

3. ПЕРЕХОДНОЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ДВУМЯ НАКОПИТЕЛЯМИ

3.1. Система дифференциальных уравнений относительно переменных состояния

Дифференциальные уравнения цепи составляются относительно переменных состояний, в качестве которых используются токи индуктивностей и напряжения емкостей, для которых выполняются условия непрерывности:

$$i_L(t+0) = i_L(t-0) \text{ и } u_C(t+0) = u_C(t-0)$$

Уравнения записываются в форме Коши. Для составления уравнений в такой форме индуктивности заменяются зависимыми источниками тока, емкости – зависимыми источниками напряжения. В результате такой замены получается резистивная цепь, в которой требуется выразить ток емкости и напряжение индуктивности через параметры независимых и зависимых источников.

Для цепи второго порядка с L, C элементами и двумя независимыми источниками $e(t)$ и $j(t)$ уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= a_{11}i_L + a_{12}u_C + b_{11}e + b_{12}j \\ \frac{du_C}{dt} &= a_{21}i_L + a_{22}u_C + b_{21}e + b_{22}j \end{aligned} \quad (3.1)$$

Коэффициенты a_{mn} и b_{rk} выражаются через параметры цепи. Начальные условия $i_L(0_-)$ и $u_C(0_-)$ находят из расчетной схемы цепи до коммутации ($t < 0$).

Дифференциальные уравнения можно записать в матричной форме.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv \quad (3.2)$$

где $x = [i_L, u_C]^T$ – вектор переменных состояния, $v = [e, j]^T$ – вектор независимых источников, A, B – матрицы, составленные из коэффициентов a_{mn} и b_{rk} .

Если искомые реакции не совпадают с переменными состояниями, тогда система дифференциальных уравнений (3.1) дополняется системой алгебраических уравнений, с помощью которых реакции выражаются через переменные состояния и независимые источники

$$y = Cx + Dv \quad (3.3)$$

где $y = [y_1, y_2]^T$ - вектор реакций, C, D - матрицы, коэффициенты которых выражены через параметры цепи.

3.2. Методы решения уравнений состояния

Решение системы уравнений (3.1) ищется в виде суммы вынужденной $x_s(t)$ и свободной $x_f(t)$ составляющих переходного процесса.

$$i_L(t) = i_{L_s}(t) + i_{L_f}(t), \quad u_C(t) = u_{C_s}(t) + u_{C_f}(t) \quad (3.4)$$

В цепях постоянного тока установившиеся реакции от времени не зависят

$$i_{L_s}(t) = I_{L_s} = \text{const}, \quad u_{C_s}(t) = U_{C_s} = \text{const}.$$

Установившаяся реакция определяется из системы алгебраических уравнений, которые получаются после подстановки величин I_{L_s}, U_{C_s} в систему уравнений (1.1). В силу равенства нулю производных от постоянных величин получим:

$$a_{11}I_{L_s} + a_{12}U_{C_s} = -b_{11}e - b_{12}j$$

$$a_{21}I_{L_s} + a_{22}U_{C_s} = -b_{21}e - b_{22}j$$

Решение системы дает установившуюся реакцию цепи.

Свободная реакция является решением однородного уравнения и ищется в виде:

$$i_L(t) = I_L \cdot e^{pt} \quad \text{и} \quad u_C(t) = U_C e^{pt} \quad (3.5)$$

Параметр экспоненты p находится из характеристического уравнения, которое получается после подстановки функций $i_L(t), u_C(t)$ в систему уравнений (1.1), из которой исключены независимые источники $e = 0, j = 0$

$$\begin{aligned} pI_L &= a_{11}I_L + a_{12}U_C & \rightarrow & (a_{11} - p)I_L + a_{12}U_C = 0 \\ pU_C &= a_{21}I_L + a_{22}U_C & \rightarrow & a_{21}I_L + (a_{22} - p)U_C = 0 \end{aligned}$$

Для того, чтобы постоянные интегрирования I_{11}, U_{C1} были отличными от нуля необходимо потребовать равенства нулю определителя системы

$$(a_{11} - p)(a_{22} - p) - a_{12}a_{21} = 0 \quad (3.6)$$

Это условие дает характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0 \quad (3.7)$$

где α – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота цепи

$$\alpha = -0,5(a_{11} + a_{22}), \quad \omega_0^2 = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \quad (3.8)$$

Решение уравнения имеет вид

$$p_{1,2} = \omega_0(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) \quad (3.9)$$

где β – обобщенный коэффициент демпфирования.

Двум корням характеристического уравнения соответствуют две составляющие свободного тока

$$i_f(t) = i_{f1}(t) + i_{f2}(t)$$

Различают три закона изменения свободных составляющих во времени в зависимости от значения параметра β .

