

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ.

1. Введение.

1.1. Уравнения передачи и параметры четырехполосников

Четырехполосник имеет две пары зажимов, с помощью которых четырехполосник подключается к внешней цепи. Режим работы четырехполосника определяется напряжениями U_1, U_2 и токами I_1, I_2 на его входных и выходных зажимах (рис.1).

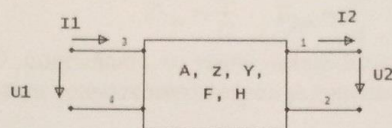


Рис.1. Схема четырехполосника.

Токи и напряжения могут быть представлены в виде операторных изображений или комплексных амплитуд. Связь между напряжениями и токами на входе и выходе четырехполосника дается системой линейных уравнений, форма которой определяется тем, какие величины принимаются зависимыми и какие независимыми. Наиболее распространенными являются Z, Y, A - форма уравнений. Здесь Z, Y матрицы сопротивлений и проводимостей, A - матрица обобщенных параметров.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Между матрицами Z, Y, A существует однозначная связь. Параметры матриц определяются расчетным путем по известной структуре цепи или экспериментально.

Эти параметры используются при анализе цепей, представленных в укрупненном виде. Детали структуры цепей, образующих четырехполосники, учитываются коэффициентами уравнений (1).

1.2. A -уравнения четырехполосников.

Для определения параметров четырехполосников используются опыты холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ).

Из опыта ХХ определяются параметры A и C

$$A = \frac{U_1}{U_{2xx}} \Big|_{I_2=0} \quad C = \frac{I_{1xx}}{U_{2xx}} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{1xx} = \frac{U_1}{I_{1xx}} = \frac{A}{C} \quad (2)$$

Здесь Z_{1xx} - входное сопротивление ненагруженного четырехполосника.

Опыт КЗ позволяет определить параметры B и D

$$B = \frac{U_1}{I_{2кз}} \Big|_{U_2=0} \quad D = \frac{I_{1кз}}{I_{2кз}} \Big|_{U_2=0} \quad Z_{1кз} = \frac{U_1}{I_{1кз}} = \frac{B}{D} \quad (3)$$

Здесь $Z_{1кз}$ - входное сопротивление четырехполосника в режиме КЗ выходных зажимов.

При экспериментальном определении параметров в режиме КЗ используется пониженное значение напряжения $U_1 = U_{1кз}$, при котором входной ток равен номинальному току электротехнического устройства.

Для взаимных четырехполюсников характерно равенство взаимных проводимостей $Y_{12} = Y_{21}$ и взаимных сопротивлений $Z_{12} = Z_{21}$. При использовании A - параметров условие взаимности записывается в виде

$$AD - BC = 1 \quad (4)$$

Из выражения (5) следует, что число независимых A -параметров равно трем. При обратном питании четырехполюсника обобщенная матрица имеет вид

$$A' = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \quad (5)$$

Тогда с учетом формул (3) и (4) выражения для входных сопротивлений со стороны вторичных зажимов в режимах ХХ и КЗ принимают вид

$$Z_{2xx} = \frac{D}{C} \quad Z_{2кз} = \frac{B}{A} \quad (6)$$

Если параметры A и D совпадают, то такой четырехполюсник называется симметричным. В этом случае число независимых параметров уменьшается до двух.

1.3 Примеры структур четырехполюсников.

В теории четырехполюсников широко применяются T и Π схемы, показанные на рис.2.

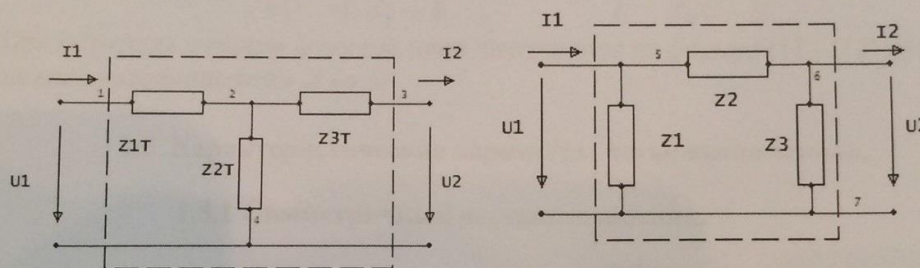


Рис.2 Структура T и Π четырехполюсников.

A -коэффициенты выражаются через сопротивления плеч T -образной схемы следующим образом

$$\underline{A}_T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_{1T}/Z_{2T} & Z_{1T} + Z_{3T} + Z_{1T} \cdot Z_{3T}/Z_{2T} \\ 1/Z_{2T} & 1 + Z_{3T}/Z_{2T} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Определение сопротивлений T схемы по известным коэффициентам четырехполюсника производится по формулам

$$Z_{1T} = \frac{A-1}{C}, \quad Z_{2T} = \frac{1}{C}, \quad Z_{3T} = \frac{D-1}{C} \quad (8)$$

Для Π -образной схемы обобщенная матрица имеет вид

$$\underline{A}_\Pi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_2/Z_3 & Z_2 \\ 1/Z_1 + 1/Z_3 + Z_2/Z_1 \cdot Z_3 & 1 + Z_2/Z_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Определение сопротивлений Π схемы по известным коэффициентам четырехполюсника производится по формулам

$$Z_{1\Pi} = \frac{B}{D-1}, \quad Z_{2\Pi} = B, \quad Z_{3\Pi} = \frac{B}{A-1} \quad (10)$$

По формулам (8), (10) определяются сопротивления T и Π схем, эквивалентных четырехполюсникам с известными A - параметрами.
Для симметричных четырехполюсников имеет место равенство следующих сопротивлений

$$Z_{1T} = Z_{3T} \text{ и } Z_{1\Pi} = Z_{3\Pi}$$

1.4. Определение входной и выходной реакций четырехполюсника

Входная реакция определяется с помощью входной проводимости/входного сопротивления Y_{dr} / Z_{dr} , выходная реакция – с помощью коэффициента передачи напряжения/тока H_u / H_I . Запишем входные функции цепи при питании четырехполюсника слева Y_{dr1}

$$Y_{dr1} = \frac{I_1}{U_1} = \frac{CU_2 + DI_2}{AU_2 + BI_2} = \frac{CZ_H + D}{AZ_H + B}, \quad Z_{dr1} = \frac{1}{Y_{dr1}}, \quad (11)$$

Здесь Z_H - сопротивление нагрузки

Функции передачи напряжения и тока при уравнивании нагрузки $U_2 = Z_H \cdot I_2$ имеют вид

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_H}{A \cdot Z_H + B}, \quad H_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{Z_H C + D} \quad (12)$$

При обратном питании функции цепи получаются из формул (11), (12) путем взаимной замены коэффициентов $A \leftrightarrow D$

1.5 Характеристические параметры четырехполюсника.

