



Федеральное агентство морского и речного транспорта  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА**  
имени адмирала С. О. МАКАРОВА

---

**Институт ВОДНОГО ТРАНСПОРТА**  
*Кафедра основ инженерного проектирования*

**С. А. Завгородний**

# **СТАТИКА**

Учебно-методическое пособие  
для самостоятельной работы студентов по курсу  
«Теоретическая механика»

Санкт-Петербург  
Издательство ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова  
2018

УДК 531.2

ББК 22.21

3-12

- 3-12 **Завгородний, С. А.** Статика: учеб.-метод. пособие для самостоятельной работы студентов / С. А. Завгородний. — СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2018. — 32 с.

Пособие соответствует дисциплине «Теоретическая механика». Приведены варианты расчетно-графических задания «Определение реакций связей и сил взаимодействия между элементами составной конструкции под действием плоской системы сил» и пример решения подобной типовой задачи статики с необходимыми методическими указаниями и рекомендациями для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов очной формы обучения следующих направлений бакалавриата: 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»; 26.03.02 «Кораблестроение, океанотехника, системотехника объектов морской инфраструктуры»; 08.03.01 «Строительство»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 20.03.02 «Природообустройство и водопользование»; 23.03.01 «Технология транспортных процессов»; 26.03.01 «Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства».

Рекомендовано к изданию на заседании кафедры основ инженерного проектирования. Протокол № 6 от 06 февраля 2018 г.

*Рецензент*

Иванов А. Н., канд. техн. наук, доцент (ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»).

© ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова», 2018

© Завгородний С. А., 2018

## **1. Общие требования к выполнению и оформлению расчетно-графического задания**

1.1. Задание оформляется на стандартных листах писчей бумаги формата А4 и содержит перечень исходных данных и расчетную часть с необходимыми краткими пояснениями, рисунками.

1.2. Задание сшивается в тетрадь с титульным листом, образец которого приведен в **приложении А**.

1.3. Варианты задания с чертежами составной конструкции приведены в **приложении Б**.

1.4. Таблица исходных численных данных по внешней нагрузке, действующей на конструкцию, приведена в **приложении В**.

## **2. Расчетно-графическое задание**

### **«Определение реакций связей и сил взаимодействия между элементами составной конструкции под действием плоской системы сил»**

#### **Тема: Равновесие твердого тела под действием произвольной плоской системы сил**

Для изучения этой темы проработайте теоретический материал, содержащийся в параграфах 5.1 – 5.4 учебника [1] т. 1 или соответствующих параграфах другого учебника.

#### **2.1. Вопросы для самоконтроля**

- 2.1.1. Что понимают под системой сил в статике?
- 2.1.2. Какая система сил называется произвольной плоской?
- 2.1.3. Как формулируются аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил?
- 2.1.4. Как формулируется принцип освобожденности от связей?
- 2.1.5. Какие задачи в статике называются статически определимыми?
- 2.1.6. Какие задачи в статике называются статически неопределимыми?
- 2.1.7. Как взаимодействуют между собой абсолютно твердые тела?
- 2.1.8. Как определяется реакция неподвижного цилиндрического шарнира?
- 2.1.9. Как определяется реакция подвижного цилиндрического шарнира?
- 2.1.10. Как определяется реакция связи в случае жесткой заделки конца балки?
- 2.1.11. Как определяется момент силы относительно точки (центра)?
- 2.1.12. Как определяется величина момента силы относительно точки?
- 2.1.13. Как определяется плечо силы относительно точки?
- 2.1.14. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
- 2.1.15. Что такое пара сил?
- 2.1.16. Как определяется направление и величина момента пары сил?

## 2.2. Содержание задания

В приложении Б приведены варианты схем составных конструкций из двух балок, находящихся под действием внешней нагрузки и определенным образом закрепленных посредством опор. Размеры элементов конструкций заданы в метрах.

Исходные данные для расчета, связанные с численными значениями внешней нагрузки приведены в приложении В.

Требуется определить величину опорных реакций в точках А и В, а также силу взаимодействия в точке С.

## 2.3. План решения задачи

2.3.1. Особенность решения задачи, связанной с определением реакций связей и сил взаимодействия между элементами составной конструкции под действием плоской системы сил состоит в том, что число неизвестных при составлении системы уравнений равновесий всей конструкции как единого целого превышает число уравнений равновесия, т. е. задача будет статически неопределимой.

В данном случае статическая неопределимость задачи может быть раскрыта путем мысленного деления конструкции на отдельные части с учетом характера их соединения и последующим составлением уравнений равновесия каждой из частей конструкции с учетом сил взаимодействия между ними.

2.3.2. На отдельном листе формата А4 начертить систему тел (конструкцию) в сборе с внешней нагрузкой согласно варианту задания. Ниже начертить правую и левую часть конструкции и конструкцию в сборе, с действующими на эти объекты равновесия активными силами, реакциями связей и силами взаимодействия между отдельными частями конструкции.

Для того чтобы правильно определить систему сил, действующих на объект равновесия в каждом из рассматриваемых случаев, следует воспользоваться принципом освобожденности от связей.

2.3.3. Классифицировать характер системы сил действующих на объекты равновесия в каждом из рассматриваемых случаев как произвольную плоскую систему сил и сформулировать в общем виде аналитические условия равновесия для данной системы сил. Записать эти условия в математической форме.

2.3.4. Показать на рисунках направления координатных осей.

2.3.5. На основе аналитических условий равновесия составить систему уравнений равновесия для левой, а затем правой части конструкции с учетом сил взаимодействия между ними.

2.3.6. Решить полученную систему алгебраических уравнений и определить составляющие опорных реакций и силы взаимодействия между правой и левой частями конструкции.

2.3.7. Для проверки найденных значений опорных реакций составить систему уравнений равновесия для всей конструкции как единого твердого тела.

2.3.8. Подставить в эту систему уравнений найденные значения составляющих опорных реакций и убедиться в том, что левые части уравнений обращаются в ноль. В противном случае оценить погрешность расчета, которая не должна превышать 1 %.

#### 2.4. Пример выполнения задания

Определение реакций связей и сил взаимодействия между элементами составной конструкции при действии на нее произвольной плоской системы сил.

Схема составной конструкции приведена на рис. 1.

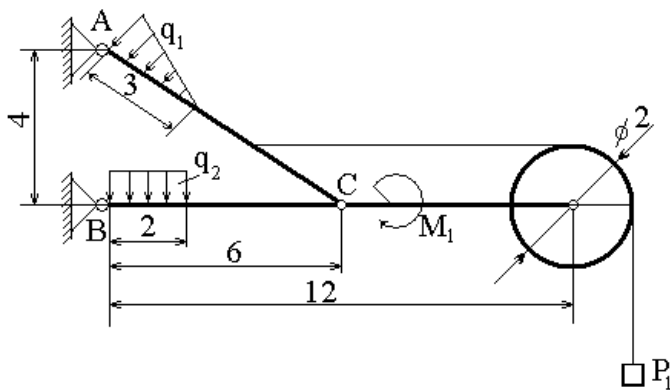


Рис. 1

**Дано:**

$$q_1 = 6 \text{ кН/м}; q_2 = 10 \text{ кН/м};$$

$$P_1 = 6 \text{ кН}; M_1 = 12 \text{ кНм}.$$

Определить реакции связей  $R_A$  и  $R_B$  в точках  $A$  и  $B$  и силу взаимодействия  $R_C$  между частями конструкции в точке  $C$ .

