Практическая работа №6. Фазовые траектории

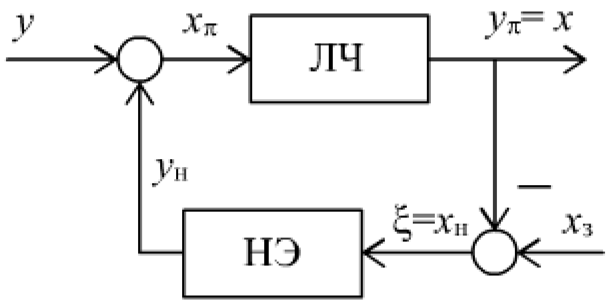
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Особенности нелинейных систем

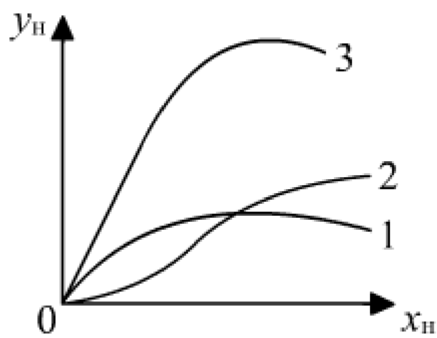
Автоматическая система управления является нелинейной, если хотя бы один ее элемент описывается нелинейным уравнением.

Практически все реальные системы управления содержат один или несколько нелинейных элементов. Нелинейной характеристикой часто обладает и объект управления. Так, например, все электрические машины имеют нелинейную и неоднозначную зависимость магнитного потока от тока возбуждения. Индуктивности обмоток машины также зависят от токов.

Некоторые нелинейные элементы вводят в систему преднамеренно, чтобы улучшить качество управления. Такими нелинейностями являются, например, релейные управляющие устройства, обеспечивающие высокое быстродействие процесса управления. Применяются также нелинейные корректирующие устройства.



а



б

Рис. 1.1. Структурная схема нелинейной САУ (а) и характеристики НЭ (б)

Нелинейную САУ можно представить в виде соединения двух частей (рис. 1.1, а) – линейной части (ЛЧ), описываемой линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и нелинейного элемента (НЭ). Нелинейный элемент является безынерционным, и его входная x и выходная y величины связаны между собой нелинейными алгебраическими уравнениями. Если система содержит несколько нелинейных элементов, то ее в ряде случаев можно свести к рассматриваемому классу, заменив нелинейные элементы одним с результирующей статической характеристикой. Например, при параллельном, последовательном и встречно-параллельном соединении такая замена возможна. На рис. 1.1, б показана замена двух параллельно соединенных нелинейных звеньев со статическими характеристиками 1 и 2 одним звеном с характеристикой 3, полученной суммированием исходных характеристик по оси ординат.

Различают два вида нелинейных элементов: существенно нелинейные и несущественно нелинейные. Нелинейность считается несущественной, если ее замена линейным элементом не изменяет принципиальных особенностей системы и процессы в линеаризованной системе качественно не отличаются от процессов в реальной системе. Если такая замена невозможна, и процессы в линеаризованной и реальной системах сильно отличаются, то нелинейность является существенной.

Главная особенность существенно нелинейных систем заключается в том, что они не подчиняются принципу наложения, а форма и показатели переходного процесса зависят от величины и формы внешнего воздействия.

Типовые нелинейные системы управления

Нелинейная часть САУ образована одним нелинейным элементом (рис. 1.1, а), выходная величина $y_н$ которого может быть выражена как функция входной величины $x_н$ и ее производной $x'_н$:

$$y_н = \mathrm{f}(x_н, x'_н). \tag{1.1}$$

Простейшими нелинейными элементами являются статические нелинейности. У них выходная величина зависит от входной величины, причем эта зависимость строго однозначна. Примерами статических нелинейностей являются характеристики, показанные на рис. 1.2, а, б.

У динамических нелинейностей выходная величина зависит как от входной величины, так и от ее производной (рис. 1.2, в). Характеристика динамической нелинейности всегда неоднозначна.

Рассмотренные статические и динамические нелинейности относятся к классу нелинейностей с кусочно-линейными характеристиками.