Апериодический характер переходного процесса

Если обобщенный коэффициент демпфирования больше единицы, то корни характеристического уравнения действительные и разные.

$$p_1 = -\alpha_1, \quad p_2 = -\alpha_2$$

В этом случае свободные составляющие записываются в виде

$$i_{f1}(t) = I_{11}e^{p_1 t} + I_{12}e^{p_2 t}; \quad u_{C1}(t) = U_{11}e^{p_1 t} + U_{12}e^{p_2 t} \quad (3.10)$$

Двум коэффициентам затухания, определяющих скорость экспоненциального затухания свободных составляющих, соответствуют два времени релаксации

$$\tau_1 = 1/\alpha_1, \quad \tau_2 = 1/\alpha_2$$

Амплитуды свободных составляющих находятся из независимых $i_f(0), u_C(0)$ и зависимых начальных условий $i_f'(0), u_C'(0)$. Зависимые начальные условия выражаются через независимые условия с помощью исходной системы уравнений

$$\begin{aligned} i'_L(0) &= a_{11}i_L(0) + a_{12}u_C(0) + b_{11}e + b_{12}j \\ u'_C(0) &= a_{21}i_L(0) + a_{22}u_C(0) + b_{21}e + b_{22}j \end{aligned} \quad (3.11)$$

Амплитуды свободных составляющих, например тока, находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{12} &= i_L(0) - I_{Ls} \\ p_1 I_{11} + p_2 I_{12} &= i'_L(0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение системы

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{p_2(i_L(0) - I_{Ls}) - i'_L(0)}{p_2 - p_1} \\ I_{12} &= \frac{-p_1(i_L(0) - I_{Ls}) + i'_L(0)}{p_2 - p_1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Критический режим

Критический режим возникает при коэффициенте демпфирования $\beta = 1$, при котором корни характеристического уравнения становятся кратными $p_1 = p_2 = p$. В этом случае свободная составляющая переходного процесса изменяется по закону

$$i_{Lr}(t) = (I_{11} + t \cdot I_{12})e^{pt}; \quad u_{Cr}(t) = (U_{11} + t \cdot U_{12})e^{pt} \quad (3.14)$$

Для определения амплитуд свободных составляющих составляется система уравнений

$$i_L(0) = I_{Ls} + I_{11}, \quad i'_L(0) = pI_{11} + I_{12}$$

Решение уравнений:

$$I_{11} = i_L(0) - I_{Ls}; \quad I_{12} = i'_L(0) - p(i_L(0) - I_{Ls}) \quad (3.15)$$

Режим затухающих колебаний

При малых значениях коэффициента демпфирования $\beta < 1$ корни характеристического уравнения становятся комплексно-сопряженными.

$$p_{1,2} = \omega_0(-\beta \pm j\sqrt{1-\beta^2}) = \omega_0 e^{\pm j\psi_p} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (3.16)$$

$$\psi_p = \pi/2 + \arctg(\beta/\sqrt{1-\beta^2}), \quad \alpha = \omega_0\beta, \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\beta^2}$$

При комплексно-сопряженных корнях амплитуды свободных токов в формуле (3.10) становятся комплексно-сопряженными величинами

$$\dot{I}_{r1} = \dot{I}_r, \dot{I}_{r2} = \dot{I}_r^*, i_r(t) = \dot{I}_r e^{p_1 t} + \dot{I}_r^* e^{p_2 t} \quad (3.17)$$

Выразив комплексную амплитуду через модуль и аргумент $\dot{I}_r = I_r e^{j\theta}$, представим свободный ток в тригонометрической форме.

$$i(t) = I_r e^{-\alpha t} [e^{j(\omega_d t + \theta)} + e^{-j(\omega_d t + \theta)}] = J_r \cos(\omega_d t + \theta), J_r = 2I_r \quad (3.18)$$

Учитывая формулу косинуса суммы двух аргументов

$$\cos(u + w) = \cos(u) \cdot \cos(w) - \sin(u) \cdot \sin(w),$$

представим свободную составляющую в виде

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} [M \cos(\omega_d t) + N \sin(\omega_d t)], \quad (3.19)$$

$$M = J_r \cos(\theta), N = -J_r \sin(\theta)$$

При расчетах удобно использовать форму (3.19) с последующим переходом к форме (3.18)

Коэффициенты M, N находятся из системы уравнений

$$i_L(0) = I_{Ls} + M, i_L'(0) = -\alpha M + \omega_d N \quad (3.20)$$

3.3. Нахождение реакций с помощью расчетных схем для различных этапов переходного порядка

Контроль решения системы дифференциальных уравнений производится по расчетным схемам цепи для вынужденных и свободных токов, а также по схеме для момента времени $t = 0_+$. Запишем алгоритм получения решений.

Вынужденные токи и напряжения до и после коммутации находятся по расчетным схемам, которые получают их исходной схемы путем замены емкости элементом ХХ и замены индуктивности элементом КЗ.