## Решение

2.4.1. Действие распределенной нагрузки на части конструкции заменим действием эквивалентной ей сосредоточенной силой  $\vec{Q}$ . Величину, направление действия и положение линии действия которой определим по общему правилу. На балку  $AC$ , таким образом, будет действовать сила

$$Q_1 = \frac{1}{2} q_1 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9, \text{ кН},$$

линия действия которой проходит через центр тяжести треугольника распределенной нагрузки, а направление действия совпадает с направлением действия этой нагрузки.

На балку  $BD$  будет действовать сила

$$Q_2 = q_2 \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20, \text{ кН},$$

линия действия которой проходит через центр тяжести прямоугольника распределенной нагрузки, а направление действия совпадает с направлением действия этой нагрузки.

Изображаем на рис. 2–4 вектора сил  $\vec{Q}_1$ ,  $\vec{Q}_2$  и указываем на чертежах размеры (расстояния  $a = 1$  м,  $d = 1$  м), определяющие положение их линий действия.

2.4.2. Рассмотрим в качестве объекта равновесия балку  $AC$ . Систему сил, действующих на балку, определяем, используя принцип освобожденности от связей. Реакцию неподвижного цилиндрического шарнира в точке  $A$  представляем как геометрическую сумму двух составляющих опорной реакции  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ . Силу взаимодействия в шарнире  $C$  балки  $AC$  с балкой  $BD$  также ищем как геометрическую сумму двух составляющих реакции  $\vec{X}_C$  и  $\vec{Y}_C$ . Систему сил, действующих на балку  $AC$  и представленную на рис. 2, определяем как произвольную плоскую.

2.4.3. Формулируем и записываем затем в математической форме аналитические условия равновесия для произвольной плоской системы сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0,$$

где  $F_{kx}$  — проекция  $\vec{F}_k$  силы на ось  $x$ ;

$F_{ky}$  — проекция  $\vec{F}_k$  силы на ось  $y$ ;

$(M)_O(\vec{F}_k)$  — момент силы  $\vec{F}_k$  относительно точки  $O$ .

Составляем на основе этих условий систему уравнений равновесия балки  $AC$ . Отметим, что число неизвестных в этой системе уравнений  $X_A, Y_A, X_C, Y_C$  превышает число уравнений равновесия, т. е. задача пока остается статически неопределимой.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_C - X_A - Q_1 \sin \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Y_C - Y_A - Q_1 \cos \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = -Q_1 \cdot a + P_1(h-r) + Y_C \cdot b + X_C \cdot h = 0. \quad (3)$$

Плечи сил  $h = 4$  м,  $b = 6$  м,  $r = 1$  м обозначены на рис. 2 и 3.

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = 0,555;$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} = \frac{6}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = 0,832.$$

Объект равновесия — тело  $AC$

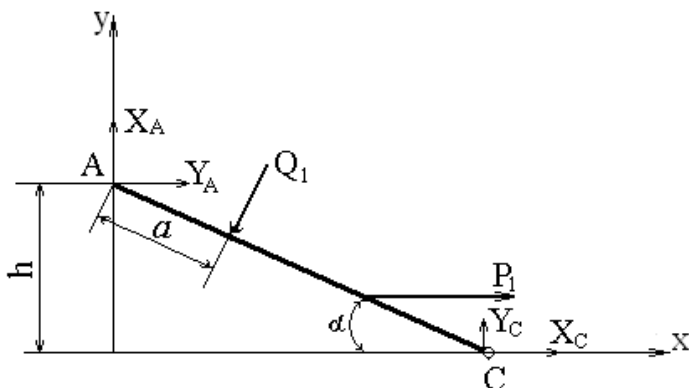


Рис. 2

Объект равновесия — тело  $BC$

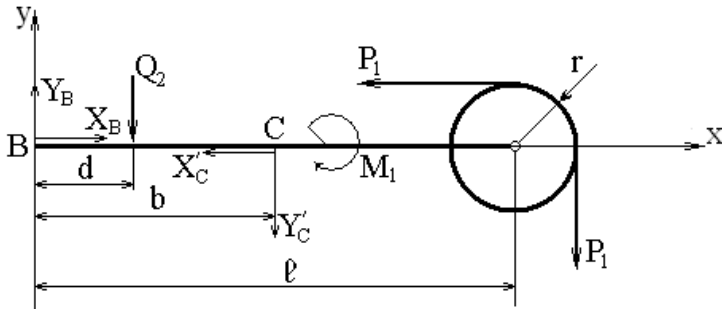


Рис. 3

Объект равновесия — вся система

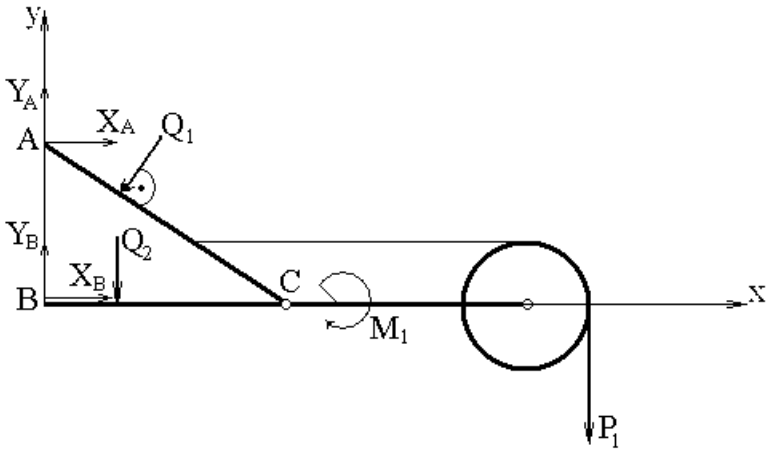


Рис. 4

2.4.5. Рассмотрим в качестве объекта равновесия балку  $BD$ . Систему сил, действующих на балку, определяем, используя принцип освобождения от связей. Реакцию неподвижного цилиндрического шарнира в точке  $B$  ищем как геометрическую сумму двух составляющих опорной реакции  $\vec{X}_B$  и  $\vec{Y}_B$ . Силу взаимодействия в шарнире  $C$  балки  $BD$  с балкой  $AC$  также определяем как геометрическую сумму двух составляющих реакции  $\vec{X}'_C$  и  $\vec{Y}'_C$ . Учитываем, что согласно одной из аксиом статики при действии одного твердого тела на другое всегда имеет место равное по величине и противоположное по направлению противодействие. Тогда

$$\vec{X}'_C = -\vec{X}_C; \vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C.$$

Систему сил, действующих на балку  $BD$  и представленную на рис. 3, определяем как произвольную плоскую.

2.4.6. Составляем систему уравнений равновесия балки  $BD$ .

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_B - X_C - P_1 = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Y_B - Y_C - Q_2 - P_1 = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = -Q_2 \cdot d - Y_C \cdot b - P_1(l+r) + P_1 \cdot r - M_1 = 0. \quad (6)$$

Плечи сил  $d = 1$  м,  $l = 12$  м обозначены на рис. 3.

2.4.7. В результате получаем систему из шести уравнений с шестью неизвестными (1) – (6). Задача становится статически определимой.

