ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6
MS EXCEL Решение нелинейных уравнений и систем.
Теоретические сведения

1.1. Основные понятия

1.1.1. Команда Подбор параметра

Команда **Подбор параметра** позволяет определить неизвестное значение (параметр), которое будет давать желаемый результат. Технология использования команды следующая:

- решить нужную задачу с каким-либо начальным значением параметра;
- выбрать команду **Подбор параметра** (лента Данные);
- в окне диалога **Подбор параметра** в поле **Установить в ячейке** задать абсолютную ссылку на ячейку, содержащую расчетную формулу, а в поле **Значение** — то значение, которое следует получить в качестве результата формулы;
- в поле **Изменяя значение ячей**ки ввести ссылку на ячейку с параметром;
- нажать кнопку **ОК** или клавишу **Enter**, на экране появится окно диалога **Результат подбора параметра;**
- для сохранения найденного значения нажать кнопку **ОК.** Для восстановления значения, которое было в ячейке с параметром до использования команды **Подбор параметра** нажать кнопку **Отмена.**
- При подборе параметра Excel использует итерационный процесс. Он проверяет для изменяемой ячейки одно значение за другим, пока не получит нужное решение.
- Если задача подбора параметра занимает много времени, можно нажать кнопку **Пауза** в окне диалога **Результат** подбора параметра и прервать вычисление, а затем нажать кнопку **Шаг**, чтобы просмотреть результаты последовательных итераций.
- По умолчанию команда **Подбор параметра** прекращает вычисления, когда выполняется 100 итераций, или при получении результата, который находится в пределах 0,001 от заданного целевого значения. Если нужна большая точность, можно изменить используемые по умолчанию параметры на вкладке **Вычисления** команды **Параметры**
- Команда **Подбор параметра** находит только одно решение, даже если задача имеет несколько решений.

1.1.2. Поиск решений

Поиск решений может применяться для решения задач, которые включают много изменяемых ячеек, и помогает найти комбинацию переменных, которые максимизируют или минимизируют значение в целевой ячейке.

Он также позволяет задать одно или несколько ограничений условий, которые должны выполняться при поиске решений.

Для запуска этого инструмента следует выполнить команду **Поиск решения**

В диалоговом окне **Поиск решения** в поле **Установить целевую ячейку** задается цель, которую должен достичь поиск решения.

Целевая ячейка может быть задана ссылкой или именем. **Поиск решения** может находить конкретное значение целевой функции.

В этом случае, задав только изменяемую ячейку без указания ограничений, можно использовать **Поиск решения** вместо команды **Подбор параметра.**

В поле **Изменяя ячейки** следует задать ячейки с переменными. Можно указать ссылки на ячейки или их имена. Если ячейки находятся в несмежных диапазонах, их следует разделять точкой с запятой.

1.4. Практическая работа

1.4.1. Примеры

<u>Пример 1.</u> Найти корни полинома $\mathbf{x^3 - 0{,}01x^2 - 0{,}7044x + 0{,}139104 = 0}$.

<u>Решение:</u>

1. Для начала решим уравнение графически. Известно, что графическим решением уравнения f(x)=0 является точка пересечения графика функции f(x) с осью абсцисс, т.е. такое значение **x**, при котором функция обращается в ноль.

2. Проведем табулирование нашего полинома на интервале от -1 до 1 с шагом 0,2. Результаты вычислений приведены на рис. 1., где в ячейку B2 была введена формула: = A2^3 - 0,01*A2^2 - 0,7044*A2 + 0,139104. На графике видно, что функция три раза пересекает ось Ox, а так как полином третьей степени имеется не более трех вещественных корней, то графическое решение поставленной задачи найдено. Иначе говоря, была проведена локализация корней, т.е. определены интервалы, на которых находятся корни данного полинома: [-1,-0.8], [0.2,0.4] и [0.6,0.8].