В схеме для свободных токов независимые источники отсутствуют. Расчетная схема для свободных токов получается из исходной путем замены источника напряжения элементом КЗ, источника тока – элементом ХХ, индуктивность и емкость заменяются сопротивлениями этих элементов свободным токам $Z_l(p), Z_c(p)$ в соответствии с формулами

$$Z_l(p) = pL, \quad Z_c(p) = 1/pC$$

Для составления характеристического уравнения находят входное сопротивление относительно точек разрыва какой-либо ветви $Z_{dr}(p)$ и приравнивают полученное выражение нулю. Дуальный способ получения характеристического уравнения состоит в нахождении входной проводимости относительно пары узлов $Y_{dr}(p)$ и приравнивании полученного выражения нулю. Законы изменения свободных составляющих согласно виду корней характеристического полинома (ХП) рассмотрены в разделе 3.2.

Зависимые начальные условия $i'_l(0) = u_l(0)/L$ и $u'_c(0) = i_c(0)/C$ находятся по расчетной схеме для момента времени $t = 0_+$. Эта схема получается из исходной схемы путем замены индуктивности источником тока, ток которого равен начальному току индуктивности $i_l(0)$, и замены емкости источником напряжения, напряжение которого равно начальному напряжению на емкости $u_c(0)$.

В случае нулевых начальных условий индуктивность заменяется элементом ХХ, емкость – элементом КЗ.

3.4. Задание

1. Восстановить схему цепи, заданную в таблице вариантов 3.1
2. Найти независимые начальные условия.
3. Составить уравнения состояния цепи.
4. Найти решение уравнений.
5. Выполнить проверку решений по расчетным схемам для вынужденных/свободных токов и момента времени $t = 0_+$.
6. Построить графики напряжений и токов накопительных элементов. Определить время переходного процесса t_p по уровню 0,95.
7. Определить энергию и скорость запасания энергии в накопительных элементах.

Таблица 3.1

Структура и параметры цепи

№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1-5 $U_1=6$	1-2 $R_2=1$	2-3 $R_3=1$	3-5 $L_4=1$	2-4 SW_5 1→0	4-5 $R_6=1$	2-5 $C_7=1$	2-5 $I_8=3$
2	1-6 $U_1=1$	1-2 $R_2=1$	2-3 $C_3=1$	3-5 SW_4 1→0	5-6 $R_5=1$	3-4 $L_6=1$	4-6 $R_7=1$	4-6 $I_8=4$
3	3-1 $I_1=4$	1-3 $R_2=1$	1-2 $L_3=4$	1-2 $C_4=1/4$	2-3 SW_5 1→0	2-3 $R_6=1$	2-3 $I_7=2$	-
4	1-5 $U_1=4$	1-2 $L_2=4$	2-5 $C_3=1/4$	2-3 $R_4=1$	3-2 $I_5=8$	3-4 $R_6=1$	4-5 SW_7 0→1	-
5	5-1 $I_1=6$	1-5 $R_2=1$	1-2 $L_3=0,5$	2-5 $C_4=0,5$	2-3 $R_5=1$	3-4 SW_6 0→1	4-5 $U_7=2$	-
6	1-4 $U_1=6$	1-2 $L_2=2,5$	2-4 $C_3=0,1$	2-3 $R_4=1$	3-4 $R_5=1$	3-4 SW_6 1→0	4-3 $I_7=6$	-
7	4-1 $I_1=2$	1-4 $R_2=4/3$	1-4 $L_3=1$	1-2 SW_4 0→1	2-4 $C_5=1/4$	2-3 $R_6=4$	3-4 $U_7=4$	-
8	5-1 $I_1=6$	1-2 $I_2=1$	2-5 $R_3=1$	1-5 $C_4=1$	1-3 SW_5 0→1	3-4 $R_6=1$	4-5 $U_7=4$	-
9	1-6 $U_1=9$	1-2 $R_2=3$	2-5 $L_3=0,5$	5-6 $C_4=1$	2-3 $R_5=3$	3-4 SW_6 0→1	4-6 $U_7=3$	-
10	5-1 $I_1=10$	1-5 $C_2=1$	1-2 $R_3=1$	2-5 $R_4=1$	2-3 $L_5=1$	3-4 SW_6 0→1	4-5 $U_7=5$	-
11	1-5 $U_1=4$	1-2 $R_2=1$	1-2 SW_3 0→1	2-3 $R_4=0,5$	5-3 $I_5=4$	5-4 $R_6=0,5$	3-4 $L_7=1$	3-4 $C_8=0,5$
12	1-5 $R_1=1$	1-2 SW_2 0→1	5-2 $I_3=4$	2-5 $C_4=1$	2-3 $L_5=1$	3-4 $R_6=1$	4-5 $U_7=2$	-
13	5-1 $I_1=2$	1-5 $R_2=1$	1-5 $C_3=1$	1-2 SW_4 0→1	2-3 $R_5=1$	4-3 $L_7=1$	4-5 $U_7=8$	-