2.4.8. Решаем полученную систему уравнений:

из уравнения (6)

$$Y_C = -(M_1 + Q_2 \cdot d + P_1 \cdot l) / b = -(12 + 20 \cdot 1 + 6 \cdot 12) / 6 = -17,33 \text{ кН};$$

из уравнения (5)

$$Y_B = Y_C + Q_2 + P_1 = -17,33 + 20 + 6 = 8,67 \text{ кН};$$

из уравнения (3)

$$X_C = -(P_1(h-r) - Q_1 \cdot a + Y_C \cdot b) / h = -(6 \cdot 3 - 9 \cdot 1 - 17,33 \cdot 6) / 4 = 23,75 \text{ кН};$$

из уравнения (4)

$$X_B = X_C + P_1 = 23,75 + 6 = 29,75 \text{ кН};$$

из уравнения (2)

$$Y_A = -Y_C + Q_1 \cos \alpha = 17,33 + 9 \cdot 0,832 = 24,82 \text{ кН};$$

из уравнения (1)

$$X_A = -X_C + Q_1 \sin \alpha - P_1 = -23,75 + 9 \cdot 0,555 - 6 = -24,71 \text{ кН}.$$

2.4.9. Проверим правильность определения значений неизвестных составляющих реакций связей. Для этого составим систему уравнений равновесия всей конструкции как единого твердого тела. Для уравнения моментов выберем точку  $C$ , с тем, чтобы там было представлено наибольшее число проверяемых составляющих опорных реакций в точках  $A$  и  $B$ .

В полученную систему уравнений подставим найденные значения неизвестных составляющих опорных реакций  $X_A, X_B, Y_A, Y_B$ .

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_A + X_B - Q_1 \sin \alpha = -24,82 + 29,75 - 9 \cdot 0,555 = -0,065 \text{ кН};$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Y_A + Y_B - Q_2 - Q_1 \cos \alpha - P_1 = 24,82 + 8,67 - 20 - 9 \cdot 0,832 - 6 = 0,002 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) &= -Y_B \cdot b - Y_A \cdot b - X_A \cdot h + Q_1 \cdot (\sqrt{b^2 + h^2} - a) + Q_2 \cdot (b - d) - \\ &- M_1 - P_1 \cdot (l - b + r) = 8,67 \cdot 6 - 24,82 \cdot 6 + 24,71 \cdot 4 + 9 \cdot (7,211 - 1) + \\ &+ 20 \cdot (6 - 1) - 12 - 6 \cdot (12 - 6 + 1) = -0,24 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Полученные значения в левых частях уравнений проверки укладываются в допустимую погрешность.

2.4.10. По найденным значениям составляющих реакций связей найдем модули полных реакций опор  $R_A$ ,  $R_B$  и силы взаимодействия  $R_C$  в шарнире  $C$ :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{24,71^2 + 24,82^2} = 35,02 \text{ кН};$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{29,75^2 + 8,67^2} = 31 \text{ кН};$$

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{23,75^2 + 17,33^2} = 29,4 \text{ кН}.$$

**Ответ:**  $R_A = 35,02 \text{ кН};$

$$R_B = 31 \text{ кН};$$

$$R_C = 29,4 \text{ кН}.$$

## Рекомендуемая литература

1. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики: учебник для вузов. — 8-е изд., стер. / Н. В. Бутенин, Я. А. Лунц, Д. Р. Меркин. — СПб.: Изд-во «Лань», 2006. — 736 с.
2. Макаров А. А. Статика: учеб. задания и метод. указания по их выполнению с применением ЭВМ / А. А. Макаров — СПб.: Изд-во СПбГУВК, 1994. — 76 с.

**Образец титульного листа**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО  
ТРАНСПОРТА

Федеральное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Государственный университет морского и речного флота  
имени адмирала С.О.Макарова»

---

Кафедра основ инженерного проектирования

Расчётно-графическое задание

Определение реакций связей и сил взаимодействия между элементами со-  
ставной конструкции под действием плоской системы сил

Пояснительная записка

Вариант 12

Студент гр. ГТ-21

Иванов И.И.

Преподаватель

доц., к.т.н.

Петров А.И.