1.5.1 Симметричный четырехполюсник.

Характеристическое сопротивление

Если входное сопротивление четырехполюсника Z_{dr} равно сопротивлению нагрузки Z_c , то такое сопротивление Z_c называется характеристическим. Характеристическое сопротивление выражается через обобщенные параметры из уравнения

$$Z_c = \frac{AZ_c + B}{CZ_c + A} \rightarrow Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}} \quad (13)$$

Четырехполюсник, включенный на характеристическое сопротивление, называется согласованным.

Мера передачи/характеристическая постоянная передачи.

Коэффициенты передачи напряжения и тока симметричного и согласованного четырехполюсника получаются из формул (12) при условии $A = D$ и $Z_H = Z_c = \sqrt{B/C}$:

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_H}{A \cdot Z_H + B} = \frac{\sqrt{B/C}}{A \cdot \sqrt{B/C} + B} = \frac{1}{A + \sqrt{B \cdot C}}, \quad (14)$$

$$H_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{Z_H C + D} = \frac{1}{\sqrt{B/C} \cdot C + A} = \frac{1}{A + \sqrt{B \cdot C}}$$

Выражения для коэффициентов передачи напряжения и тока в согласованном режиме имеют одинаковый вид

$$H_U = H_I = H = |H| \cdot \exp(j\varphi_H) = H_a + jH_b$$

Коэффициент деления K и коэффициент передачи H являются обратными величинами

$$K_I = K_U = K = 1/H = A + \sqrt{B \cdot C} = K_m e^{j\beta} \quad (15)$$

Аргумент коэффициента деления $\beta = \psi_{u1} - \psi_{u2}$ определяет изменение фазы, модуль $K_m = |K|$ - ослабление амплитуды входного сигнала.

Выразим модуль коэффициента деления K_m через коэффициент затухания α

$$K_m = e^\alpha, \quad \alpha = \ln(K_m) \quad (16)$$

С учетом формулы (16) комплексный коэффициент \underline{K} выражается через меру передачи четырехполюсника $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\underline{K} = e^\gamma = e^{\alpha + j\beta} \quad (17)$$

Ослабление напряжения/тока в четырехполюсниках принято выражать в логарифмических единицах - неперах и децибелах. Выразим коэффициент ослабления через натуральный логарифм отношения напряжений/токов или отношение полных мощностей

$$\alpha = \ln(K_u) = 0.5 \cdot \ln(K_S), \quad K_u = U_1/U_2, \quad K_S = S_1/S_2 = U_1 I_1 / U_2 I_2 \quad (18)$$

где S_1, S_2 модули полных мощностей на входе и выходе четырехполюсника.

Логарифмической единицей затухания α является непер. Один непер соответствует затуханию в $e = 2.718$ раз. Другой логарифмической единицей является бел, которая определяется через десятичный логарифм

$$K_S = S_1/S_2 = 10^{\alpha_b} \rightarrow \alpha_b = \lg(K_S)$$

На практике используется дольная единица - децибел

$$\alpha_{dB} = 10 \cdot \lg(K_S) \quad K_S = 10^{\alpha_{dB} \cdot 0.1}$$

Связь между двумя логарифмическими единицами дается формулами

$$\alpha_{Np} = 0.5 \cdot \ln(10^{0.1 \alpha_{dB}}) = 0.05 \cdot \ln(10) \cdot \alpha_{dB} = 0.05 \cdot 2.3 \cdot \alpha_{dB} = 0.115 \cdot \alpha_{dB}$$

$$1Np = 8.686 \text{ dB}, \quad 1dB = 0.115 Np. \quad (19)$$

Пример перехода от одних единиц измерения затухания к другим дан в таблице 1.

Таблица 1.

α_{dB}	3	5	7	10	12	17	20	25	30	40
α_{Np}	0.345	0.58	0.81	1.15	1.38	1.96	2.3	2.88	3.45	4.61
K_U	1.41	1.78	2.24	3.16	3.98	7.08	10	17.78	31.62	100
K_S	2	3.16	5.01	10	15.85	50.12	100	316.2	1000	10000

Связь между характеристическими и обобщенными параметрами

В соответствии с формулами (15) и (16) можно записать

$$e^\gamma = A + \sqrt{BC} \quad e^{-\gamma} = \frac{1}{A + \sqrt{BC}} \cdot \frac{A - \sqrt{BC}}{A - \sqrt{BC}} = A - \sqrt{BC} \quad (20)$$

Сложение и вычитание этих выражений дает

$$ch \gamma = A \quad sh \gamma = \sqrt{BC} \quad (21)$$

Учитывая формулы (13) и (21), выразим обобщенные A - параметры через характеристические параметры γ, Z_c

$$A = ch \gamma \quad B = Z_c \cdot sh \gamma \quad C = sh \gamma / Z_c \quad (22)$$

Тогда A - уравнения четырехполюсника примут вид

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch \gamma & Z_c \cdot sh \gamma \\ sh \gamma / Z_c & ch \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Если четырехполюсник согласован $U_2 = Z_c \cdot I_2$, тогда уравнения (23) принимают вид

$$U_1 = e^\gamma \cdot U_2, \quad I_1 = e^\gamma \cdot I_2 \quad (24)$$

Характеристические параметры могут быть выражены через входные сопротивления симметричного четырехполюсника в режиме ХХ и в режиме КЗ:

$$\begin{aligned} Z_{xx} &= A/C & Z_{кз} &= B/A \\ Z_c &= \sqrt{Z_{xx} \cdot Z_{кз}} & th \gamma &= \sqrt{Z_{кз}/Z_{xx}} \end{aligned} \quad (25)$$

1.5.2 Несимметричный четырехполюсник

Характеристические сопротивления

Характеристические сопротивления несимметричного четырехполюсника Z_{c1}, Z_{c2} определяются из следующих условий. Если четырехполюсник нагружен на характеристическое сопротивление Z_{c2} , то его входным сопротивлением является характеристическое сопротивление Z_{c1} . Если при обратной передаче энергии сопротивление нагрузки принять равным характеристическому сопротивлению Z_{c1} , тогда входное сопротивление справа совпадает с характеристическим сопротивлением Z_{c2} .

