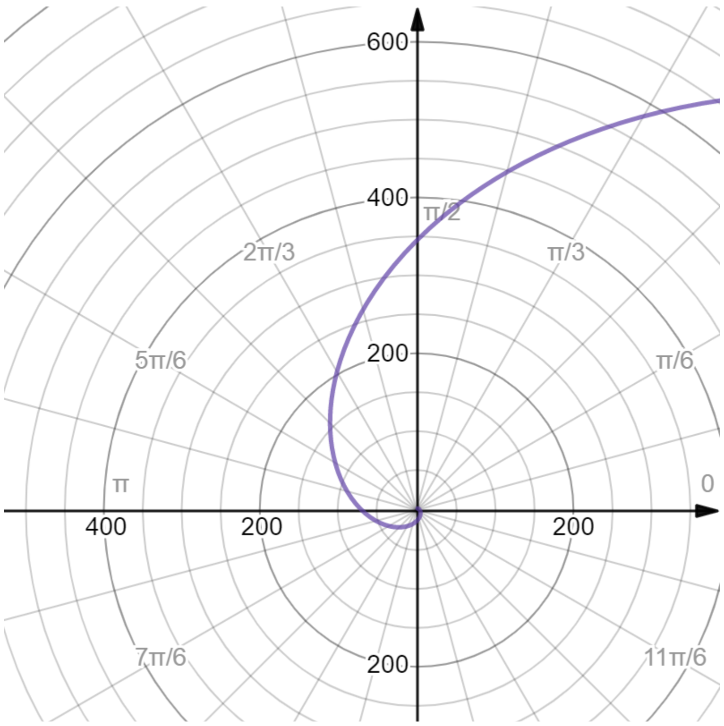

Рис.6. График линии $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$.

Сделаем рисунок линии при $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$:

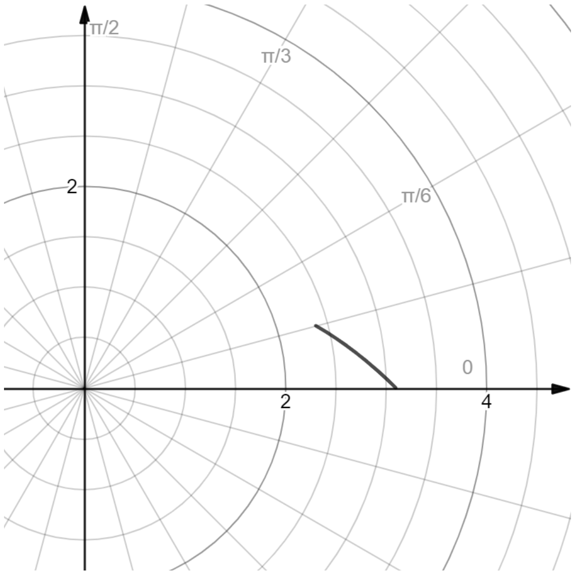

Рис.6. График линии $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ при $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$.

Длина данной линии вычисляется с помощью определённого интеграла:

$$L=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\left(\left(e^t(\cos t+\sin t)\right)'\right)^2+\left(\left(e^t(\cos t-\sin t)\right)'\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\left(\left(e^t(\cos t+\sin t)\right)+\left(e^t(-\sin t+\cos t)\right)\right)^2+\left(\left(e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)\right)\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\left(e^t 2\cos t\right)^2+\left(-e^t 2\sin t\right)^2}\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4e^{2t}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2e^t dt=2e^t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=2e^{\frac{\pi}{4}}-2e^{\frac{\pi}{6}}=1.01$$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера:
https://www.desmos.com/calculator/auwzojqw6e

Задача 5. Найти длину кривой, заданной в полярной системе координат

1 $\rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}}\quad(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

2 $\rho=2e^{\frac{4\varphi}{3}}\quad(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

3 $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi}\quad(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

4 $\rho=5e^{\frac{5\varphi}{12}}\quad(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

5 $\rho=6e^{\frac{12\varphi}{5}}\quad(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$

6 $\rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}}\quad(0\le\varphi\le\frac{\pi}{3})$

7 $\rho=4e^{\frac{4\varphi}{3}}\quad(0\le\varphi\le\frac{\pi}{3})$

8 $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi}\quad(0\le\varphi\le\frac{\pi}{3})$

9 $\rho=5e^{\frac{5\varphi}{12}}\quad(0\le\varphi\le\frac{\pi}{3})$

10 $\rho=12e^{\frac{12\varphi}{5}}\quad(0\le\varphi\le\frac{\pi}{3})$

11 $\rho=1-\sin\varphi$
$(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6})$