Окончание таблицы 3.1

№	1	2	3	4	5	6	7	8
14	4-1 $I_1=2$	1-4 $L_2=1$	2-1 $C_3=0,5$	2-3 $R_4=2$	3-1 $R_5=1$	4-3 $I_6=2$	3-4 SW_7 $1 \rightarrow 0$	-
15	1-5 $U_1=9$	1-2 $R_2=5$	2-4 $R_3=5$	4-5 $R_4=5$	2-4 $SW_5, 0 \rightarrow 1$	3-2 $L_6=0,5$	3-5 $C_7=0,5$	5-3 $I_8=1,8$
16	1-5 $L_1=0,5$	1-2 SW_2 $0 \rightarrow 1$	1-2 $R_3=1$	5-2, $I_4=6$	2-5 $R_5=1$	2-3 $R_6=1$	4-3 $C_7=0,5$	4-5 $U_8=6$
17	4-1 $I_1=2$	1-4 $C_2=0,1$	1-2 $R_3=6$	2-3 $L_4=2$	3-4 $SW_5, 1 \rightarrow 0$	3-4 $R_6=6$	4-3 $I_7=4$	-
18	1-6 $U_1=4$	1-2 $L_2=1$	2-3 $R_3=1$	3-6 $C_4=1$	2-4 $SW_5, 0 \rightarrow 1$	4-5 $R_6=1$	5-6 $U_7=2$	-
19	1-5 $U_1=6$	1-2 $R_2=1$	2-3 $R_3=1$	2-3 $SW_4,$ $0 \rightarrow 1$	3-5 $C_5=1$	3-4 $R_6=1$	4-3 $I_7=3$	4-5 $L_8=1$
20	1-5 $R_1=1$	2-1 $C_2=1$	5-2 $I_3=3$	2-5 $R_4=1$	2-3 $SW_5, 0 \rightarrow 1$	4-3 $L_6=1$	4-5 $U_7=6$	-
21	1-5 $U_1=4$	1-2 $R_2=2$	2-5 $L_3=0,5$	2-5 $C_4=$ $0,25$	2-3 $SW_5, 0 \rightarrow 1$	3-4 $R_6=1$	4-5 $U_7=2$	-
22	4-1 $I_1=1$	1-4 $C_2=$ $0,25$	1-2 $R_3=2$	2-3 $L_4=1$	3-4 $R_5=2$	4-3 $I_6=1$	3-4 $SW_7,$ $1 \rightarrow 0$	-
23	5-1 $I_1=9$	1-5 $R_2=0,2$	1-3 $R_3=0,2$	1-2 $R_4=0,2$	2-3 $SW_5, 1 \rightarrow 0$	3-5 $C_6=0,5$	3-4 $L_7=0,5$	5-4 $U_8=1,8$
24	1-5 $U_1=2$	1-2 $L_2=0,5$	2-5 $R_3=1$	2-5 $C_4=0,25$	2-3 $SW_5, 0 \rightarrow 1$	3-4 $R_6=2$	5-4 $U_7=4$	-

3.5. Пример расчета.

Исходные данные для расчета приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Структура и параметры цепи

№	1	2	3	4	5	6	7	8
42	1-6 $U_1=8$	1-2 $R_2=2$	2-3 $SW_3, 0 \rightarrow 1$	3-4 $L_4=4$	4-6 $R_5=6$	3-5 $C_6=1$	5-6 $U_7=4$	-

цы 3.1

8
5-3 $I_8=1,8$
4-5 $U_8=6$
-
-
4-5 $L_8=1$
-
-
5-4 $I_8=1,8$
-

Схема цепи, построенная по данным таблицы 3.2, показана на рис. 3.1.

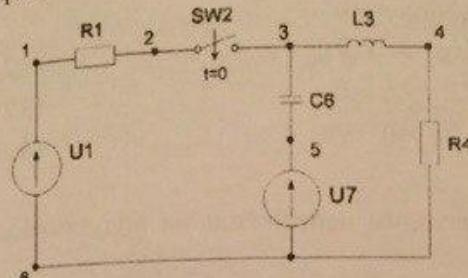


Рис. 3.1. Схема исследуемой цепи

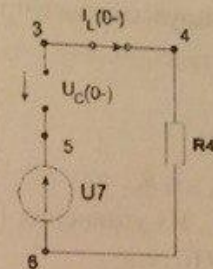


Рис. 3.2. Расчетная схема для определения начальных условий

Определение независимых начальных условий

Независимые начальные условия $u_C(0_-)$ и $i_L(0_-)$ определяются из расчетной схемы цепи до коммутации (рис.3.2). Из расчетной схемы следует

$$u_C(0_-) = -U_7 = -4, \quad i_L(0_-) = 0.$$

Формирование системы дифференциальных уравнений

Для получения дифференциальных уравнений относительно переменных состояния заменим индуктивный элемент зависимым источником тока i_L , а емкостной элемент – зависимым источником напряжения u_C (рис.3.3).