	A	B
1	x	y
2	-1	-0,166496
3	-0,8	0,184224
4	-0,6	0,342144
5	-0,4	0,355264
6	-0,2	0,271584
7	0	0,139104
8	0,2	0,005824
9	0,4	-0,080256
10	0,6	-0,071136
11	0,8	0,081184
12	1	0,424704
13	Корни полинома	Значение функции
14	-0,9	0,035964
15	0,3	-0,046116
16	0,7	-0,015876

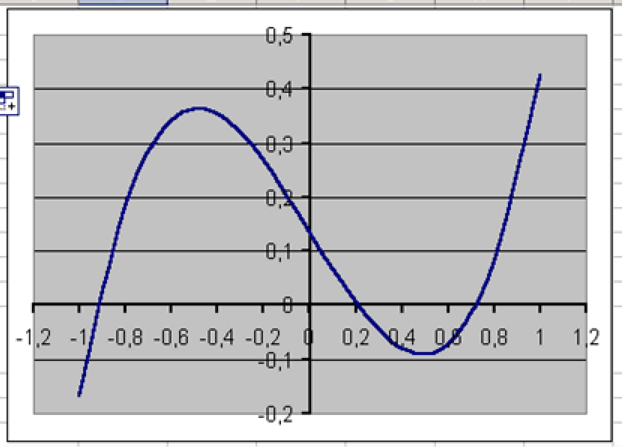

Рис. 1 Графическое решение задачи

3. Теперь можно найти корни полинома методом последовательных приближений с помощью команды **Подбор параметра**.

4. После ввода начальных приближений и значений функции можно обратиться к команде **Подбор параметра**, расположенной на ленте **Данные** в группе **Работа с данными** – **Анализ что-если** и заполнить диалоговое окно следующим образом (см. рис. 2).

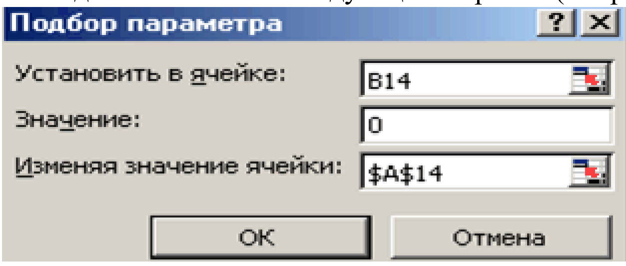

Рис. 2 Вид диалогового окна

5. В поле **Установить** в ячейке дается ссылка на ячейку, в которую введена формула, вычисляющая значение левой части уравнения (уравнение должно быть записано так, чтобы его правая часть не содержала переменную). В поле **Значение** вводим правую часть уравнения, а в поле **Изменяя** значения ячейки дается ссылка на ячейку, отведенную под переменную. Заметим, что вводить ссылки на ячейки в поля диалогового окна **Подбор параметров** удобнее не с клавиатуры, а щелчком на соответствующей ячейке.

6. После нажатия кнопки ОК появится диалоговое окно **Результат подбора параметра** (см. рис. 3) с сообщением об успешном завершении поиска решения, приближенное значение корня будет помещено в ячейку A14.

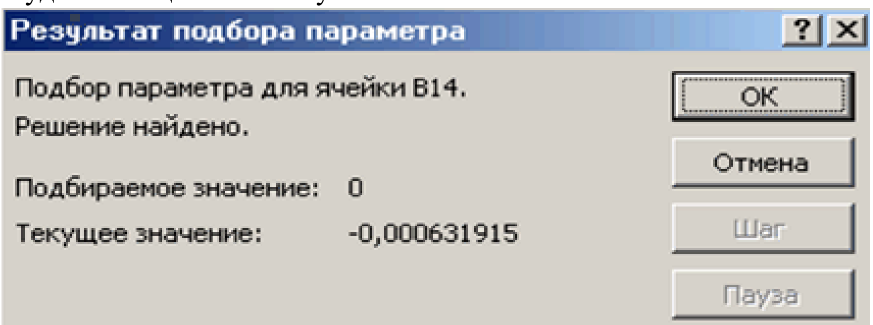

Рис. 3 Результат подбора параметров

7. Два оставшихся корня находим аналогично. Результаты вычислений будут помещены в ячейки A15 и A16 (см. рис. 4).

	A	B
13	**Корни полинома**	**Значение функции**
14	-0,92034081	-0,000632
15	0,210213539	-0,000123
16	0,720718302	0,0006019

Рис. 4 Результаты решения задачи

Пример 2. Решить уравнение $e^x - (2x - 1)^2 = 0$.

Решение:

1. Проведем локализацию корней нелинейного уравнения.