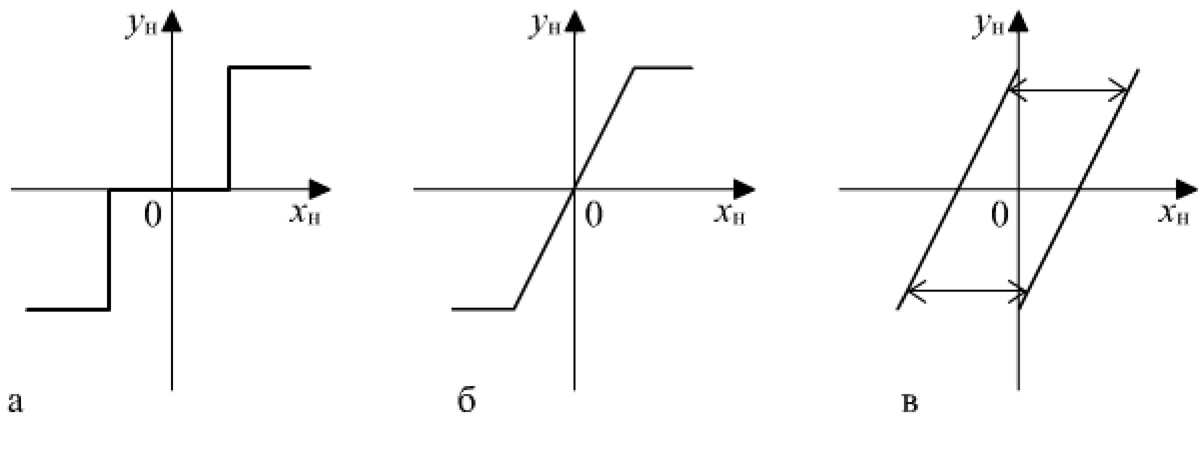


Рис. 1.2. Характеристики нелинейных элементов

В управляющих устройствах, наряду с релейными элементами, часто используются так называемые особые нелинейности: множительное звено, элементы с переменной структурой, элементы логического типа.

Для улучшения качества систем применяются управляющие устройства с переменной структурой, в которых специальный блок изменения структуры может включать в основной контур системы звенья с различными динамическими свойствами.

Метод фазовых траекторий

Метод фазовых траекторий представляет собой графо-аналитический способ исследования нелинейных систем. Сущность метода заключается в описании поведения систем при помощи наглядных геометрических представлений – фазовых портретов.

Свободное движение нелинейной динамической системы управления с одной управляемой величиной $x(t)$ в общем случае можно описать с помощью n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered} \mathrm{d}x_j(t)/\mathrm{d}t = \mathrm{f}_j\left[x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots;\ x_j(t),\ldots,x_n(t)\right],\ (j=1;2;\ldots;n), \\ x_1(t)=x(t),\ x_2(t)=x_1'(t),\ldots,\ x_{j+1}(t)=x_j'(t),\ x_n(t)=x_{n-1}'(t) \end{gathered} \qquad (1.2)$$

Мгновенное состояние системы и ее дальнейшее поведение однозначно определены, если в данный момент времени $t=t_i$ известны значения всех n переменных x_j. Эти значения можно рассматривать как координаты точки $(x_1;x_2;...;x_n)$ в n-мерном пространстве, которое называется фазовым пространством.

Точку с координатами $(x_1;x_2;...;x_n)$ называют изображающей точкой, а линию, по которой она перемещается при изменении состояния системы – фазовой траекторией.

Конкретной группе начальных условий $x_1(0)=x_{10};x_2(0)=x_{20};...;x_n(0)=x_{n0}$ соответствует единственное решение системы (1.2) – определенная совокупность искомых функций времени $x_1(t);x_2(t);...;x_n(t)$. Поэтому каждой группе начальных условий соответствует только одна начальная точка и единственная фазовая траектория, а множеству групп начальных условий соответствует семейство траекторий, которое называется фазовым портретом системы.

Метод фазового пространства наиболее удобен для анализа систем второго порядка, так как фазовые траектории располагаются в одной плоскости – в фазовой плоскости переменных x_1 и x_2. Фазовый портрет этих систем можно построить непосредственно по дифференциальному уравнению, не решая его.

Пусть описание системы представлено в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t &= \mathrm{f}_1(x_1, x_2), \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t &= \mathrm{f}_2(x_1, x_2), \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

где $x_1 = x$ – отклонение выходной величины или сигнала ошибки от установившегося значения.

Если в качестве второй переменной состояния x_2 принята производная переменной $x_1 = x$, т.е. $x_2 = x'$, то всегда функция $f_1(x_1, x_2) = x_2$.

Разделив второе уравнение системы (1.3) на первое, можно получить уравнение фазовых траекторий в дифференциальной форме:

$$\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1 = \mathrm{f}_2(x_1, x_2)/x_2, \tag{1.4}$$

в котором независимой переменной является величина x_1, а зависимой x_2.

Разделяя далее переменные x_1 и x_2 и интегрируя уравнение (1.4), получаем уравнение фазовых траекторий в явном виде:

$$x_2 = F(x_1) + C_0, \tag{1.5}$$

где C_0 – постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

Рассмотрим характерные фазовые траектории (рис. 1.3, б, г, е) системы второго порядка, соответствующие затухающему, расходящемуся и незатухающему колебательным процессам (рис. 1.3, а, в, д).

