Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
«Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»

Индивидуальное домашнее задание (Метрология)

Составитель:
доцент кафедры №6
Ефремов Н.Ю.

Санкт-Петербург
2021

1. Прямые однократные измерения

Класс точности средств измерений

Класс точности средства измерений (СИ) – обобщенная характеристика данного типа СИ и, как правило, отражающая уровень их точности, выражаемая пределами допускаемых основной и дополнительной погрешностей, а также другими характеристиками, влияющими на точность.

Основная погрешность – это погрешность СИ, используемого в нормальных условиях, которые обычно определены в нормативно-технической документации на данное средство измерения.

Под *дополнительными погрешностями* понимают изменение погрешности СИ вследствие отклонения влияющих величин от нормальных значений.

Принципы нормирования метрологических характеристик СИ по классам точности регламентированы ГОСТ 8.401-80. Пределы допускаемых основной и дополнительных погрешностей выражаются в форме приведенных (γ), относительных (δ) или абсолютных погрешностей (Δ).

Пределы допускаемой абсолютной основной погрешности Δ СИ определяются по формуле (1)

$$\Delta = \pm(a + bx) \qquad (1),$$

где x - значение измеряемой величины или число делений, отсчитанных по шкале;

a, b - положительные числа, не зависящие от x.

Коэффициент a в (1) соответствует аддитивной составляющей погрешности (граница погрешностей СИ полагается практически неизменно во всем диапазоне измерений), а коэффициент b – мультипликативной (граница погрешности изменяется практически линейно с увеличением значения x). При b=0 в погрешности СИ присутствует только аддитивная составляющая.

Пределы допускаемой приведенной основной погрешности определяются по формуле (для случая, когда присутствует только аддитивная составляющая погрешности СИ, Δ=±a):

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} = \pm p, \qquad (2),$$

где Δ - предел допускаемой абсолютной основной погрешности;

X_N - нормирующее значение, выраженное в тех же единицах, что и Δ ;

p - положительное число, присутствующее в обозначении класса точности, выбираемое из ряда $1\cdot10^n$; $1{,}5\cdot10^n$; $(1{,}6\cdot10^n)$; $2\cdot10^n$; $2{,}5\cdot10^n$; $(3\cdot10^n)$; $4\cdot10^n$; $5\cdot10^n$; $6\cdot10^n$; (n =1, 0, -1, -2, и т. д.).

В качестве нормирующего значения могут быть выбраны: предел измерения СИ, больший из пределов измерений СИ , сумма модулей пределов измерений (для СИ с симметричной относительно нулевой отметки шкалой).

Пределы допускаемой относительной основной погрешности определяются по формулам (3) или (4)

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \pm q, \qquad (3)$$

или

$$\delta = \frac{\Delta}{x} = \pm\left[c + d\left(\left|\frac{X_K}{x}\right| - 1\right)\right] \qquad (4),$$

где q - положительное число, аналогичное числу p в (2);

X_K - больший (по модулю) из пределов измерений;

c, d - положительные числа, выбираемые из ряда для числа p в (2).

Числа c и d связаны с коэффициентами a и b соотношениями:

$$c = b + d;\ d = \frac{a}{|X_K|} \qquad (5)$$

Примеры обозначений классов точности приведены в табл. 1.

Таблица 1

Обозначение КТ		Форма выражения погрешности	Пределы допускаемой основной погрешности, %
В документации	На СИ		
Класс точности 1,5	1,5	Приведенная	$\gamma = \pm 1{,}5$
Класс точности 0,5	0,5	Относительная	$\delta = \pm 0{,}5$

Класс точности 0,02/0,01	0,02/0,01	Относительная	$\delta = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\left\|\frac{X_K}{x}\right\| - 1\right)\right]$

Типовой пример

Миллиамперметром класса точности (1) с пределом измерений 150 мА измеряют ток в цепи, равный 50 мА. Определить предел допускаемой погрешности.

Решение.

В задачах подобного типа необходимо рассчитать значение предела абсолютной основной погрешности Δ. В случае обозначения КТ в круге для миллиамперметра нормируется относительная погрешность δ, δ=±1%; измеряемое значение *x*=50мА. Предел допускаемой основной погрешности равен:

$$\Delta = \frac{\gamma \cdot x}{100\%} = \frac{1 \cdot 50}{100} = 0{,}5\,(\text{мА})$$

Ответ: $\Delta = 0{,}5\,(\text{мА})$

Задача №1

Шкала вольтметра класса точности *A* имеет верхний предел 100 В. Измерено напряжение на участке схемы, с относительной погрешностью δ=*B*°%. Восстановить измеренное значение $X_{изм}$.