Для этого представим его в виде f(x) = g(x) , т.е. $e^x = (2x - 1)^2$ или $f(x) = e^x$, $g(x) = (2x - 1)^2$, и решим графически.

Графическим решением уравнения f(x) = g(x) будет точка пересечения линий f(x) и g(x).

Построим графики f(x) и g(x). Для этого в диапазон A3:A18 введем значения аргумента. В ячейку B3 введем формулу для вычисления значений функции f(x): =EXP(A3), а в C3 для вычисления g(x): =(2*A3-1)^2.

Результаты вычислений и построение графиков ***f(x)*** и ***g(x)*** в одной графической области показаны на рис. 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3	-1	0,367879	9						
4	-0,8	0,449329	6,76						
5	-0,6	0,548812	4,84						
6	-0,4	0,67032	3,24						
7	-0,2	0,818731	1,96						
8	0	1	1						
9	0,2	1,221403	0,36						
10	0,4	1,491825	0,04						
11	0,6	1,822119	0,04						
12	0,8	2,225541	0,36						
13	1	2,718282	1						
14	1,2	3,320117	1,96						
15	1,4	4,0552	3,24						
16	1,6	4,953032	4,84						
17	1,8	6,049647	6,76		**Решение уравнения**			1,5	0,481689
18	2	7,389056	9						

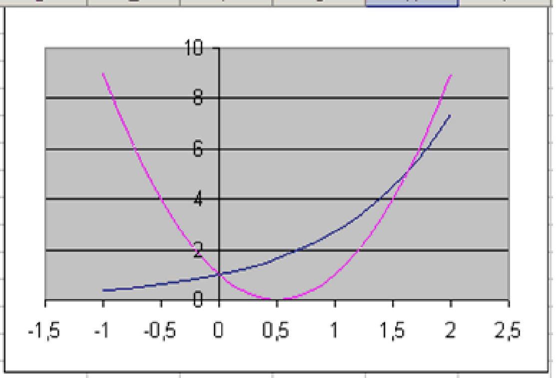

Рис. 5 Графическое решение задачи 2

На графике видно, что линии f(x) и g(x) пересекаются дважды, т.е. данное уравнение имеет два решения. Одно из них тривиальное и может быть вычислено точно:

$$(x = 0) \Rightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ (2x - 1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = 1.$$

Для второго можно определить интервал изоляции корня:

1,5 < x < 2.

2. Теперь можно найти корень уравнения на отрезке [1.5,2] методом последовательных приближений.

Введём начальное приближение в ячейку H17 = 1,5, и само уравнение, со ссылкой на начальное приближение, в ячейку I17 =EXP(H17)-(2*H17-1)^2 (см. рис. 5).

Далее воспользуемся командой **Подбор параметра** и заполним диалоговое окно (см. рис.6).

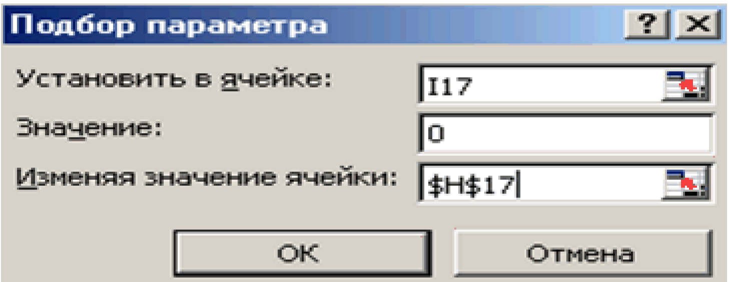

Рис. 6

Результат поиска решения будет выведен в ячейку H17 (см. рис. 7).

	E	F	G	H	I
17	**Решение уравнения**			1,629052	3,14E-06
18					

Рис. 7 Результаты решения задачи 2

Пример 3. Решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} y - \sin(x+1) - 0.8 = 0 \\ \sin(y-1) + x - 1.3 = 0 \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

1. Рассмотрим, как можно решить систему уравнений:

$F_1(x)=0$,

$F_2(x)=0$,

…

$F_n(x)=0$

с помощью решающего блока Поиск Решения, который позволяет решать не только оптимизационные задачи, но и обычные уравнения и системы уравнений. Для решения этой задачи ее можно сформулировать одним из следующих способов:

1. Найти минимум (максимум) функции

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x),$$

при системе ограничений, заданной в виде равенств $F_i(x) = 0$;

2. Найти минимум функции

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i^2(x) = F_1^2(x) + F_2^2(x) + \ldots F_n^2(x).$$

В этом случае задача решается без ограничений.