Санкт-Петербург  
2018

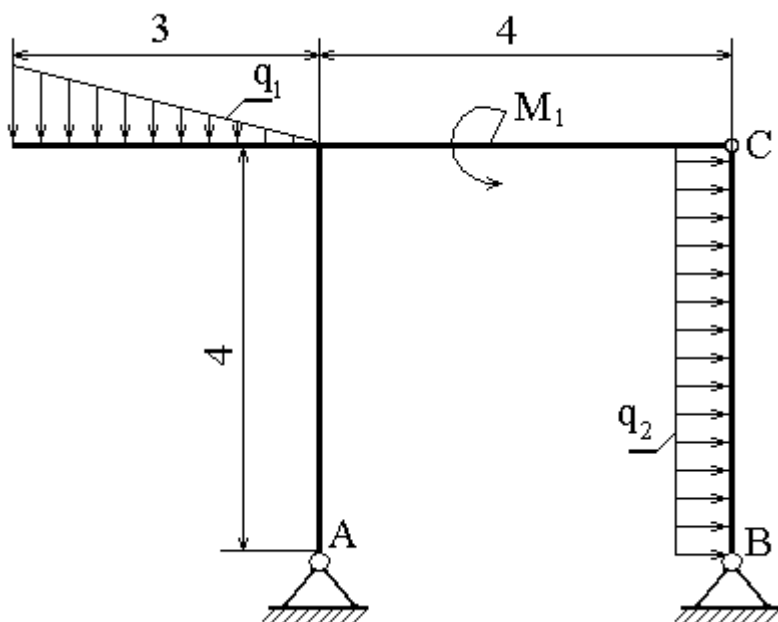


Рис. Б1

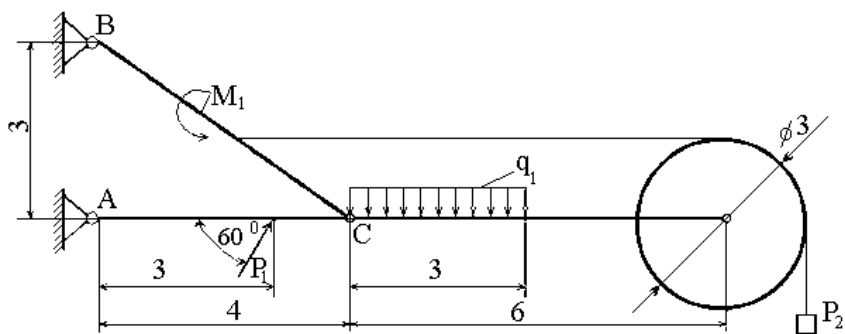


Рис. Б2

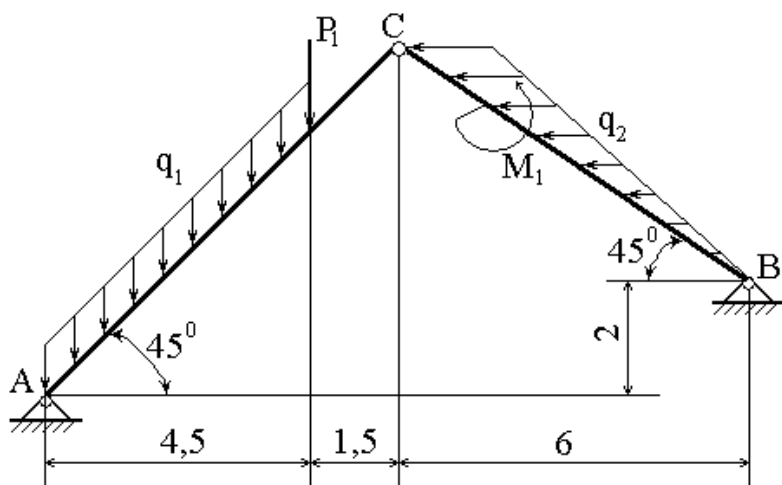


Рис. Б3

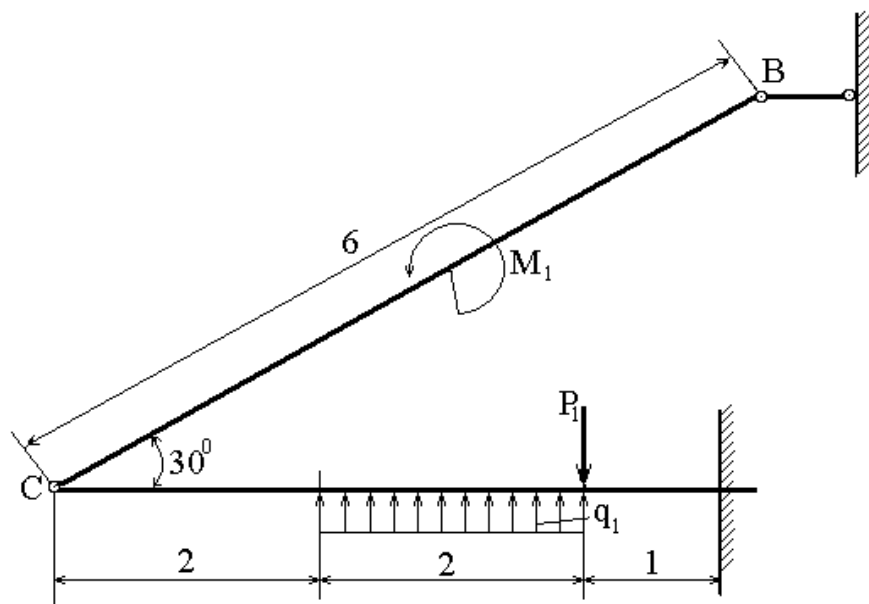


Рис. Б4

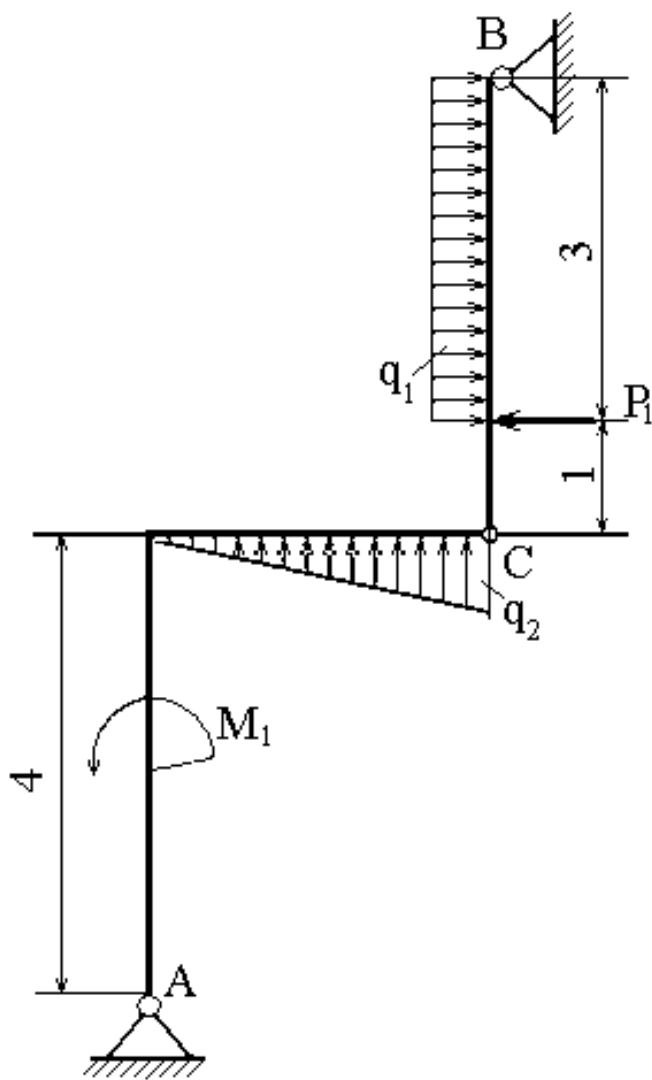


Рис. Б5

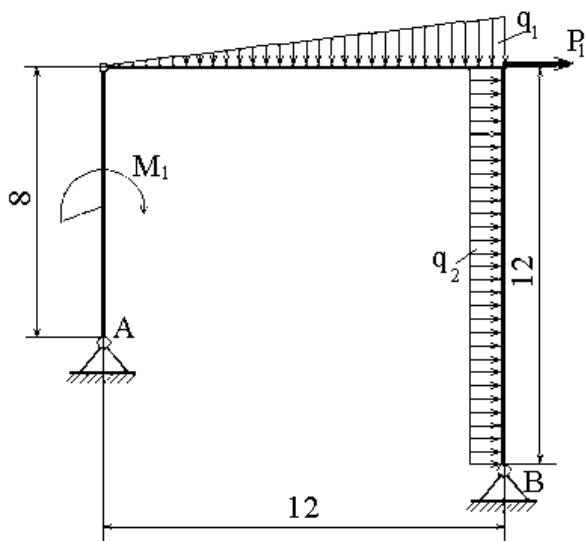


Рис. Б6

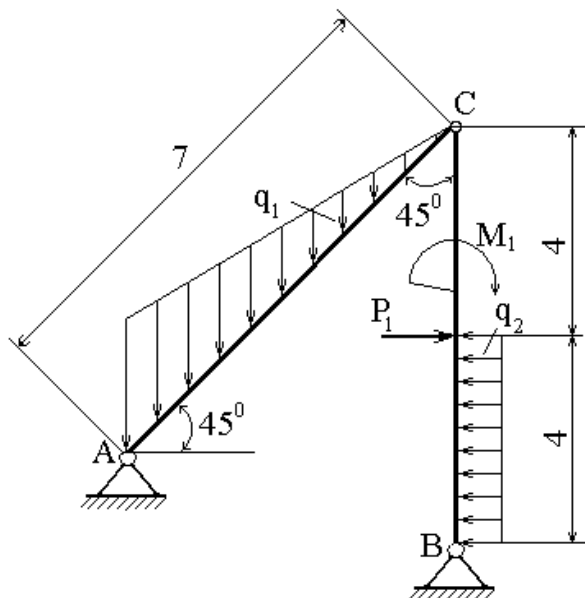


Рис. Б7

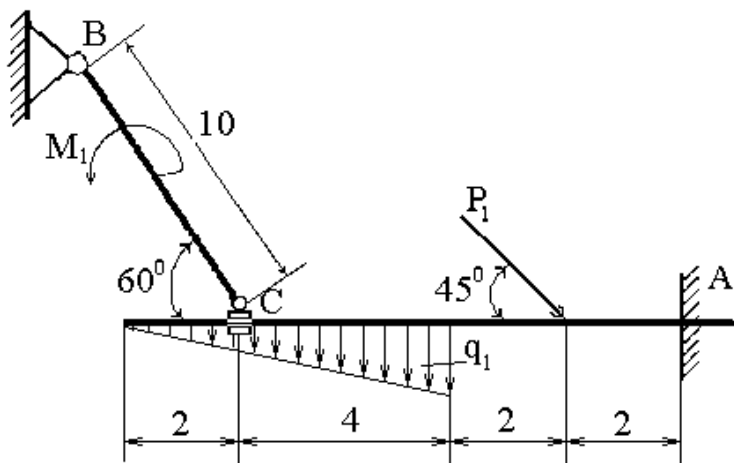


Рис. Б8

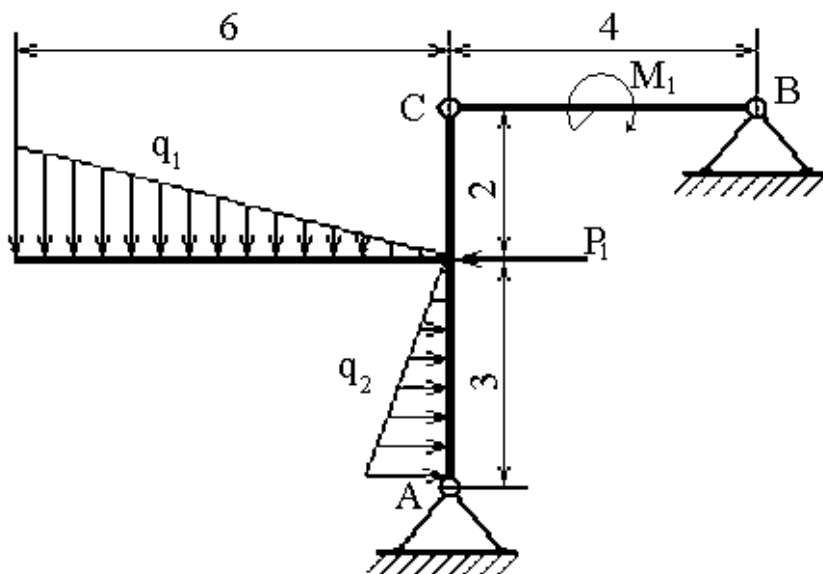


Рис. Б9

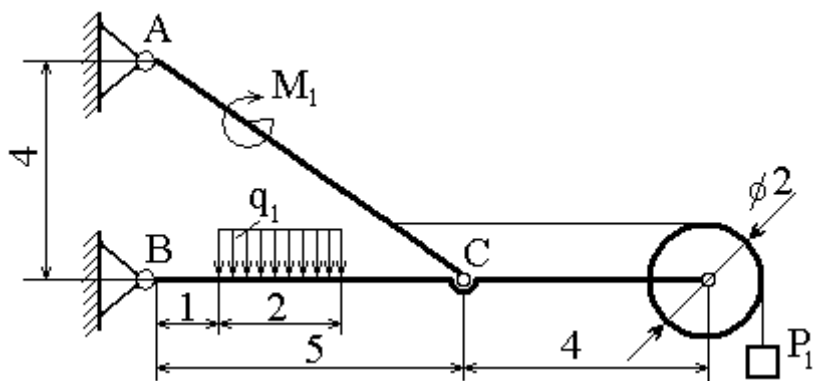


Рис. Б10

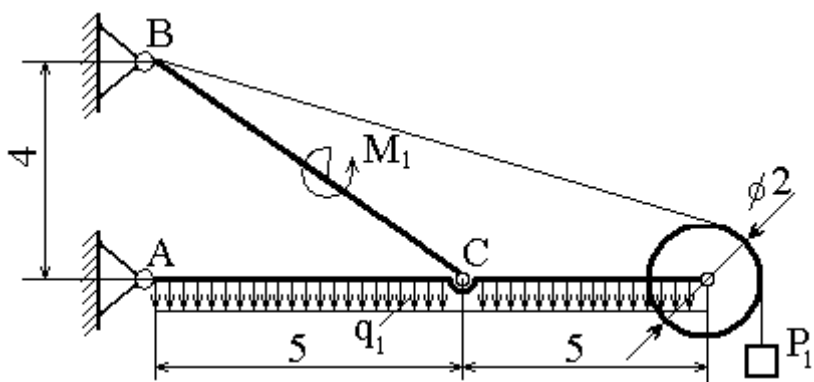


Рис. Б11