Решить по вариантам, приведенным в табл.2.

Таблица 2

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	2	1,5	1	0,5	0,1	2,5	0,5	1	1,5	2	0,1	2,5	1,5	2	1
B	4	3	1	2	0,5	5	0,5	2	4,5	2	1	10	7,5	10	5
№ варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
A	0,5	1	0,1	2	1,5	2,5	1	0,5	2	0,1					
B	5	4	2	5	9	15	10	4	8	4					

Задача №2

При измерении сопротивления стрелка омметра показала на значение шкалы X Ом, относительная погрешность составила 1%. Восстановить значение предела измерения СИ, если его класс точности – 0,01/0,02.

Решить по вариантам, определив значение X из соотношения:

$X = N \cdot 10$, где N – номер варианта.

Задача №3

Погрешность образцового прибора должна быть меньше нормируемой погрешности поверяемого прибора по меньшей мере в 3 раза. Каким должен быть класс точности образцового прибора, если его верхний предел измерения превышает верхний предел измерения поверяемого прибора класса A в B раз?

Решить по вариантам, приведенным в табл.3.

Таблица 3

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	2	1,5	1	2,5	4	5	6	1	1,5	2	4	2,5	6	5	1
B	2	2	3	2	4	2	3	2	1,5	3	2	2,5	2	3	1,5
№ варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
A	6	5	4	2	1,5	2,5	1	5	4	2					
B	1,5	2,5	3	4	2,5	1,5	2,5	4	4	1,5					

2. Прямые измерения с многократными наблюдениями

Обработка результатов измерений

Наиболее часто в измерительной практике встречаются именно многократные измерения физических величин. Рассмотрим последовательность расчета при обработке результатов подобных измерений по ГОСТ Р 8.736-2011 «Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения».

1. Из результатов наблюдений исключают составляющие систематической погрешности и оценивают границы неисключённых остатков систематических составляющих.

2. Вычисляют среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \qquad (6)$$

где X_i – i-й результат измерения;
n – общее число измерений.

При равноточных измерениях можно вычислить среднее арифметическое неисправленного результата, а затем из него вычесть систематическую погрешность.

3. Вычисляют среднеквадратическое отклонение (СКО) отдельного результата измерений σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}} \qquad (7)$$

4. Вычисляют СКО среднего значения результата измерений $\sigma_{\overline{X}}$:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (8)$$

5. Проверяют принадлежность результатов измерений нормальному закону распределения по критерию Пирсона χ^2 (при n>50).

6. Определяют доверительные границы случайной погрешности результата измерений δ:

$$\delta = \pm t_C \sigma_{\overline{X}}, \qquad (9)$$

где t_c – коэффициент Стьюдента при заданной доверительной вероятности P и числе степеней свободы $k = n - 1$. Значения коэффициентов приведены в табл. 4.

Таблица 4

N	Значения t_c при уровне P, равном				
	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413

9	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
35	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
45	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960
55	1,6730	2,004	2,3961	2,6682	3,4764
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,4350
80	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
90	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
110	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	3,3812
120	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	1,6448	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

7. Определяют границы неисключенной систематической погрешности Θ. При неизвестном законе распределения для m неисключенных составляющих систематической погрешности пользуются соотношением (10):

$$\Theta = k_m \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \Theta_j^2}, \qquad (10)$$

где k_m – коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и числа составляющих m (Табл. 5).

Таблица 5

P	**Значения *k* при *m*=**					**Среднее значение *k***
	2	3	4	5	∞	
0,90	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	1,13	1,10
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	1,49	1,40

8. Для оценки вклада случайной и систематической погрешностей вычисляют отношение: $\Theta / \sigma_{\bar{X}}$. При значении данного отношении менее 0,8 пренебрегают систематической погрешностью, а при значении более 8 – пренебрегают случайной погрешностью. В промежутке между этими значениями учитывают обе погрешности.

9. В общем случае (при необходимости учесть систематические и случайные составляющие погрешности измерений) определяют границы погрешности результата измерений как:

$$\Delta = \pm k S_{\Sigma}, \qquad (11)$$

где $k = \dfrac{\delta + \Theta}{\sigma_X + \sqrt{\dfrac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{m}\Theta_j^2}}$,

$S_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2 + \dfrac{1}{3}\sum\limits_{j=1}^{m}\Theta_j^2}$ - оценка суммарного СКО результата многократных измерений.

10. Описывают результат измерений в терминах интервальной оценки погрешности при заданной доверительной вероятности:

$$X(P) = \bar{X} \pm \Delta(P). \qquad (12)$$

Типовой пример

В таблице 6 приведены результаты двадцати наблюдений сопротивления *Ri* резистора, проведенных в нормальных условиях.