2. Выразим y из каждого уравнения и построим графики функций рис.8, 9:

	A	B	C
1	**x**	**y1**	**y2**
2	0,3	1,7636	2,5708
3	0,5	1,7975	1,9273
4	0,7	1,7917	1,6435
5	0,9	1,7463	1,4115
6	1,1	1,6632	1,2014
7	1,3	1,5457	1,0000
8	1,5	1,3985	0,7986
9	1,7	1,2274	0,5885
10	1,9	1,0392	0,3565
11	2,1	0,8416	0,0727
12	2,3	0,6423	-0,5708
13			

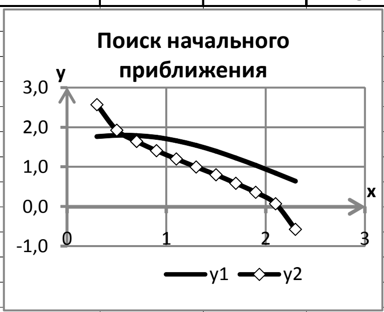

Рис. 8. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения данных

	B	C
1	**y1**	**y2**
2	=0,8+SIN(A2+1)	=1+ASIN(1,3-A2)
3	=0,8+SIN(A3+1)	=1+ASIN(1,3-A3)
4	=0,8+SIN(A4+1)	=1+ASIN(1,3-A4)
5	=0,8+SIN(A5+1)	=1+ASIN(1,3-A5)
6	=0,8+SIN(A6+1)	=1+ASIN(1,3-A6)
7	=0,8+SIN(A7+1)	=1+ASIN(1,3-A7)
8	=0,8+SIN(A8+1)	=1+ASIN(1,3-A8)
9	=0,8+SIN(A9+1)	=1+ASIN(1,3-A9)
10	=0,8+SIN(A10+1)	=1+ASIN(1,3-A10)
11	=0,8+SIN(A11+1)	=1+ASIN(1,3-A11)
12	=0,8+SIN(A12+1)	=1+ASIN(1,3-A12)

Рис. 9. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения формул

3. Из графика видно, что наша система имеет одно решение. Введем начальные приближения x и y (рис. 10). В ячейке C20 введена формула
=(B20-SIN(A20+1)-0,8)^2+(SIN(B20-1)+A20-1,3)^2

	A	B	C
19	x	y	***f₁(x,y)² +f***
20	0,5	1,5	0,191271

Рис. 10. Фрагмент листа MS Excel с начальными значениями параметров

4. С помощью надстройки **Поиск решения** (рис.11) найдем значения x и y (рис. 12).

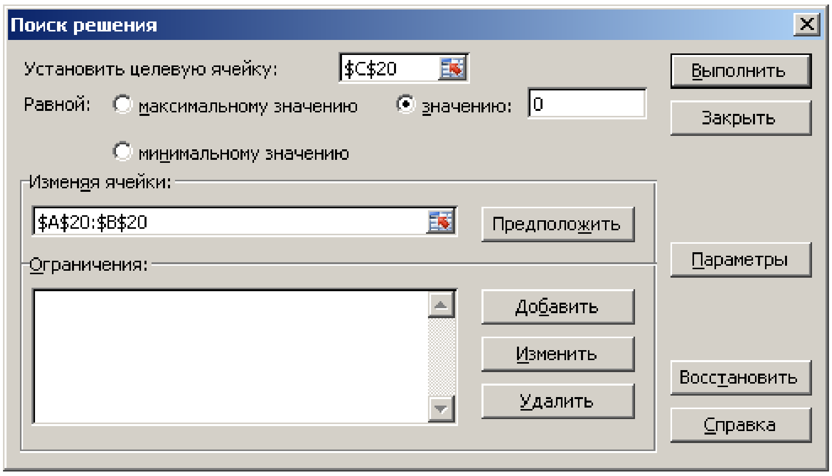

Рис. 11. Диалоговое окно надстройки **Поиск решения**

	A	B	C
19	x	y	***f₁(x,y)² +f***
20	0,582357	1,799558	4,95E-07

Рис. 12. Фрагмент листа MS Excel с результатом решения

Пример 4. На рабочем листе MS EXCEL вычислить определенный интеграл по методу трапеций.