Используя определение характеристических сопротивлений и выражение для входного сопротивления при прямом и обратном питании, получим два уравнения относительно величин Z_{c1}, Z_{c2}

$$Z_{c1} = \frac{AZ_{c2} + B}{C \cdot Z_{c2} + D} \quad Z_{c2} = \frac{DZ_{c1} + B}{C \cdot Z_{c1} + A}$$

Решение этих уравнений дает выражения

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}} \quad (26)$$

Используя формулы для входных сопротивлений четырехполюсника в режимах ХХ и КЗ и формулы (26), получим другие выражения для характеристических сопротивлений

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{1xx} \cdot Z_{1кз}} \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_{2xx} \cdot Z_{2кз}} \quad (27)$$

Мера передачи

В отличие от симметричного четырехполюсника коэффициенты $K_i = I_1/I_2$ и $K_u = U_1/U_2$ для несимметричного четырехполюсника отличаются. Для согласованного четырехполюсника $Z_H = Z_{c2}$ имеем

$$K_u = A + B/Z_{c2} = A + \sqrt{CA/BD} = \sqrt{A/D} \cdot (\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = e^{\gamma_u} \quad (28)$$

$$K_i = D + Z_{c2} \cdot C = D + \sqrt{BD/CA} = \sqrt{D/A} \cdot (\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = e^{\gamma_i} \quad (29)$$

Мера передачи γ определяется через коэффициент K , равный среднегеометрическому значению коэффициентов деления напряжения и тока K_u и K_i

$$K = \sqrt{K_u \cdot K_i} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} = e^\gamma \quad (30)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = (\gamma_u + \gamma_i)/2 \quad (31)$$

Несимметричный четырехполюсник определяется тремя характеристическими параметрами: Z_{c1}, Z_{c2} и γ . Выразим эти параметры через обобщенные A -параметры. Запишем условие взаимности в виде

$$AD - BC = 1 \rightarrow (\sqrt{AD} + \sqrt{BC})(\sqrt{AD} - \sqrt{BC}) = 1$$

Учитывая формулу (30), получим

$$e^\gamma = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} \quad e^{-\gamma} = \sqrt{AD} - \sqrt{BC}$$

Сложение и вычитание двух последних выражений дает

$$\operatorname{ch} \gamma = \sqrt{AD} \quad \operatorname{sh} \gamma = \sqrt{BC} \quad (32)$$

Из формул (26) следует

$$Z_{c1}/Z_{c2} = A/D \quad Z_{c1} \cdot Z_{c2} = B/C \quad (33)$$

Решение системы уравнений (32), (33) дает искомую матрицу коэффициентов

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \gamma \cdot \sqrt{Z_{c1}/Z_{c2}} & \sqrt{Z_{c1} \cdot Z_{c2}} \cdot \operatorname{sh} \gamma \\ \operatorname{sh} \gamma / \sqrt{Z_{c1} \cdot Z_{c2}} & \operatorname{ch} \gamma \cdot \sqrt{Z_{c2}/Z_{c1}} \end{bmatrix} \quad (34)$$

В случае согласованного четырехполосника имеем

$$U_1 = U_2 \cdot \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \cdot e^\gamma \quad I_1 = I_2 \cdot \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \cdot e^\gamma = \frac{U_2}{\sqrt{Z_{c1} \cdot Z_{c2}}} \cdot e^\gamma = \frac{U_1}{Z_{c1}} \quad (35)$$

2. Задание.

- рассчитать A -параметры четырехполосника
- построить частотные характеристик коэффициента передачи напряжения в режиме холостого хода
- найти параметры T и Π -эквивалентных схем
- вычислить характеристические параметры
- построить круговые диаграммы выходной и входной реакций при изменении нагрузки в заданном диапазоне
- проверить результаты расчета на лабораторном стенде.

3. Пример выполнения расчетной работы.

Структура четырехполосника и значения сопротивлений элементов на частоте $f = 50 \text{ Гц}$ приведены в таблице 2. Действующее значение источника напряжения E и диапазон изменения нагрузки, в данном примере индуктивной, используется во второй части работы.

Таблица 2

№	Номера элементов и узлов.				Значения параметров элементов			
	1	2	3	4	5	6	7	8
33	1-2	1-5	5-2	1-4	4-3	4-5	3-2	3-2
	$E = 180$	$X_{L1} = 10$	$R_1 = 10$	$X_{L2} = 10$	$R_2 = 10$	$X_M = 10$	$X_C = 10$	$0 \leq X_L < \infty$

Схема четырехполосника, построенная по данным таблицы 2, показана на рис.3. Нагрузка четырехполосника на схеме не показана. Параметры элементов находятся по значениям сопротивлений на частоте $f = 50 \text{ Гц}$

$$L_1 = L_2 = M = X_{L1}/\omega = 10/100 \cdot \pi = 31.8 \text{ мГн}, \quad C = 1/\omega \cdot X_C = 1/10 \cdot 100 \cdot \pi = 318 \text{ мкФ}$$

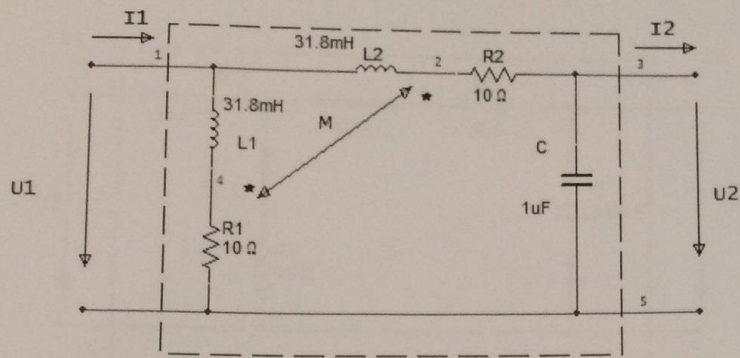


Рис.3. Схема четырехполосника.

Запишем уравнения, связывающие напряжение и ток на входе U_1, I_1 с напряжением и током U_2, I_2 на выходе четырехполосника

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Токи и напряжения в уравнениях (36) не изменятся, если исключить магнитную связь в соответствии с преобразованиями, показанными на рис. 9.