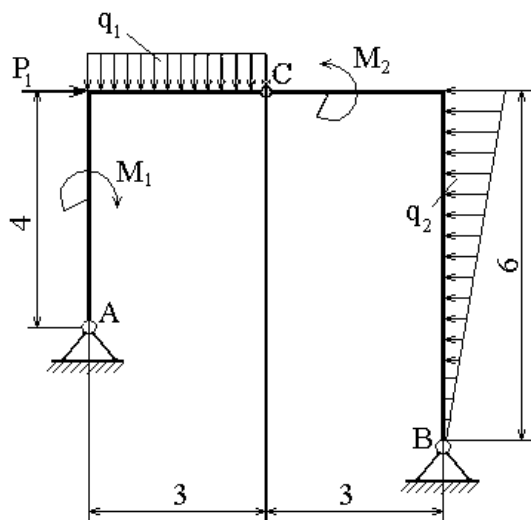


Рис. Б12

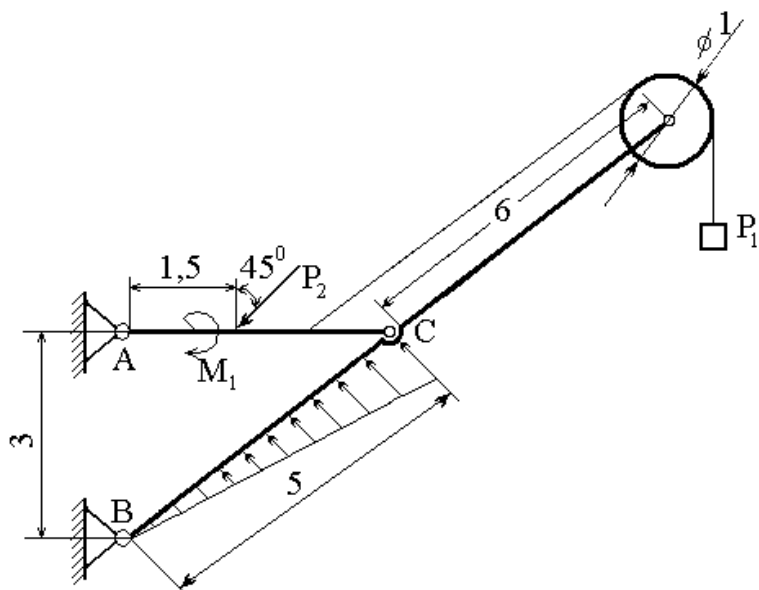


Рис. Б13

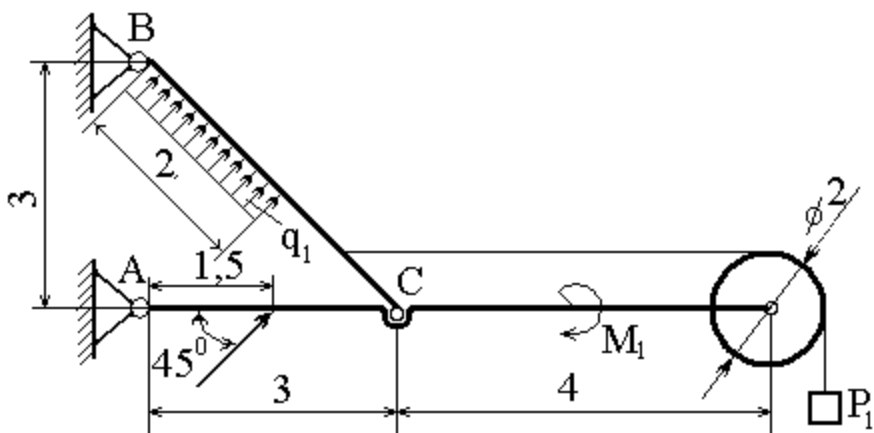


Рис. Б14

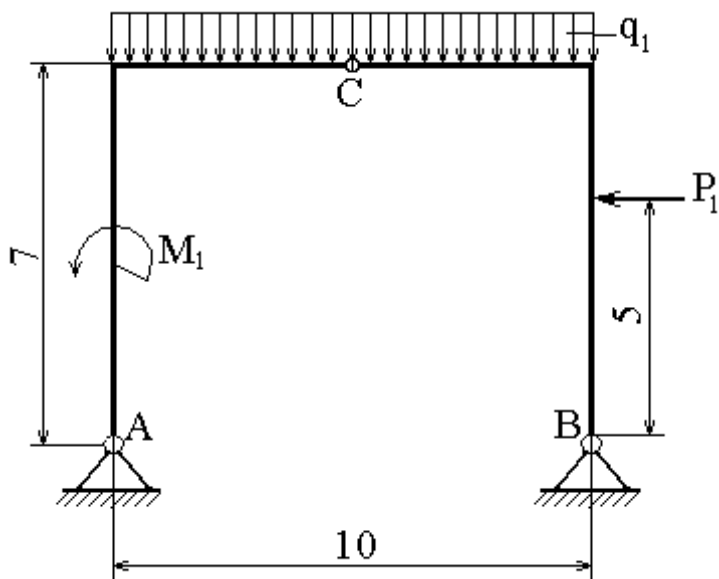


Рис. Б15

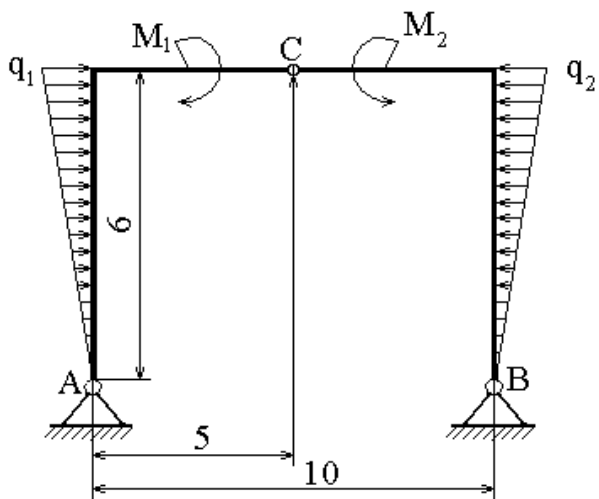


Рис. Б16

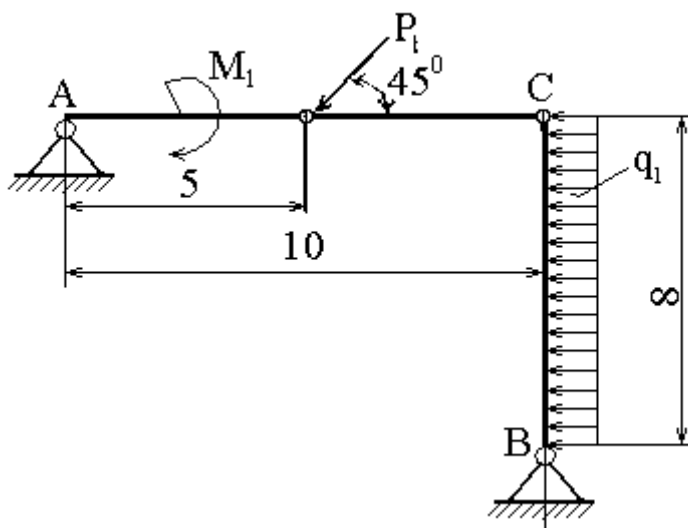


Рис. Б17

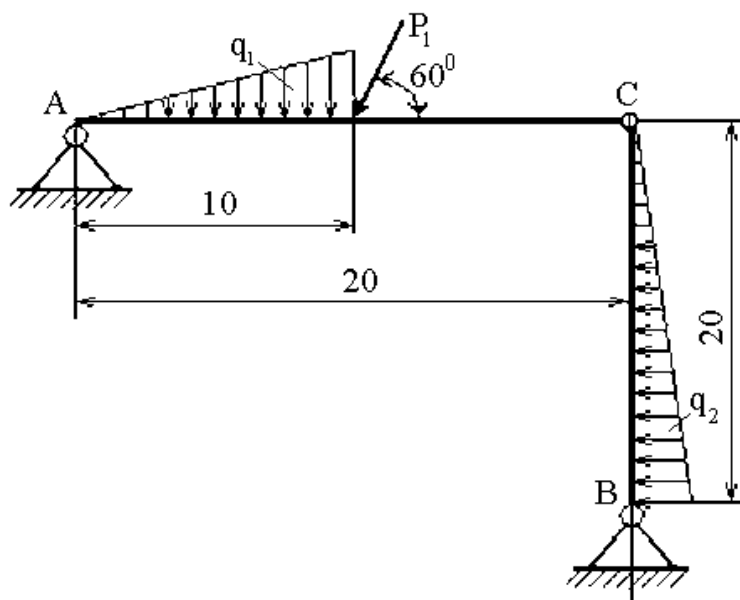


Рис. Б18

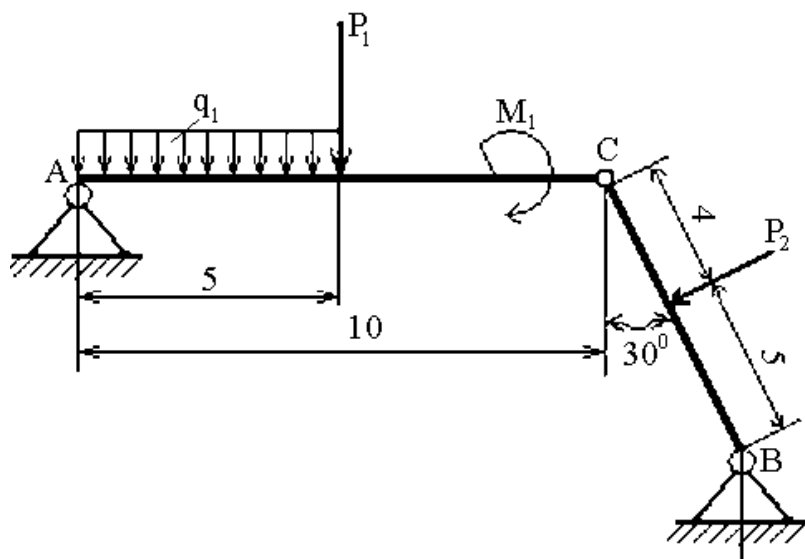


Рис. Б19

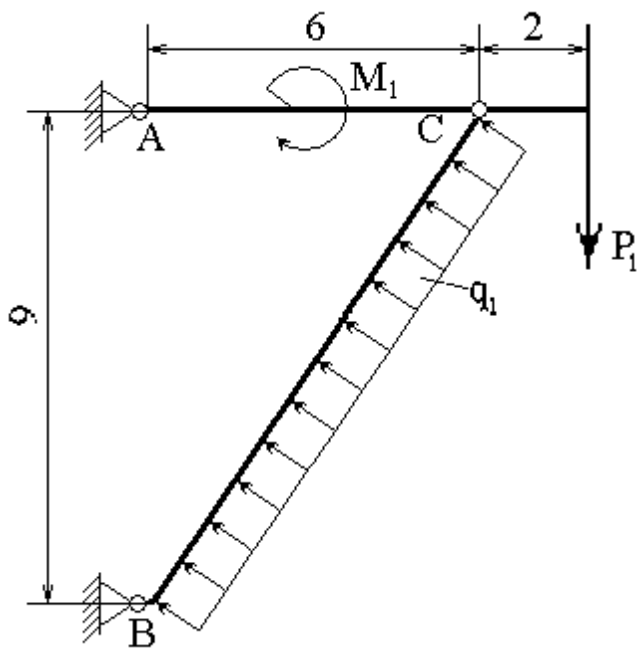


Рис. Б20

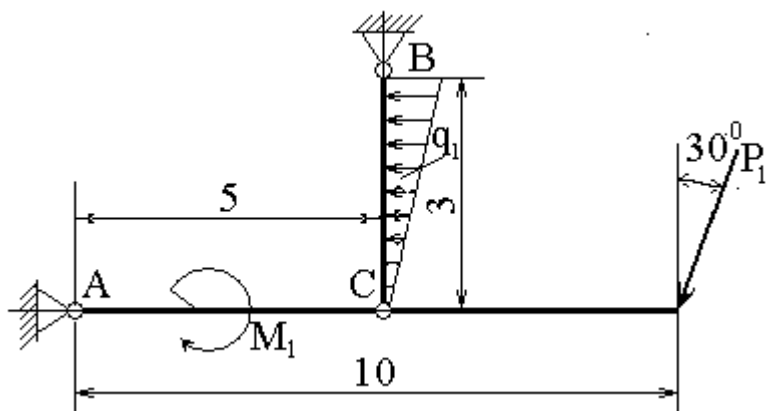


Рис. Б21

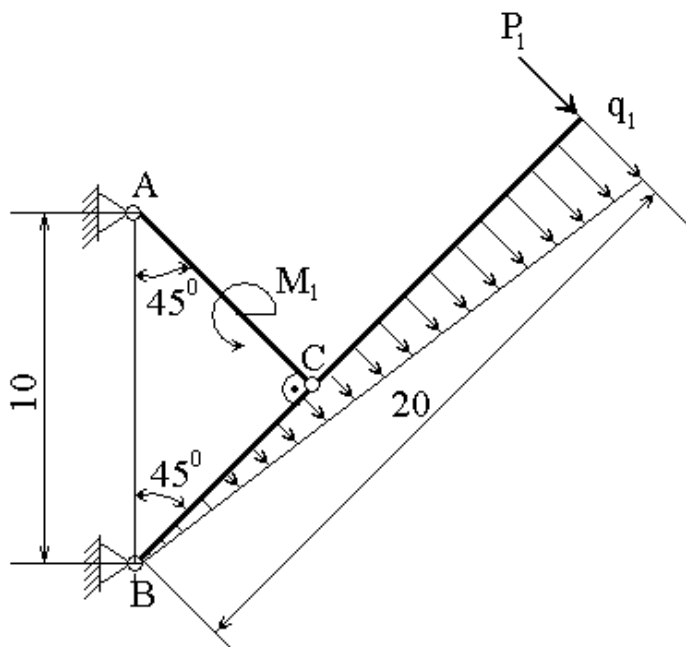


Рис. Б22

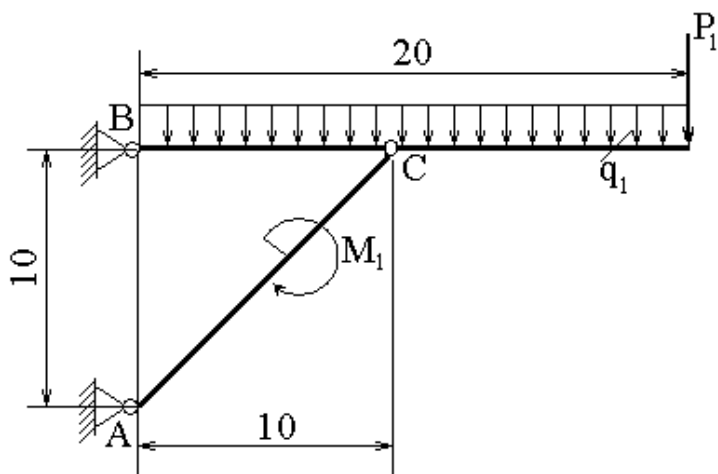