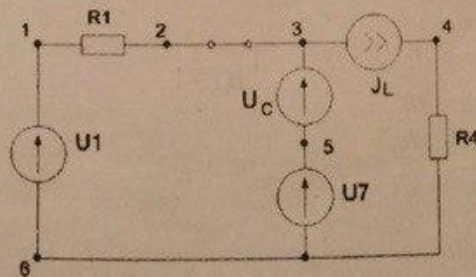


Рис.3.3 Схема цепи с компенсационными источниками

Выразим ток емкости и напряжение индуктивности через переменные состояния i_L, u_C и напряжение источников U_1 и U_7 . Используя законы Кирхгофа, получим.

$$u_L + u_5 - U_7 - u_C = 0 \quad (3.21)$$

$$u_2 + u_C + U_7 - U_1 = 0 \quad (3.22)$$

$$i_C + i_L - i_2 = 0 \quad (3.23)$$

где $u_5 = i_L R_5$, $u_2 = i_2 R_2$

Из уравнения (3.21) находим напряжение на индуктивности $u_L = f(i_L, u_C)$

$$u_L = -R_5 i_L + u_C + U_7, \quad u_L = L \cdot di / dt$$

Для получения функции $i_C = f_2(i_L, u_C)$ найдем ток i_2 из уравнения (3.22) $i_2 = (U_1 - U_7 - u_C) / R_2$ и подставим полученное выражение в уравнение (3.23).

$$i_C = (U_1 - U_7 - u_C) / R_2 + i_L, \quad i_C = C \cdot du_C / dt$$

Выражения для величин u_L и i_C дают искомую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_5}{L} i_L + \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} U_7 \quad (3.24)$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{CR_2} u_C + \frac{U_1}{CR_2} - \frac{U_7}{CR_2} \quad (3.25)$$

$$i(0) = 0, u_C(0) = -4$$

После подстановки значений параметров элементов цепи получим

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{3}{2} i_L + \frac{1}{4} u_C + 1 \quad (3.26)$$

$$\frac{du_C}{dt} = -i_L - \frac{1}{2} u_C + 2 \quad (3.27)$$

Определение установившихся реакций

Решение системы уравнений является наложением свободной и вынужденной составляющей реакций.

$$i = i_f(t) + i_s(t) \quad u = u_f(t) + u_s(t)$$

В цепях постоянного тока имеем: $i_s(t) = I_s = \text{const}$ и $u_s(t) = U_s = \text{const}$.

Неизвестные величины I_s и U_s определяют из системы уравнений (3.26) и (3.27) при нулевых значениях производных

$$\frac{3}{2}I_s - \frac{1}{4}U_s = 1$$

$$I_s + \frac{1}{2}U_s = 2$$

Решение системы $I_s = 1$ и $U_s = 2$.

Проверку результата выполним с помощью расчетной схемы цепи для установления режима постоянного тока (рис.3.4)

$$I_{Ls} = \frac{U_1}{R_2 + R_3} = \frac{8}{2 + 6} = 1$$

$$U_{Cs} = \frac{U_1 \cdot R_3}{R_2 + R_3} - U_7 = \frac{8 \cdot 6}{2 + 6} - 4 = 2$$

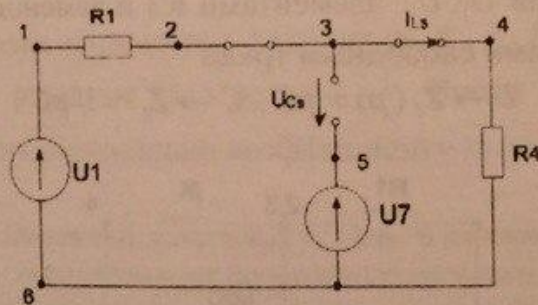


Рис.3.4. Схема для установившегося режима постоянного тока

Получение и решение характеристического уравнения

Для получения характеристического уравнения подставим в однородную систему дифференциальных уравнений выражения для свободных составляющих процесса $i_i = I_i \cdot e^{pt}$ и $u_i = U_i \cdot e^{pt}$. После преобразований получим

$$(p + \frac{3}{2})I_i - \frac{1}{4}U_i = 0$$

$$I_i + (p + \frac{1}{2})U_i = 0$$

Чтобы постоянные интегрирования I_i и U_i были отличны от нуля, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю.

$$\det \begin{bmatrix} p + \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & p + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0$$

Из этого условия получаем характеристическое уравнение.

$$p^2 + 2p + 1 = 0 \quad (3.28)$$

Это уравнение имеет кратные корни $p_1 = p_2 = p = -1$.