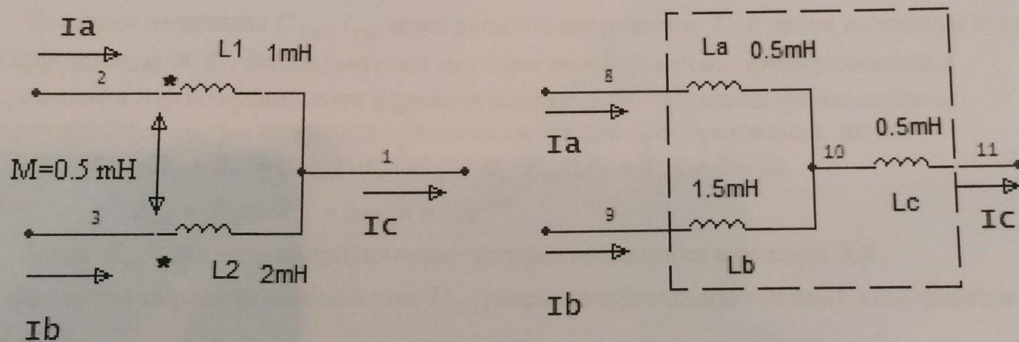


Рис. 4. Эквивалентное преобразование магнитно связанных элементов.

Если МСЭ подключены к узлу одноименными зажимами, то индуктивности в эквивалентной схеме определяются по формулам

$$L_a = L_1 - M, \quad L_b = L_2 - M, \quad L_c = M \quad (37)$$

При подключении МСЭ к узлу разноименными зажимами имеем

$$L_a = L_1 + M, \quad L_b = L_2 + M, \quad L_c = -M \quad (38)$$

Использование формул (37) и данных таблицы 2 приводит к эквивалентной схеме четырехполосника, показанной на рис. 5. Элементы короткого замыкания SC1, SC2 отражают равенство нулю эквивалентных индуктивностей $L_a = 0, L_b = 0$.

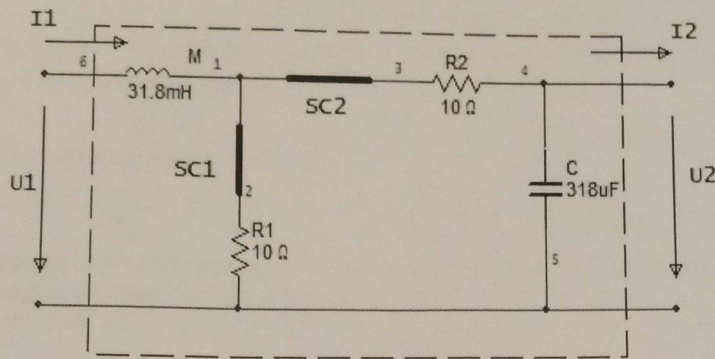


Рис.5. Эквивалентная схема четырехполюсника .

3.1 Определение A - параметров четырехполюсника

3.1.1 Режим холостого хода

В режиме ХХ уравнения четырехполюсника имеют вид

$$U_1 = A \cdot U_{2xx} \quad I_{1xx} = C \cdot U_{2xx}$$

Выразим величины U_{2xx} , I_{2xx} через входное напряжение U_1 и затем вычислим искомые коэффициенты A , C . Воспользуемся методом эквивалентных преобразований и выражением для коэффициента передачи напряжения. Запишем эквивалентные сопротивления, соответствующие различным этапам преобразования цепи.

$$Z_{e1} = R_2 + Z_C = 10 - j10, \quad Z_{e2} = R_1 \cdot Z_{e1} / (R_1 + Z_{e1}) = 6 - j2$$

$$Z_{xx1} = Z_M + Z_{e2} = 6 + j8 = 10e^{j53^\circ}$$

Здесь Z_{xx1} - входное сопротивление четырехполюсника в режиме ХХ.

Коэффициент передачи напряжения H_{2-1} равен произведению частных коэффициентов передачи

$$H_{2-1} = \frac{U_{2xx}}{U_1} = \frac{U_{R1}}{U_1} \cdot \frac{U_{2xx}}{U_{R1}} = \frac{Z_{e2}}{Z_{xx1}} \cdot \frac{Z_C}{Z_{e1}} = \frac{6 - j2}{6 + j8} \cdot \frac{-j10}{10 - j10} = -0.2 - j0.4 = 0,447e^{-j117^\circ}$$

Значение фазового угла $\varphi_H = \psi_{u_2} - \psi_{u_1} = -117^\circ$ показывает, что входное напряжение опережает по фазе выходное.

Коэффициент A является обратной величиной относительно коэффициента передачи напряжения в режиме ХХ

$$A = U_1 / U_{2xx} = 1 / H_{2-1} = 1 / (-0.2 - j0.4) = -1 + j2$$

Коэффициент C имеет размерность проводимости и выражается через коэффициент передачи напряжения H_{2-1} и входную проводимость $Y_{xx1} = 1 / Z_{xx1} = 0.06 - j0.08$

$$C = \frac{I_{1xx}}{U_{xx2}} = \frac{U_1 \cdot Y_{xx1}}{U_1 \cdot H_{2-1}} = \frac{Y_{xx1}}{H_{2-1}} = \frac{0.06 - j0.08}{-0.2 - j0.4} = 0.1 + j0.2 = 0.1 \cdot \sqrt{5} \cdot e^{j63.5^\circ}$$

3.1.2 Режим короткого замыкания

В режиме КЗ уравнения четырехполюсника приобретают вид

$$U_1 = B \cdot I_{2кз} \quad I_{1кз} = D \cdot I_{2кз}$$

Находим входное сопротивление $Z_{кз1}$ и входную проводимость четырехполюсника $Y_{кз1}$

$$Z_{кз1} = Z_M + R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 5 + j10 = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \exp(j \cdot 63.5^\circ)$$

$$Y_{кз1} = 1/Z_{кз1} = 0.04 - j0.08 = 0.04 \cdot \sqrt{5} \cdot \exp(-j63.5^\circ)$$

Входной и выходной ток цепи в режиме КЗ находятся через входную проводимость $Y_{кз1}$ и коэффициент передачи тока $H_{2-1}^{(i)}$

$$I_{1кз} = Y_{кз1} \cdot U_1, \quad I_{2кз} = H_{2-1}^{(i)} \cdot I_{1кз}, \quad H_{2-1}^{(i)} = R_1 / (R_1 + R_2) = 0.5$$

Вычисляем коэффициенты B и D

$$D = \frac{I_{1кз}}{I_{2кз}} = \frac{1}{H_{2-1}^{(i)}} = 2 \quad B = \frac{U_1}{I_{2кз}} = \frac{U_1}{U_1 \cdot Y_{кз1} \cdot H_{2-1}^{(i)}} = \frac{1}{Y_{кз1} \cdot H_{2-1}^{(i)}} = 10 + j20$$

Проверка вычислений производится по проверке соотношения между коэффициентами, которое вытекает из принципа взаимности

$$AD - BC = 1 \rightarrow (-1 + j2) \cdot 2 - ((10 + j20) \cdot (0.1 + j2)) = (-2 + j4) - (-3 + j4) = 1$$

3.2. Частотные характеристики цепи в режиме холостого хода.