Рис. Б23

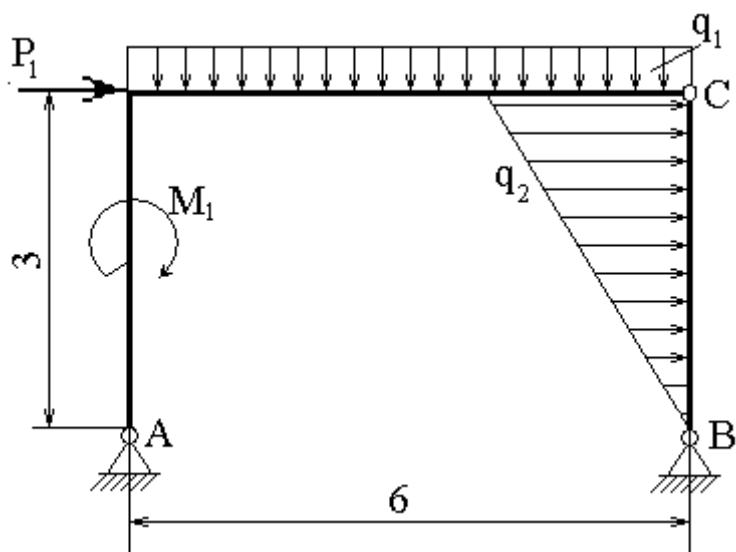


Рис. Б24

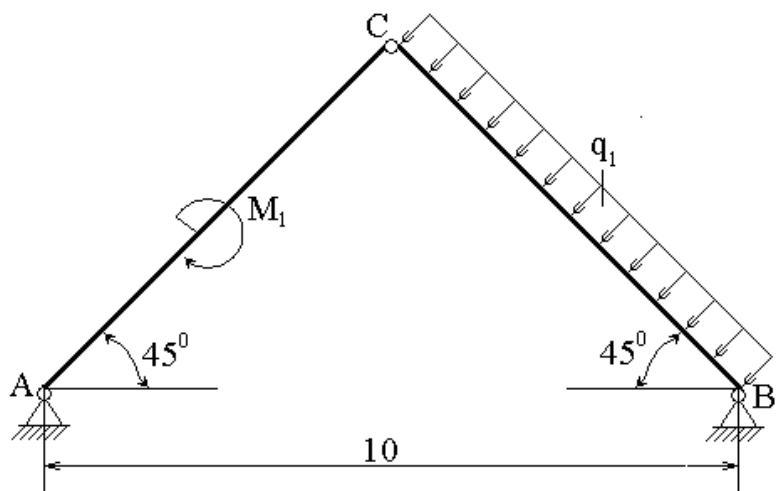


Рис. Б25

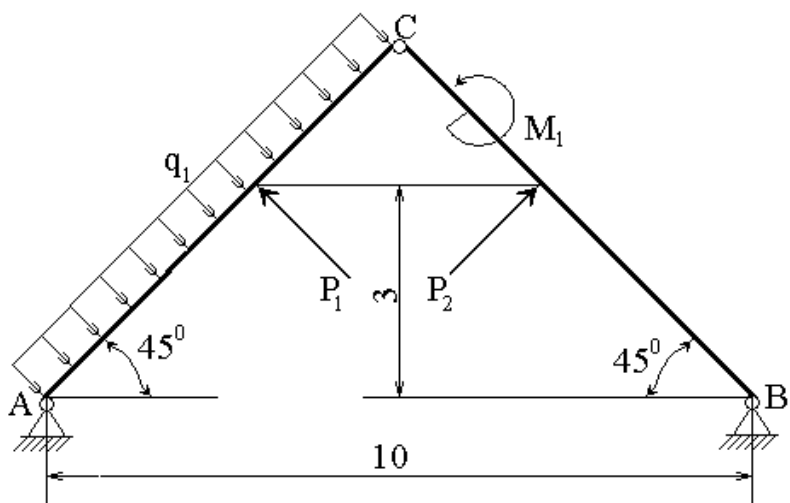


Рис. Б26

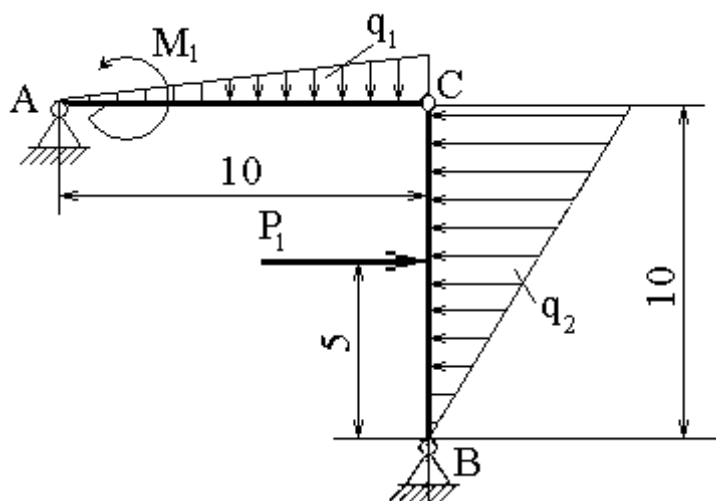


Рис. Б27

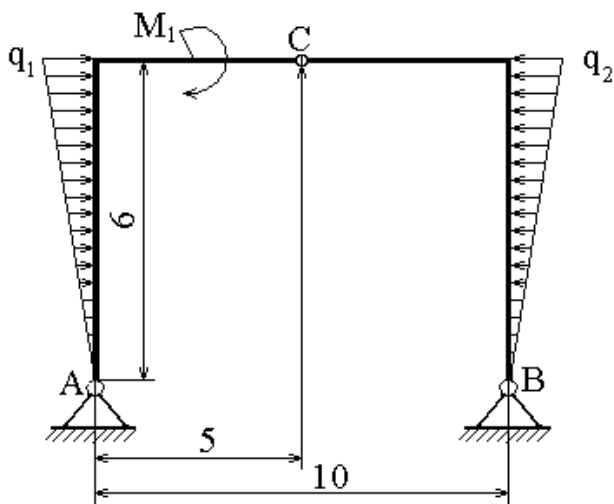


Рис. Б28

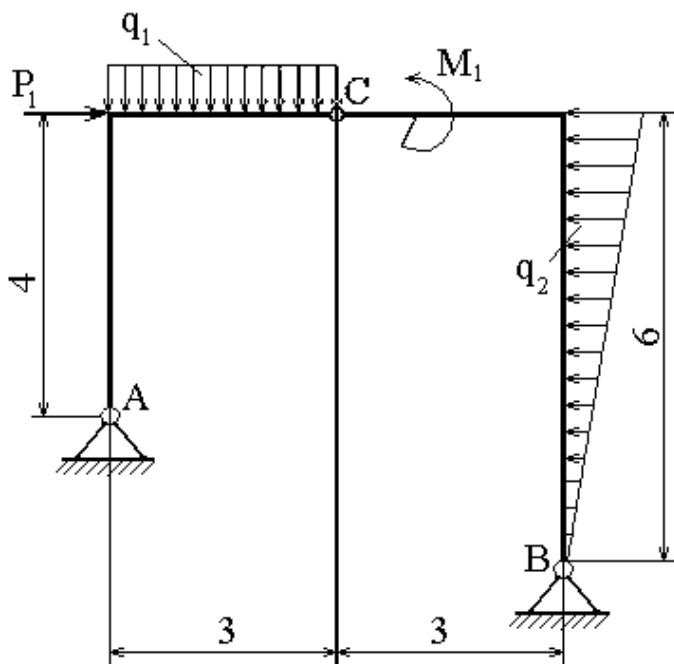


Рис. Б29

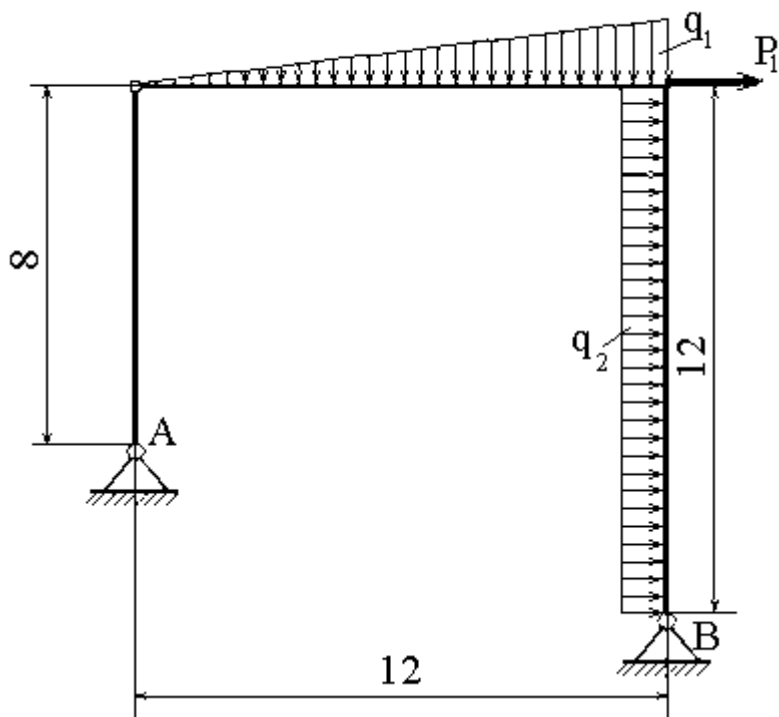


Рис. Б30

## Приложение В

Номера вариантов	Обозначение величин и единицы измерения					
	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	$M_1$	$M_2$
	кН	кН	кН/м	кН/м	кНм	кНм
1	6	12	6	10	12	4
2	12	6	10	6	4	12