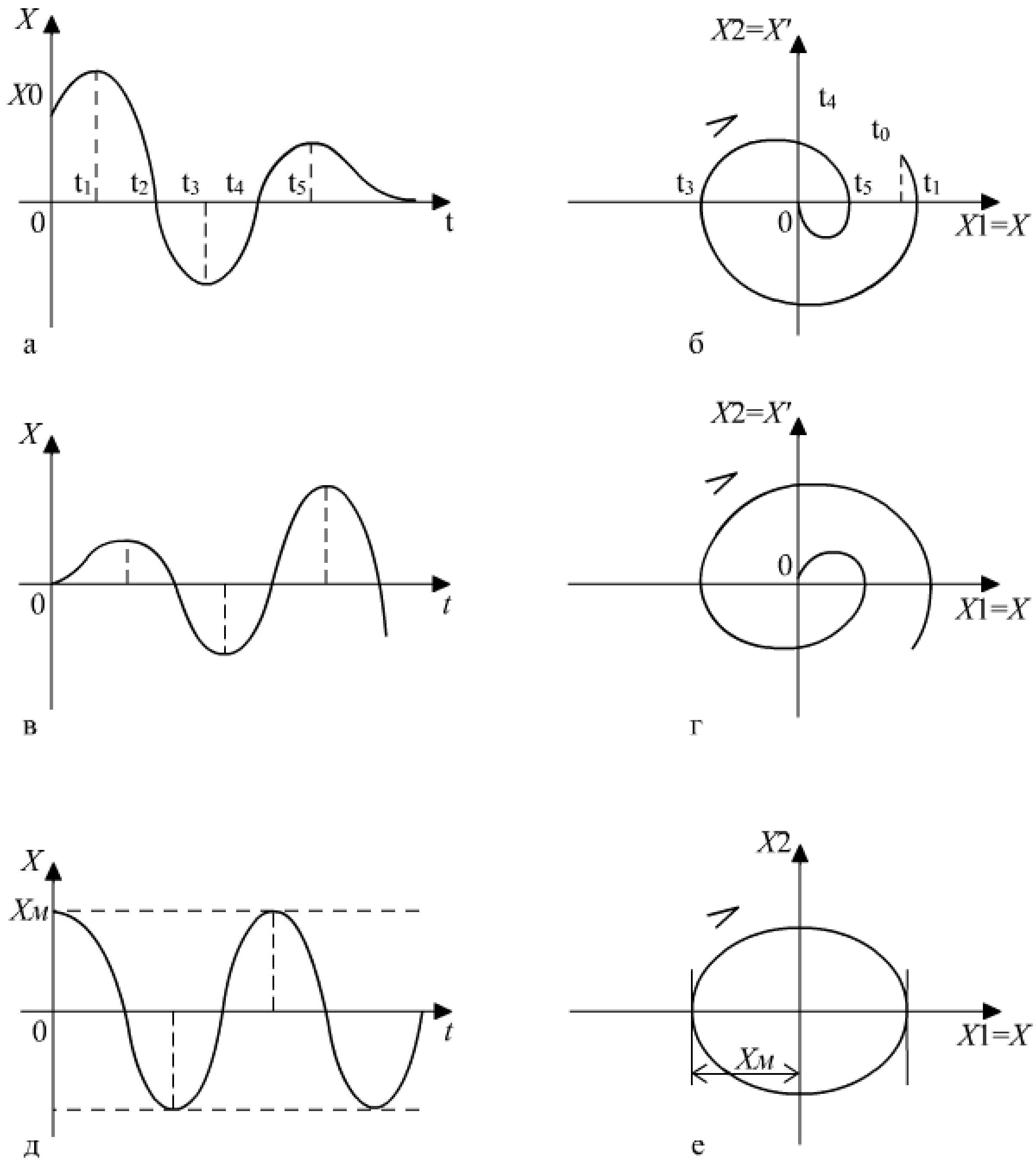


Рис. 1.3. Переходные процессы и фазовые траектории нелинейной системы

Моменты времени t_1, t_3, t_5, когда кривые $x(t)$ достигают своих максимумов и минимумов, соответствуют пересечению фазовыми траекториями $x_1 = x$, а моменты прохождения кривыми $x(t)$ через нуль (t_2, t_4) – пересечению оси $x_2 = x'$.

Самые важные для анализа нелинейных систем свойства фазовых траекторий заключаются в следующем:

1. Неустойчивому процессу соответствует фазовая траектория, удаляющаяся от начала координат.

2. Периодическому процессу соответствует замкнутая фазовая траектория, называемая предельным циклом.

Фазовый портрет нелинейной системы, обладающей кусочно-линейной или разрывной характеристикой, состоит из нескольких областей с различными фазовыми траекториями. Линии, отделяющие на плоскости одну область от другой, называются линиями переключения.