Запишем операторный коэффициент передачи напряжения в режиме ХХ как произведение частных коэффициентов передачи

$$H(s) = \frac{\frac{R_1(R_1 + 1/sC)}{2R_1 + 1/sC}}{\frac{R_1(R_1 + 1/sC)}{2R_1 + 1/sC} + sM} \cdot \frac{1/sC}{R_1 + 1/sC} = \frac{1/2MC}{s^2 + s(R_1/2M + 1/2RC) + 1/2MC} = \frac{K_n}{N(s)} \quad (39)$$

$$N(s) = s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2, \quad 2\alpha = (R_1/2M + 1/2RC) = 628.4,$$

$$\omega_0 = \sqrt{1/2MC} = 222.2, \quad K_n = 1/2MC = \omega_0^2 = 49351 \quad (40)$$

Для получения комплексной амплитудно-частотной характеристики (КАЧХ) сделаем в выражении (39) замену $s = j\omega$

$$H(\omega) = \frac{K_n}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2 \cdot j \cdot \alpha \cdot \omega} \quad (41)$$

Выражения для АЧХ и ФЧХ имеют вид

$$|H(\omega)| = \frac{K_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \quad \varphi_H(\omega) = \arg[H(\omega)] \quad (43)$$

Действительная и мнимая часть КАЧХ изменяются с частотой в соответствии с выражениями

$$H_a(\omega) = \frac{K_n \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}, \quad H_b(\omega) = \frac{-K_n \cdot 2\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} \quad (44)$$

Графики АЧХ и ФЧХ представлены на рис.6. Четырехполосник в режиме ХХ является фильтром нижних частот (ФНЧ) второго порядка, образованного каскадным соединением двух Γ -образных LR и RC четырехполосников, каждый из которых является ФНЧ первого порядка.

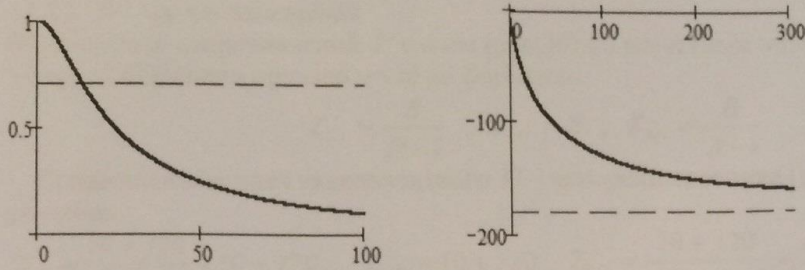


Рис.5. АЧХ – а) и ФЧХ – б) ненагруженного четырехполюсника.

Частотная зависимость действительной и мнимой частей КАЧХ представлена на рис. 6-а, частотный годограф – на рис. 6-б.

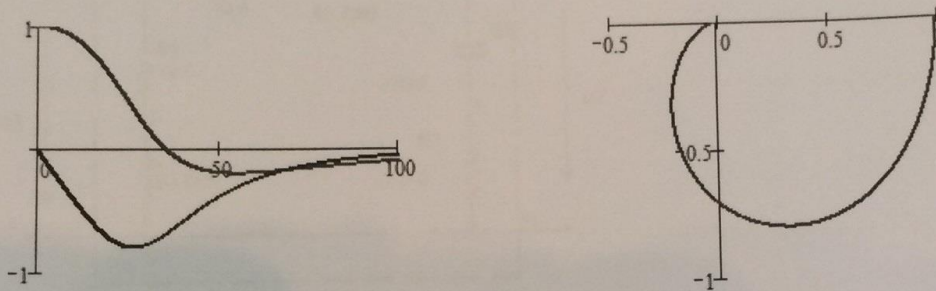


Рис. 6. Частотная зависимость действительной части (1) и мнимой части КАЧХ (2) – а), частотный годограф КАЧХ – б)

3.3 Схемы замещения четырехполюсника

3.3.1 T-схема замещения

Определение сопротивлений T-схемы (рис.2-а) по известным коэффициентам четырехполюсника производится по формулам

$$Z_{1T} = \frac{A-1}{C}, \quad Z_{2T} = \frac{1}{C}, \quad Z_{3T} = \frac{D-1}{C}$$

Используя полученные выше значения A – коэффициентов, находим сопротивления плеч эквивалентного T-четырёхполюсника (рис.7)

$$Z_{1T} = \frac{-1 + j2 - 1}{0.1 + j0.2} = 4 + j12, \quad Z_{2T} = \frac{1}{0.1 + j \cdot 0.2} = 2 - j4, \quad Z_{3T} = \frac{2 - 1}{0.1 + j0.2} = 2 - j4$$

Параметры элементов схемы на рис. 7 соответствуют частоте $f = 50 \text{ Гц}$.