12 $\rho=2(1-\cos\varphi)\quad(-\pi\le\varphi\le-\frac{\pi}{2})$

13 $\rho=3(1+\sin\varphi)\quad(-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le 0)$

14 $\rho=4(1-\sin\varphi)\quad(0\le\varphi\le\frac{\pi}{6})$

15 $\rho=5(1-\cos\varphi)\quad(-\frac{\pi}{3}\le\varphi\le 0)$

16 $\rho=6(1+\sin\varphi)\quad(-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0)$

17 $\rho=7(1-\sin\varphi)\quad(-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6})$

18 $\rho=8(1-\cos\varphi)$
$(-\frac{2\pi}{3}\le\varphi\le 0)$

19 $\rho=2\varphi\quad(0\ge\varphi\le\frac{3}{4})$

20 $\rho=2\varphi\quad(0\le\varphi\le\frac{4}{3})$

21 $\rho=2\varphi\quad(0\le\varphi\le\frac{5}{12})$

22 $\rho=2\varphi\quad(0\le\varphi\le\frac{12}{5})$

23 $\rho=4\varphi\quad(0\le\varphi\le\frac{3}{4})$

24 $\rho=3\varphi\quad(0\le\varphi\le\frac{4}{3})$

25 $\rho=5\varphi\quad(0\le\varphi\le\frac{12}{5})$

26 $\rho=2\cos\varphi\quad(0\le\varphi\le\frac{\pi}{6})$

27 $\rho = 8\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$

28 $\rho = 6\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3})$

29 $\rho = 2\sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6})$

30 $\rho = 8\sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$

<u>Пример решения и оформления (вариант №30)</u>

Вычислить длину плоской фигуры, ограниченной линиями $\rho = 8\sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$.

Решение:

Сделаем рисунок, на котором отметим заданную линию на всей области определения - это окружность с центром в точке (0,4) и радиусом 4:

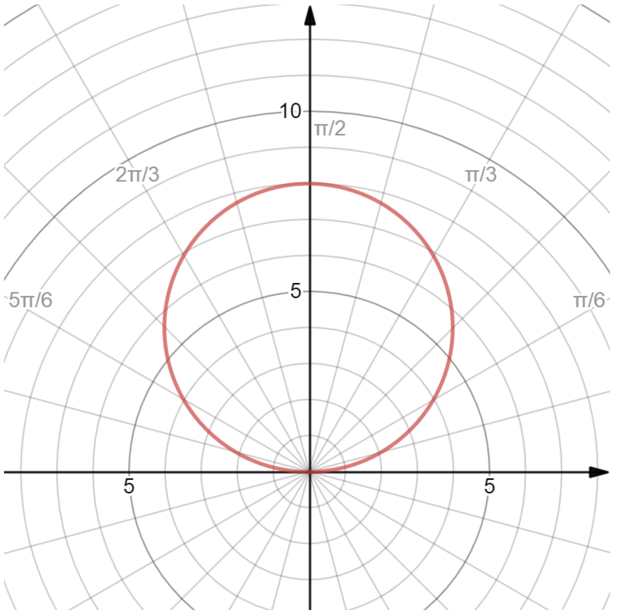

Рис.7. График кривой $\rho = 8\sin\varphi$ на всей области определения.

Сделаем рисунок, на котором отметим заданную линию при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$:

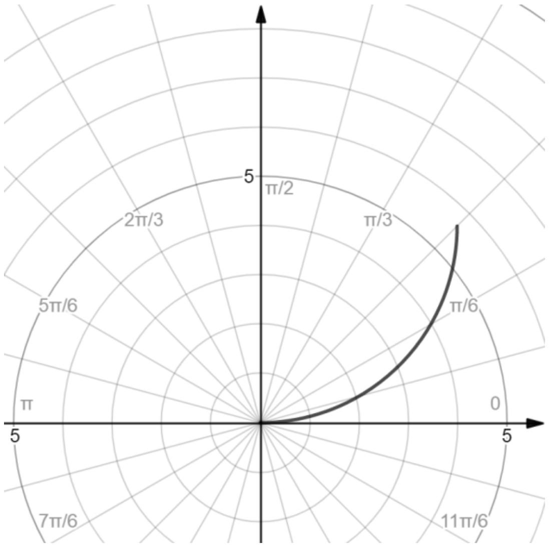

Рис.8. График кривой $\rho = 8\sin\varphi$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Длина данной линии вычисляется с помощью определённого интеграла:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\left(8\sin\theta\right)\right)'^{2} + \left(8\sin\theta\right)^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{64\cos^2\theta + 64\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\,d\theta = 8\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi$$

Аналогичный результат получен и с помощью компьютера: https://www.desmos.com/calculator/ek8ebfwy3s