Для получения характеристического уравнения другим способом воспользуемся расчетной схемой для свободных токов (рис.3.5). Эта схема получается из исходной схемы заменой независимых источников U_1, U_7 элементами КЗ и заменой L, C элементов их сопротивлениями свободным токам

$$L \rightarrow Z_L(p) = pL, \quad C \rightarrow Z_C = 1/pC$$

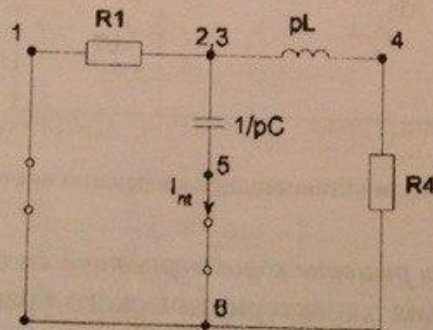


Рис.3.5.Схема цепи для свободных токов.

В соответствии с методом узловых напряжений определим потенциал узла 3 $\phi_3 = \Phi_3 e^{pt}$ относительно узла 6 при известном узловом токе J_m :

$$\Phi_i \cdot Y_m = J_m$$

При отсутствии независимых источников узловой ток J_m равен нулю. Поэтому для выполнения условия $\Phi_i \neq 0$ необходимо, чтобы узловая проводимость Y_m была равна нулю.

$$Y_m = pC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{pL + R_3} = 0 \quad (3.29)$$

Если применить метод контурных токов, то характеристическое уравнение получается из условия $Z(p) = 0$, где $Z(p)$ – входное сопротивление цепи относительно точек разрыва одной из ветвей. Например:

$$Z(p) = pL + R_3 + \frac{R_2}{1 + R_2 pC} = 0 \quad (3.30)$$

После преобразований получим характеристическое уравнение

$$p^2 + p\left(\frac{1}{CR_2} + \frac{R_3}{L}\right) + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) = 0 \quad (3.31)$$

Подстановка параметров элементов R_2, R_3, L, C дает уравнение (3.28) и его решение $p_1 = p_2 = p = -1$. Время релаксации цепи $\tau = 1$ обратно пропорционально коэффициенту затухания $\alpha = |p|$

Определение зависимых начальных условий и амплитуд свободных составляющих переходного процесса

В цепи второго порядка двум корням характеристического уравнения соответствуют две составляющие свободного тока

$$i_r = i_{r1} + i_{r2}$$

В рассматриваемом случае имеет место критический режим переходного процесса, для которого зависимость искомых величин от времени имеет вид

$$i_L(t) = I_{Lc} + I_{r1} \exp(pt) + I_{r2} \cdot t \cdot \exp(pt) \quad (3.32)$$

$$u_C(t) = U_{Cc} + U_{r1} \exp(pt) + U_{r2} \cdot t \cdot \exp(pt) \quad (3.33)$$

Для определения амплитуд свободных составляющих I_{r1}, I_{r2} и U_{r1}, U_{r2} используются независимые и зависимые начальные

условия. Зависимые начальные условия определяются из системы (3.26), (3.27):

$$i'_L(0_+) = -\frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4}(-4) + 1 = 0$$

$$u'_C(0_+) = 0 - \frac{1}{2}(-4) + 2 = 4$$

Значения величин $i'_L(0_+) = u'_L(0_+)/L$ и $u'_C(0_+) = i'_C(0_+)/C$ можно также найти из схемы замещения цепи для момента времени $t = 0_+$ (рис.3.6)

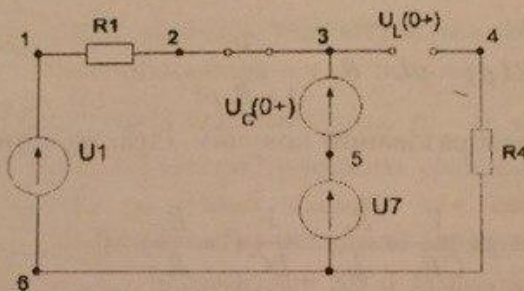


Рис.3.6 расчетная схема цепи для момента $t = 0_+$.

$$i'_C(0_+) = \frac{U_1 - u_C(0_+) - U_7}{R_2} = \frac{8 - (-4) - 4}{2} = 4;$$

$$u'_L(0_+) = u'_C(0_+) + U_7 = -4 + 4 = 0$$

$$u'_C(0_+) = \frac{i'_C(0_+)}{C} = 4; \quad i'_L(0_+) = \frac{u'_L(0_+)}{L} = 0$$