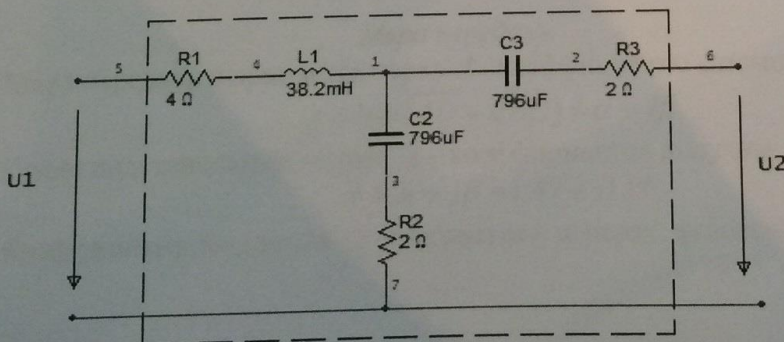


Рис.7 T – схема замещения четырехполюсника

3.3.1 П - схема замещения

Определение сопротивлений П схемы (рис.2б) по известным коэффициентам четырехполюсника производится по формулам

$$Z_{1П} = \frac{B}{D-1}, \quad Z_{2П} = B, \quad Z_{3П} = \frac{B}{A-1}$$

Сопротивления плеч эквивалентного П-четырёхполюсника (рис.8) принимают значения

$$Z_{1П} = \frac{10 + j20}{2 - 1} = 10 + j20, \quad Z_{2П} = 10 + j20, \quad Z_{3П} = \frac{10 + j20}{-1 + j2 - 1} = 2.5 - j7.5$$

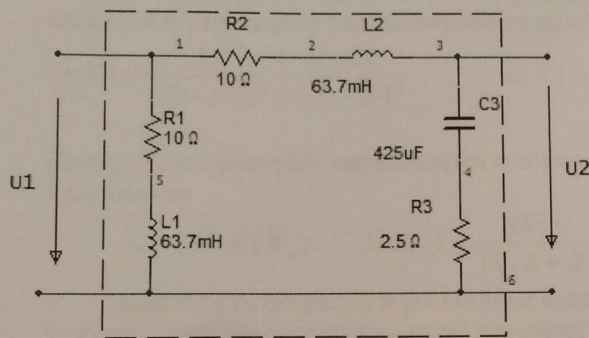


Рис.8 П - схема замещения четырехполюсника

3.4. Характеристические параметры.

3.4.1 Характеристическое сопротивление.

Характеристические сопротивления четырехполюсника Z_{c1}, Z_{c2} определяются по формулам

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}$$

Используя значения A -коэффициентов, получим

$$Z_{c1} = 5.56 + j \cdot 9 \quad Z_{c2} = 5 - j \cdot 8$$

Сопротивление Z_{c1} носит индуктивный характер, сопротивление Z_{c2} - емкостный.

Мера передачи.

Мера передачи выражается через A -коэффициенты с помощью формулы

$$\gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = \alpha + j\beta$$

После подстановки значений A -коэффициентов получим

$$\gamma = \alpha + j\beta = 1.47 + j1.06$$

Коэффициент затухания α измеряется в неперах, фазовый коэффициент - в радианах.

3.5. Круговые диаграммы входной и выходной реакции четырехполюсника, нагруженного на индуктивное сопротивление.

На входе четырехполюсника действует источник синусоидального напряжения $U_1 = E = 180 \text{ В}$. Индуктивная нагрузка изменяется в пределах $0 \leq X_L < \infty$. Требуется построить траектории, по которым будут перемещаться вектор тока источника I_1 и вектор выходного напряжения U_2 .

Входной ток определяется через входную проводимость

$$I(X_L) = E \cdot Y(X_L) \quad Y(X_L) = \frac{jX_L \cdot C + D}{jX_L \cdot A + B} = G(X_L) + jB(X_L)$$

После подстановки значений A - коэффициентов получим выражения для активной и реактивной составляющей входной проводимости

$$G(X) = \frac{0.3X^2 - 4 \cdot X + 20}{(10 - 2X)^2 + (20 - X)^2} \quad B(X) = \frac{-0.4X^2 + 7 \cdot X - 40}{(10 - 2X)^2 + (20 - X)^2}$$

Выходное напряжение определяется с помощью коэффициента передачи напряжения

$$U_2 = E \cdot H(X_L) \quad H(X_L) = \frac{jX_L}{jX_L A + B} = H_a(X_L) + jH_b(X_L)$$

Зависимость активной и реактивной составляющих коэффициента передачи от индуктивного сопротивления нагрузки имеет вид

$$H_a(X) = \frac{-X^2 + 20X}{(10 - 2X)^2 + (20 - X)^2} \quad H_b(X) = \frac{-2X^2 + 10X}{(10 - 2X)^2 + (20 - X)^2}$$

Круговые диаграммы напряжения $U_b(X) = F_u[U_a(X)]$ и тока $I_b(X) = F_i[I_a(X)]$ показаны на рис. 15

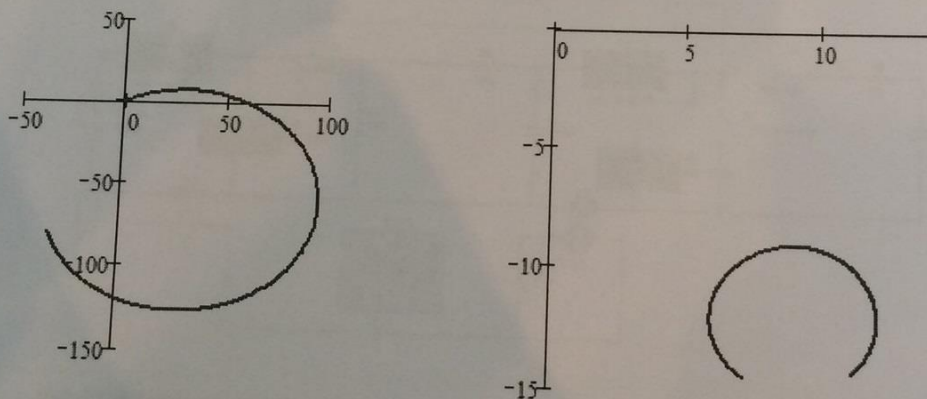


Рис. 9. Круговая диаграмма напряжения - а) и тока - б)

Зависимость отдельных составляющих входного тока и выходного напряжения от сопротивления нагрузки показаны на рис.10

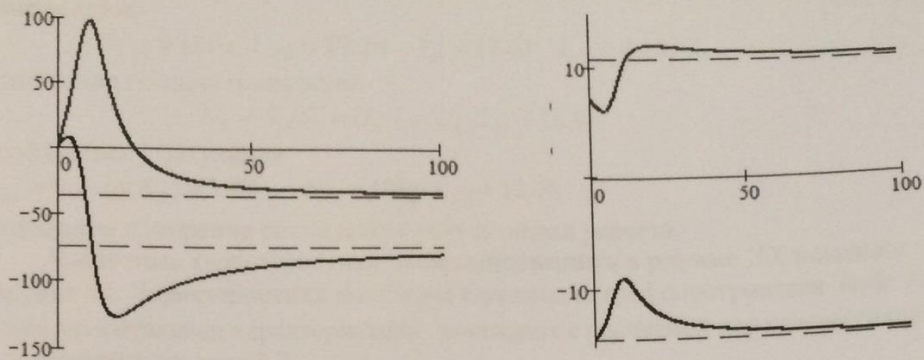


Рис.10. Активные (1) и реактивные (2) составляющие выходного напряжения – а) и входного тока – б)

3.5. Экспериментальная проверка результатов расчета.