3	10	4	8	4	16	20
4	20	10	4	8	12	4
5	10	20	8	6	10	10
6	15	15	10	8	12	10
7	10	10	6	10	8	12
8	20	20	10	15	10	20

## Содержание

1. Общие требования к выполнению и оформлению расчетно-графического задания . . . . .	3
2. Расчетно-графическое задание «Определение реакций связей и сил взаимодействия между элементами составной конструкции под действием плоской системы сил» . . . . .	4
2.1. Вопросы для самоконтроля . . . . .	4
2.2. Содержание задания . . . . .	5
2.3. План решения задачи . . . . .	5
2.4. Пример решения задания . . . . .	6
Рекомендуемая литература . . . . .	12
Приложение А . . . . .	13
Приложение Б . . . . .	14
Приложение В . . . . .	30

Учебное издание

Завгородний Сергей Александрович, канд. техн. наук, доцент

## Статика

Учебно-методическое пособие  
для самостоятельной работы студентов



198035, Санкт-Петербург, Межевой канал, 2  
Тел. 812-748-97-19, 748-97-23  
e-mail: izdat@gumrf.ru

*Публикуется в авторской редакции*

---

Ответственный за выпуск  
Компьютерная верстка

Сатикова Т. Ф.  
Тюленева Е. И.

Подписано в печать 14.05.2018  
Формат 60 90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman  
Усл. печ. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ № 206/18