Постоянные интегрирования определяют из систем уравне-

ний

$$i_L(0_+) = I_{11} + I_{12} \quad 0 = 1 + I_{11} \quad \rightarrow I_{11} = -1$$

$$i'_L(0_+) = pI_{11} + I_{12} \quad 0 = -1 \cdot (-1) + I_{12} \quad \rightarrow I_{12} = -1$$

$$u_C(0_+) = U_{C1} + U_{11} \quad -4 = 2 + U_{11} \quad \rightarrow U_{11} = -6$$

$$u'_C(0_+) = pU_{11} + U_{12} \quad 4 = -1 \cdot (-6) + U_{12} \quad \rightarrow U_{12} = -2$$

Графики временных зависимостей напряжения и тока накопительных элементов

С учетом полученных значений постоянных интегрирования I_{11} , I_{12} и U_{11} , U_{12} , решение системы уравнений принимает вид

$$i_L(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} \quad u_C(t) = 2 - 6e^{-t} - 2te^{-t} \quad (3.34)$$

Напряжение индуктивности u_L и ток емкости i_C найдем по схеме, представленной на рис. 3.3. В соответствии с формулами (3.26) и (3.27) получим:

$$\begin{aligned} u_L &= -6i_L + U_C + 4 = 4te^{-t} \\ i_C &= -i_L - \frac{1}{2}U_C + 2 = 4e^{-t} + 2te^{-t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Графики зависимостей найденных реакций приведены на рисунках 3.7 и 3.8

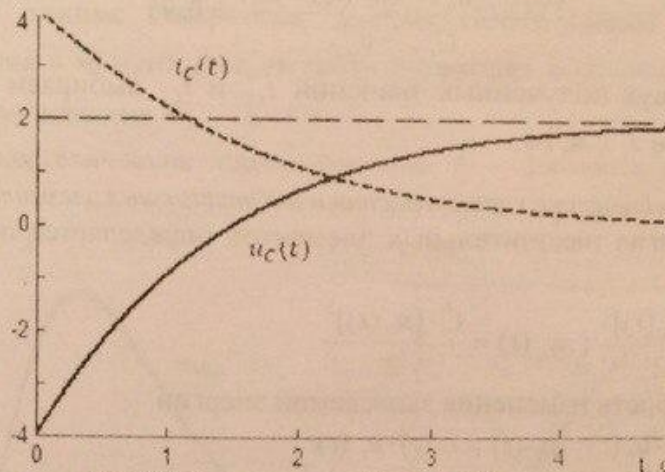


Рис.3.7. Напряжение $u_C(t)$ и ток $i_C(t)$ емкости

Напряжение емкости проходит через ноль в момент $t_0 = 1,56$. Напряжение индуктивности принимает максимальное значение $U_{Lm} = 1,47$ в момент $t_m = 1$. Время переходного процесса для тока индуктивности $t_{LS} = 4,74$ по уровню 5% находится графически или из уравнения

$$\frac{I_{LS} - I_L(t_{LS})}{I_{LS}} = 0,95$$

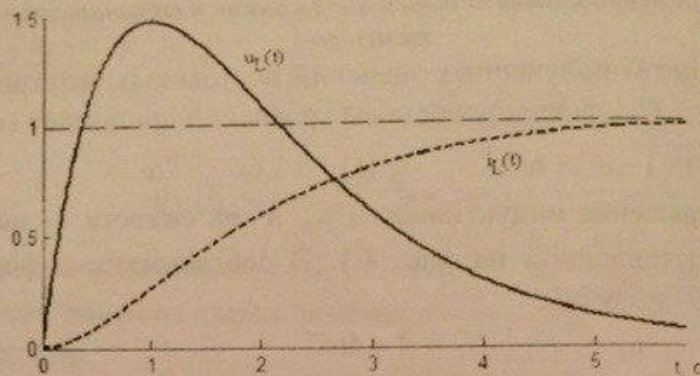


Рис.3.8. Напряжение $u_L(t)$ и ток $i_L(t)$ индуктивности

Длительность переходного процесса $t_{CS} = 3,82$ для напряжения емкости по уровню 5% определяется из условия

$$\frac{(U_{CS} - u_0) - (u_C(t_s) - u_0)}{U_{CS} - u_0} = 0,95$$

Из двух полученных значений t_{LS} и t_{LS} выберем наибольшее значение $t_s = 4,74$.

Энергетические характеристики накопительных элементов

Энергия накопительных элементов определяется по формулам

$$w_L(t) = \frac{L \cdot [i_L(t)]^2}{2}; \quad w_C(t) = \frac{C \cdot [u_C(t)]^2}{2} \quad (3.36)$$

Скорость изменения запасаемой энергии

$$p_L(t) = i_L(t) \cdot u_L(t); \quad p_C(t) = i_C(t) \cdot u_C(t) \quad (3.37)$$

Графики энергии и мощности C -элемента показаны на рис.3.9.