Стенд для исследования четырехполюсника показан на рисунке 11. Стенд позволяет определять параметры следующих режимов работы четырехполюсника:

- режим ХХ четырехполюсника
- режим КЗ выходных зажимов
- режим согласованного четырехполюсника

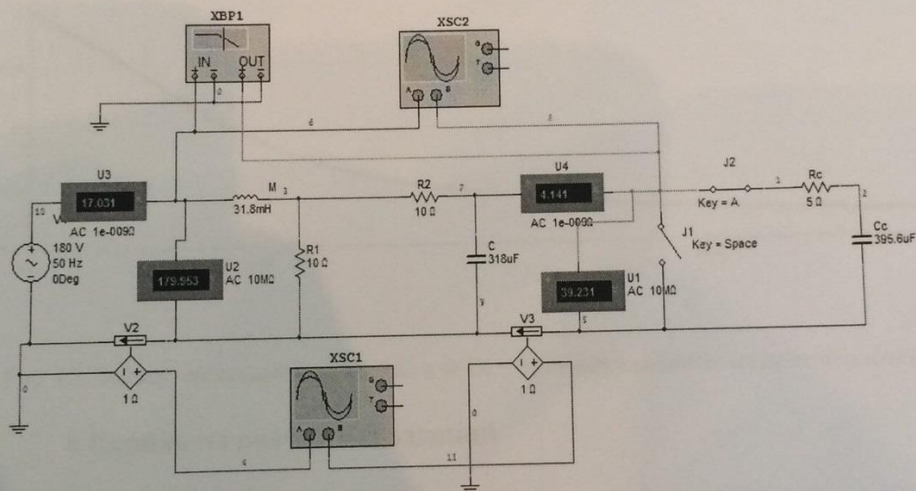


Рис.11. Схема стенда для определения параметров четырехполюсника

В качестве примера рассмотрим определение постоянной затухания $\alpha = \text{Re}(\gamma)$. Для этого используется режим согласованного четырехполюсника $Z_H = Z_{c2} = 5 - j \cdot 8$. Характеристическое сопротивление Z_{c2} на стенде воспроизводится резистором $R_{c2} = 5$ и емкостью $C_c = 1/X_c \cdot \omega = 1/8 \cdot 100 \cdot \pi$

В соответствии с определением величины α имеем

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \ln(|U_1/U_2| \cdot |I_1/I_2|) = \frac{1}{2} \cdot \ln(S_1/S_2)$$

Здесь S_1, S_2 полные мощности на входе и выходе четырехполюсника.

Входные и выходные напряжения и токи измеряются с помощью вольтметров и амперметров

$$U_{V1} = 180, U_{V2} = 39.23 \quad I_{A1} = 17.03 \quad I_{A2} = 4.14$$

Отношение полных мощностей

$$K_S = S_1/S_2 = U_{V1}I_{A1}/U_{V2}I_{A2} = 18.87$$

Коэффициент затухания

$$\alpha_{Np} = 0.5 \cdot \ln(K_S) = 1.47 \quad \alpha_{dB} = 10 \lg(K_S) = 12.76$$

Результаты измерения совпадают с результатами расчета.

Частотные характеристики четырехполюсника в режиме ХХ показаны на рисунке 12. Характеристики получены с помощью графопостроителя *Bode Plotter*. Экспериментальная характеристика совпадает с расчетной характеристикой, полученной в разделе 3.2.

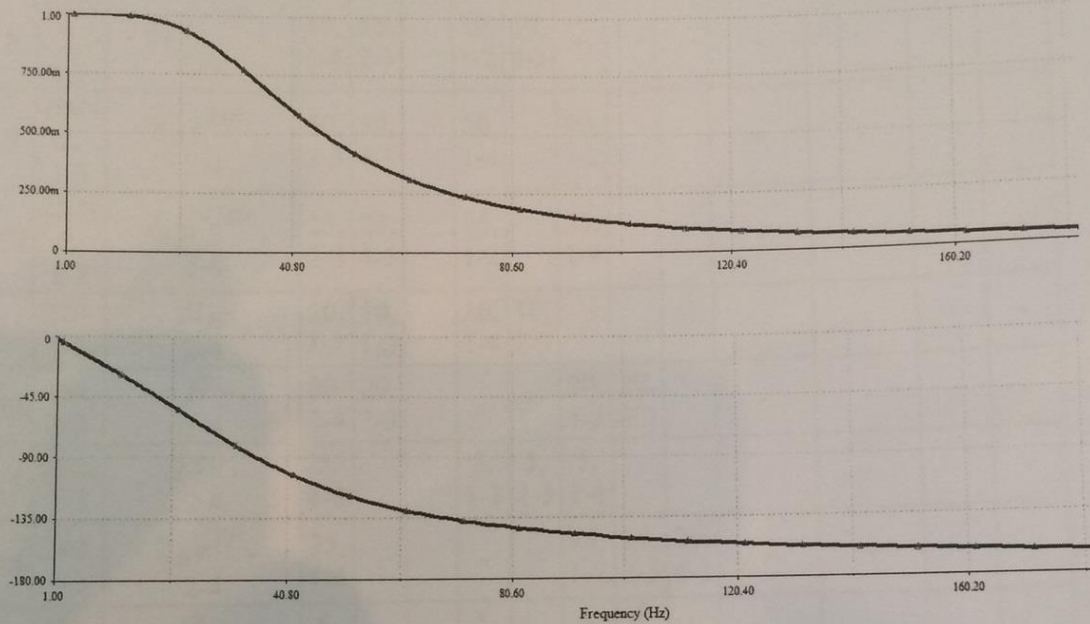


Рис. 12. Экспериментальные АЧХ – а) и ФЧХ – б) ненагруженного четырехполюсника

4. Варианты расчетных заданий

Структура четырехполюсника и значения сопротивлений элементов на частоте $f = 50 \text{ Гц}$ приведены в таблице вариантов. Напряжение источника задано действующим значением U_1 . Модуль нагрузки при заданном угле φ изменяется в диапазоне

$$0 \leq Z_H < \infty.$$

Символ «*» относится к однополярным зажимам индуктивно-связанных катушек.