В точках пересечения фазовыми траекториями линий переключения происходит излом траекторий.

Задание (исходные данные)

- Ознакомиться с основами теории нелинейных систем;
- Согласно исходным данным осуществить построение зависимостей функции $x(t)$ и её фазовых траекторий.

Исходные данные приведены в таблице:

№	$x(t)$				
1	$5 \cdot sin(t+0.2)$	$3 \cdot sin(0.1t+0.01)/t$	$0.05t \cdot sin(0.1t+0.01)$	$2 \cdot e^{0.01 \cdot t}$	$\left(2 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
2	$3 \cdot sin(t+0.3)$	$4 \cdot sin(0.5t+0.01)/t$	$0.05t \cdot sin(t+0.01)$	$e^{0.02 \cdot t}$	$\left(e^{0.02 \cdot t}\right)^{-1}$
3	$6 \cdot sin(t+0.1)$	$5 \cdot sin(2t+0.1)/t$	$0.3t \cdot sin(0.2t+0.01)$	$3 \cdot e^{0.015 \cdot t}$	$\left(e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
4	$10 \cdot sin(t+0.5)$	$6 \cdot sin(t+0.2)/t$	$0.4t \cdot sin(0.3t+0.01)$	$4 \cdot e^{0.01 \cdot t}$	$\left(0.5 \cdot e^{0.06 \cdot t}\right)^{-1}$
5	$2 \cdot sin(t+0.01)$	$7 \cdot sin(0.7t+0.1)/t$	$0.5t \cdot sin(0.6t+0.05)$	$5 \cdot e^{0.01 \cdot t}$	$\left(0.2 \cdot e^{0.02 \cdot t}\right)^{-1}$
6	$5 \cdot cos(t+0.1)$	$8 \cdot sin(t+0.2)/t$	$0.6t \cdot sin(0.2t+0.01)$	$6 \cdot e^{0.01 \cdot t}$	$\left(0.3 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
8	$20 \cdot cos(t+0.15)$	$9 \cdot sin(t+0.3)/t$	$0.7t \cdot sin(0.4t+0.01)$	$7 \cdot e^{0.01 \cdot t}$	$\left(0.4 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
9	$7 \cdot cos(t+0.25)$	$10 \cdot cos(t+0.4)/t$	$0.8t \cdot sin(0.2t+0.01)$	$8 \cdot e^{0.01 \cdot t}$	$\left(0.5 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
10	$5 \cdot cos(t+0.1)$	$11 \cdot cos(t+0.5)/t$	$0.9t \cdot sin(0.5t+0.01)$	$2 \cdot e^{0.02 \cdot t}$	$\left(0.6 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
11	$5 \cdot tg(t+0.15)$	$12 \cdot cos(t+0.01)/t$	$t \cdot sin(0.2t+0.01)$	$2 \cdot e^{0.03 \cdot t}$	$\left(0.7 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
12	$10 \cdot tg(t+0.5)$	$13 \cdot cos(t+0.02)/t$	$1.1t \cdot sin(0.6t+0.01)$	$2 \cdot e^{0.04 \cdot t}$	$\left(0.8 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
13	$5 \cdot tg(t+0.1)$	$14 \cdot cos(0.5t+0.03)/t$	$1.2t \cdot sin(0.2t+0.03)$	$2 \cdot e^{0.05 \cdot t}$	$\left(0.9 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
14	$2 \cdot tg(t+0.2)$	$15 \cdot cos(2t+0.04)/t$	$1.3t \cdot sin(0.7t+0.01)$	$2 \cdot e^{0.06 \cdot t}$	$\left(e^{0.045 \cdot t}\right)^{-1}$
15	$5 \cdot arctg(t+0.35)$	$16 \cdot cos(t+0.05)/t$	$1.4t \cdot sin(0.2t+0.01)$	$2 \cdot e^{0.07 \cdot t}$	$\left(1.1 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
16	$2 \cdot arctg(t+0.15)$	$17 \cdot cos(t+0.06)/t$	$1.5t \cdot sin(0.8t+0.04)$	$2 \cdot e^{0.08 \cdot t}$	$\left(1.2 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
17	$3 \cdot arctg(t+0.12)$	$18 \cdot cos(t+0.07)/t$	$1.6t \cdot sin(0.2t+0.01)$	$2 \cdot e^{0.09 \cdot t}$	$\left(1.3 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$
18	$15 \cdot arctg(t+0.4)$	$19 \cdot cos(t+0.08)/t$	$1.7t \cdot sin(0.9t+0.01)$	$2 \cdot e^{0.1 \cdot t}$	$\left(1.4 \cdot e^{0.01 \cdot t}\right)^{-1}$