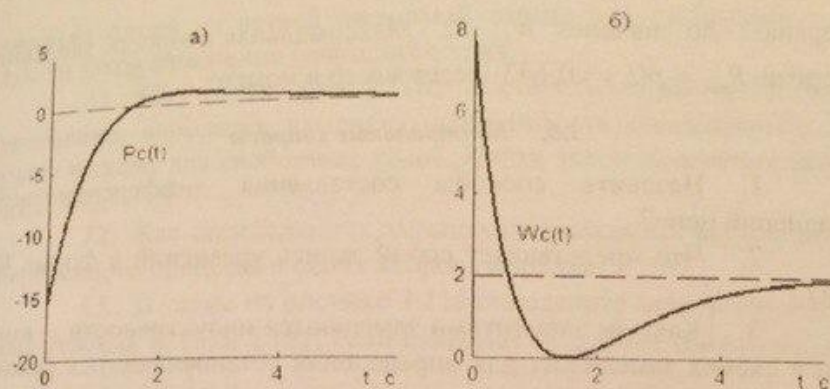


Рис. 3.9. Изменение мощности - а) и энергии емкости - б)

Переходной процесс происходит при начальном запасе энергии в емкости $w_C(0) = 8$. В интервале времени $0 \leq t \leq t_0$ емкость работает в режиме генератора $p_C < 0$. После смены полярности напряжения в момент $t = t_0$ емкость переходит в режим накопления энергии до значения $W_{Cs} = C \cdot U_{Cs}^2 / 2 = 2$.

Энергетические характеристики L - элемента показаны на рис.3.10

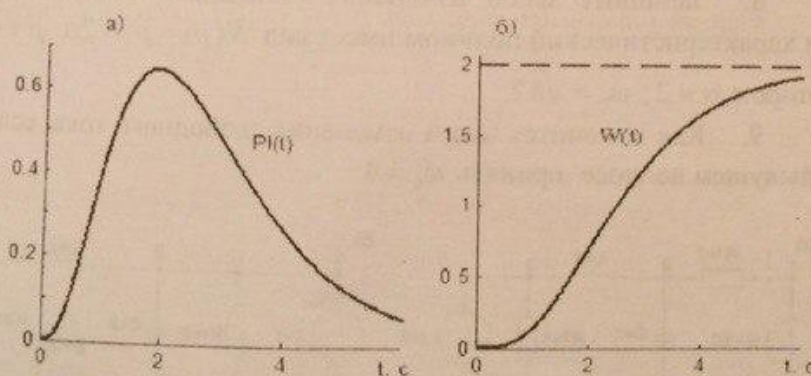


Рис. 3.10. Изменение мощности - а) и энергии индуктивности - б)

Индуктивность не имеет начального запаса энергии $w_L(0) = 0$. В ходе переходного процесса индуктивность накапливает

энергию до значения $W_{LS} = 2$. Максимальная скорость запасания энергии $P_{\max} = p(t_c) = 0,643$ имеет место в момент $t_c = 2$.

3.6. Контрольные вопросы

1. Назовите способы составления дифференциальных уравнений цепи?
2. Что представляет собой запись уравнений в форме Коши?
3. Какими элементами заменяются индуктивности и емкости в схемах замещения для определения установившегося режима постоянного тока?
4. Как составляется характеристическое уравнение по схеме замещения цепи для свободных токов?
5. Запишите закон изменения свободных токов, если коэффициент демпфирования больше единицы?
6. В каком виде записывается общее решение для критического режима переходного процесса?
7. По какому закону изменяются свободные составляющие в случае $\beta < 1$.
8. Запишите закон изменения свободных составляющих, если характеристический полином имеет вид $N(p) = p^2 + 2\alpha \cdot p + \omega_0^2$, в котором $\alpha = 2$, $\omega_0 = \sqrt{8}$?
9. Как изменится закон изменения свободного тока, если в предыдущем вопросе принять $\omega_0 = 4$

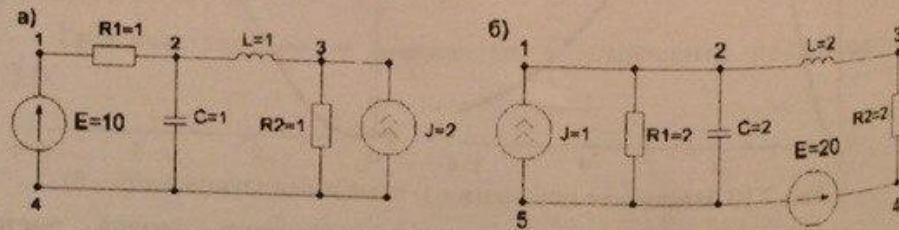


Рис. 3.11.

10. По схеме (рис.3.11а) составить характеристическое уравнения, используя входное сопротивление относительно точек