Пример:

Вычислить $J = \int\limits_{1.5}^{3} \frac{x+1}{2} \lg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$

<u>Решение:</u>

1. Согласно методу трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx f(x_0)\frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)h + f(x_n)\frac{h}{2}.$$

2. Разобьём промежуток интегрирования на 12 частей, для каждой точки x посчитаем значение подынтегральной функции. Решение представлено на рис. 13-14.

	A	B	C	D	E
3		**x**	**f(x)**	**h*f(x)**	
4	0	1,5	0,064	0,004	f(x)*h/2
5	1	1,63	0,158	0,020	
6	2	1,75	0,254	0,032	
7	3	1,88	0,352	0,044	
8	4	2	0,452	0,056	
9	5	2,13	0,553	0,069	
10	6	2,25	0,655	0,082	
11	7	2,38	0,760	0,095	
12	8	2,5	0,866	0,108	
13	9	2,63	0,974	0,122	
14	10	2,75	1,083	0,135	
15	11	2,88	1,194	0,149	
16	12	3	1,306	0,082	f(x)*h/2
17			**сумма**	**0,998**	

Рис. 13. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения данных

	A	B	C	D
1	**a**	**b**	**h**	
2	1,5	3	=(B2-A2)/12	
3		**x**	**f(x)**	**h*f(x)**
4	0	1,5	=(B4+1)/2*LOG10(B4^2/2)	=C4*$C$2/2
5	1	=B4+$C$2	=(B5+1)/2*LOG10(B5^2/2)	=C5*$C$2
6	2	=B5+$C$2	=(B6+1)/2*LOG10(B6^2/2)	=C6*$C$2
7	3	=B6+$C$2	=(B7+1)/2*LOG10(B7^2/2)	=C7*$C$2
8	4	=B7+$C$2	=(B8+1)/2*LOG10(B8^2/2)	=C8*$C$2
9	5	=B8+$C$2	=(B9+1)/2*LOG10(B9^2/2)	=C9*$C$2
10	6	=B9+$C$2	=(B10+1)/2*LOG10(B10^2/2)	=C10*$C$2
11	7	=B10+$C$2	=(B11+1)/2*LOG10(B11^2/2)	=C11*$C$2
12	8	=B11+$C$2	=(B12+1)/2*LOG10(B12^2/2)	=C12*$C$2
13	9	=B12+$C$2	=(B13+1)/2*LOG10(B13^2/2)	=C13*$C$2
14	10	=B13+$C$2	=(B14+1)/2*LOG10(B14^2/2)	=C14*$C$2
15	11	=B14+$C$2	=(B15+1)/2*LOG10(B15^2/2)	=C15*$C$2
16	12	=B15+$C$2	=(B16+1)/2*LOG10(B16^2/2)	=C16*$C$2/2
17			**сумма**	**=СУММ(D4:D16)**

Рис. 14. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения формул

Варианты заданий:

Задание 1. Найти корни алгебраического уравнения $f(x)=0$

Таблица 1

№ варианта	$f(x)$
1	$1{,}001x^3+14{,}999x^2-16{,}899x-231{,}08$
2	$1{,}129x^3-3{,}087x^2+2{,}543x+1{,}005$
3	$2{,}078x^3+5{,}002x^2-10{,}21x-10{,}65$
4	$0{,}543x^4-40{,}89x^2-10{,}21x+128{,}76$
5	$0{,}754x^3+12{,}432x^2-10{,}21x-43{,}765$
6	$2{,}045x^3+5{,}11x^2-0{,}999x+7{,}15$
7	$3{,}987x^2+12{,}321x-34{,}0231$
8	$-0.997x^3+15{,}12x^2-17{,}54x+6{,}32$
9	$0{,}95x^2+1{,}123x-5{,}764$
10	$0{,}112x^4-3{,}987x^3-0{,}12x+15{,}33$