Таблица вариантов

№	$U_1, \text{ В}$	$Z_H e^{j\varphi}, \text{ Ом}$	$R_1, \text{ Ом}$	$R_2, \text{ Ом}$	$R_3, \text{ Ом}$	$X_{L1}, \text{ Ом}$	$X_{L2}, \text{ Ом}$	$X_{C1}, \text{ Ом}$	$X_{C2}, \text{ Ом}$	$X_{C3}, \text{ Ом}$	$Z_1, \text{ Ом}$	$Z_2, \text{ Ом}$	$Z_3, \text{ Ом}$	$Z_M, \text{ Ом}$
1	200, 1-3	$jZ_H, 2-4$	25, 1-2	25, 2-3	25, 1-4	-		25, 4-3			-	-	-	-
2	320,	$-jZ_H,$	20,	20,	20,	20,		-			-	-	-	-

	1-3	2-4	1-4	4-3	2-3	1-2													
3	300, 1-3	$jZ_H,$ 2-4	50, 50, 1-2 1-4			50, 2-3		50, 4-3				-	-	-	-				
4	80, 1-3	$-jZ_H,$ 2-4	10, 10, 1-2 1-4			10, 4-3		10, 2-3				-	-	-	-				
5	500, 1-3	$jZ_H,$ 2-4	50, 50, 1-2 4-3			-		50, 50, 1-4 2-3				-	-	-	-				
6	240, 1-3	$-jZ_H,$ 2-4	10, 2-3			10, 10, 1-4 4-3		10, 1-2				-	-	-	-				
7	$280\sqrt{2},$ 1-3	$Z_H e^{j45^\circ},$ 2-4	20, 2-3			20, 1-2		20, 20, 1-4 4-3				-	-	-	-				
8	$160\sqrt{2},$ 1-3	$Z_H e^{-j45^\circ},$ 2-4	10, 10, 1-4 2-3			10, 10, 1-2 4-3		-				-	-	-	-				
9	$450\sqrt{2},$ 1-3	$Z_H e^{j45^\circ},$ 2-4	50, 50, 2-3 4-3			50, 1-4		50, 1-2				-	-	-	-				
10	$250\sqrt{2},$ 1-3	$Z_H e^{-j45^\circ},$ 2-4	25, 25, 2-3 4-3			25, 1-2		25, 1-4				-	-	-	-				
11	220, 1-3	$jZ_H,$ 2-4	10, 10, 1-2 1-2			10, 10, 1-4 2-3		-				-	-	-	-				
12	480, 1-3	$-jZ_H,$ 2-4	20, 20, 1-4 2-3			-		20, 20, 1-2 4-3				-	-	-	-				
13	260, 1-3	$jZ_H,$ 2-4	5, 4-3			5, 5, 1-2 2-3		5, 1-4				-	-	-	-				
14	280, 1-3	$Z_H e^{j0^\circ},$ 2-4	25, 1-4			-		25, 25, 1-2 2-3	25, 4-3			-	-	-	-				
15	300, 1-3	$jZ_H,$ 2-4	5, 1-4			5, 4-3		5, 5, 1-2 2-3				-	-	-	-				
16	128, 1-3	$-jZ_H,$ 2-4	-			-		-				$20+j20,$ 1^*-2	$20+j20,$ 2^*-3	-	$j20,$ 1-2				
17	272, 1-3	$jZ_H,$ 2-4	-			-		-				$40+j40,$ 1^*-2	$40+j40,$ 2^*-3	-	$j40,$ 1-2				
18	216, 1-3	$-jZ_H,$ 2-4	-			-		-				$20+j20,$ 1^*-3	$20+j20,$ 1^*-2	-	$j20,$ 1-1				
19	114, 1-3	$-jZ_H,$ 2-4	-			-		-				$50+j50,$ $1-3^*$	$50+j50,$ 1^*-2	-	$j50,$ 3-1				
20	120, 1-3	$jZ_H,$ 2-3	-			-		-				$10+j10,$ 1^*-3	$10+j10,$ 3^*-2	-	$j10,$ 1-3				
21	252, 1-3	$-jZ_H,$ 2-3	-			-		-				$20+j20,$ 1^*-3	$20+j20,$ 3^*-2	-	$j20,$ 1-3				
22	352, 1-4	$jZ_H,$ 3-4	-			-		-				$40+j40,$ 1^*-2	$40+j40,$ 2^*-4	$j40,$ 2-3	$j40,$ 1-2				
23	184, 1-4	$jZ_H,$ 3-4	-			-		-				$20+j20,$ 1^*-2	$20+j20,$ 4^*-2	$-j20,$ 2-3	$j20,$ 1-4				

24	240, 1-4	$jZ_H,$ 3-4								$10+j10,$ $2-3^*$	$10+j10,$ $2-4^*$	$j10,$ $3-2$	$-j10,$ $3-4$
25	250, 1-4	$-jZ_H$ 3-4								$50+j50,$ 2^*-4	$50+j50,$ $2-3^*$	$j50,$ $3-2$	$j50,$ $2-3$
26	208, 1-3	$jZ_H,$ 2-4								$20+j20,$ 1^*-2	$20+j20,$ $4-3^*$	$j20,$ $1-3$	$-j20,$ $1-3$
27	108, 1-3	$jZ_H,$ 2-4								$10+j10,$ 1^*-2	$10+j10,$ 4^*-3	$j10,$ $1-3$	$-j20,$ $1-4$
28	224, 1-3	$-jZ_H,$ 2-3								$20+j20,$ 1^*-2	$20+j20,$ $2-3^*$	$j20,$ $1-2$	$-j20,$ $1-3$
29	232, 1-3	$jZ_H,$ 2-3								$20+j20,$ 1^*-2	$20+j20,$ 2^*-3	$j20,$ $1-2$	$-j20,$ $1-2$
30	180, 1-3	$jZ_H,$ 2-3								$10+j10,$ 1^*-3	$10+j10,$ 1^*-2	$j10,$ $1-2$	$-j10,$ $1-1$