11	$4{,}201x^3 - 45{,}004x^2 + 298{,}02$
12	$-1{,}007x^2 + 12{,}001x - 22{,}999$
13	$0{,}99x^2 - 2{,}002x - 23{,}007$
14	$0{,}99x^3 - 1{,}989x^2 - 669{,}98$
15	$1{,}01x^3 - 2{,}003x^2 - 112{,}09x + 76{,}03$

Задание 2 Найти корни трансцендентного уравнения $f(x) = 0$

Таблица 2

№ варианта	$f(x)$
1	$2x^2 - 3\ln\lvert x + 0.1\rvert - 6$
2	$2\sin(x) - x^2 + 10$
3	$e^{0,3x} + x^2 - 7x$
4	$\cos\left(\frac{x}{5}\right) - \ln\lvert x - 0{,}1\rvert + 1$
5	$\sin(2x) - e^{-0,7x} + 20$
6	$arctgx - \frac{1}{3x^3}$
7	$x\lg(x+1) - 1$
8	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 0{,}5x$
9	$e^{-2x} - 2x + 1$
10	$arctg(x-1) + 2x$
11	$\sqrt{x+1} - \frac{1}{x}$
12	$3x + \cos x + 1$
13	$x - \sqrt{\lg(x+2)}$
14	$x^2 - \ln(x+1)$
15	$2arctgx - x + 3$

Задание 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$.

Таблица 3

Вариант	$f_1(x)$	$f_2(x)$
1	$tg(xy + 0{,}3) - x^2$	$0{,}9x^2 + 2y^2 - 1$
2	$\sin(x+1) - y - 1{,}2$	$2x + \cos y - 2$

3	$tg(xy)-x^2$	$0{,}6x^2+2y^2-1$
4	$2y-\cos(x+1)$	$x+\sin y+0{,}4$
5	$\sin(x+y)-1{,}3x$	x^2+y^2-1
6	$\cos y+x-1{,}5$	$2y-\sin(x-0{,}5)-1$
7	$tg(xy+0{,}1)-x^2$	$0{,}5x^2+2y^2-1$
8	$tg(x-y)-x$	x^2+2y^2-1
9	$\cos(x-1)-y-0{,}8$	$x-\cos y-2$
10	$\cos(y+0{,}5)-x-2$	$\sin x-2y-1$
11	$\sin(x-y)-x+1$	$x^2-y^2-\frac{3}{4}$
12	$\cos(x+0{,}5)-y-2$	$\sin y-2x-1$
13	$\sin(x+y)-1{,}1x-0{,}1$	x^2+y^2-1
14	$\sin x+2y-1{,}6$	$\cos(y-1)+x-1$
15	$\cos(x-1)+y-0{,}5$	$x-\cos y-3$
16	$\sin y+2x-2$	$\cos(x-1)+y-0.7$
17	$\sin(x+y)-1{,}5x$	x^2+y^2-1
18	$tg(xy+0{,}3)-x^2$	$0{,}5x^2+2y^2-1$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл $y=\int_a^b f(x)dx$ методом трапеций.

Таблица 4

№ варианта	a	b	$f(x)$
1	0,8	1,6	$\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}$
2	1,6	2,4	$(x+1)\sin x$
3	0,8	1,2	$\frac{\sin(2x)}{x^2}$
4	0,8	1,6	$\frac{\lg(x^2+1)}{x}$
5	0,4	1,2	$\sqrt{x}\cos\left(x^2\right)$
6	0,4	0,8	$\frac{tg(x^2+0{,}5)}{1+2x^2}$
7	0,15	0,63	$\sqrt{x+1}\lg(x+3)$
8	1,2	2,8	$\left(\frac{x}{2}+1\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$
9	0,6	0,72	$\left(\sqrt{x}+1\right)tg\,2x$
10	0,8	1,6	$\left(x^2+1\right)\sin(x-0{,}5)$

11	1,6	3,2	$\frac{x}{2}\lg\left(\frac{x^2}{2}\right)$
12	0.8	1,7	$\frac{1}{\sqrt{2x^2+0,3}}$
13	1,3	2,1	$\frac{\sin\left(x^2-1)\right)}{2\sqrt{x}}$
14	0,8	1,2	$\frac{\sin\left(x^2-0,4)\right)}{x+2}$
15	0,8	1,2	$\frac{\cos x}{x^2+1}$