Таблица 6

I	R_i, Ом	*I*	R_i, Ом	*I*	R_i, Ом	*I*	R_i, Ом
1	8997	6	8993	11	8992	16	8993
2	8994	7	8995	12	8997	17	8991
3	8991	8	8995	13	8993	18	8994
4	8993	9	8994	14	8996	19	8996
5	8994	10	8993	15	8995	20	8994

При нормальном законе распределения случайных погрешностей найти доверительные границы случайной составляющей погрешности результата измерения при доверительной вероятности P = 0,95.

Решение. В соответствии с порядком обработки результатов многократных измерений последовательно рассчитаем $\overline{R}$, σ, $\sigma_{\overline{R}}$, δ по формулам (6) – (9)

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n} = \frac{179880}{20} = 8994(\text{Ом});$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{56}{19}} \approx 1{,}72\,(Ом)$$

$$\sigma_{\overline{R}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}72}{\sqrt{19}} \approx 0{,}38(\text{Ом}).$$

Из таблицы 4 для *P*=0,95 и *k*=*n*-1=19 имеем значение коэффициента t_c=2,093. Доверительная граница случайной составляющей:

$$\delta = \pm t_C \sigma_{\overline{X}} = \pm 2{,}093 \cdot 0{,}38 \approx \pm 0{,}8\,(Ом)$$

Результат можно записать в следующем виде (в данной задаче систематическими погрешностями измерений можно пренебречь, поэтому доверительная граница суммарной погрешности *Δ*=*δ*).

$$R = (8994 \pm 0{,}8)\,\text{Ом},\ \text{P} = 0{,}95$$

Ответ: δ=±0,8 Ом.

Задача №4

Результат *X* измерений значения постоянного тока миллиамперметром записан в виде *I* = (25±3) мА, *P* = 0,95. Найти оценку СКО результата многократных измерений.

Решить по вариантам, определив значение числа измерений *X* из соотношения:

$X = N + 5$, где *N* – номер варианта.

Задача №5

В *Y* измерениях периода колебаний математического маятника получено значение СКО случайной составляющей погрешности единичного измерения S_i = *X* с. Неисключенная систематическая погрешность результата определяется предельной погрешностью секундомера θ= 0,01 с (Р = 0,99). Оценить суммарное СКО результата многократных измерений.

Решить по вариантам, приведенным в табл.7.

Таблица 7

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Y	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05
№ варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
Y	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34					
X	0,04	0,03	0,02	0,01	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04					

Задача №6

Измерена емкость конденсатора. По итогам обработки результатов установлено, что СКО среднего значения S=*X* мкФ, а граница случайной погрешности δ=±1 мкФ. Восстановить количество измерений емкости, если уровень доверительной вероятности P=0,95.

Решить по вариантам, приведенным в таблице 8.

Таблица 8

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	0,360	0,489	0,389	0,488	0,409	0,487	0,423	0,485	0,434	0,483	0,442	0,481	0,449	0,479	0,454
№ варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
X	0,476	0,459	0,474	0,463	0,472	0,469	0,314	0,498	0,493	0,504					

Правила округления при обработке результатов измерений

1. Погрешность оценки измеряемой величины следует выражать не более чем двумя значащими цифрами. Две значащие цифры в погрешности оценки измеряемой величины сохраняют:
   - при точных измерениях;
   - если первая значащая цифра не более трех.
2. Число цифр в промежуточных вычислениях при обработке результатов измерений должно быть на две больше, чем в окончательном результате. Погрешность при промежуточных вычислениях должна быть выражена не более чем тремя значащими цифрами.
3. Сохраняемую значащую цифру в погрешности оценки измеряемой величины при округлении увеличивают на единицу, если отбрасываемая цифра неуказываемого младшего разряда больше либо равна пяти, и не изменяют, если она меньше пяти.

Примеры:

8.3351 ≈ 8.34;

0.27375 ≈ 0.27
8.337 ≈ 8.3;
0.2510 ≈ 0.3;
833.438 ≈ 833;
271.515 ≈ 272.

Значащие цифры - все верные цифры числа, кроме нулей, стоящих впереди (в левой части) числа.
Примеры:
0,00807 – в этом числе имеется три значащих цифры: 8, ноль между 8 и 7 и 7; первые три нуля незначащие.
$8.12 \cdot 10^3$ – в этом числе 3 значащих цифры.
Записи 15,2 и 15,200 различны. Запись 15,200 означает, что верны сотые и тысячные доли. В записи 15,2 – верны целые и десятые доли.

Задача 7

В табл. 9 представлены результаты измерений размеров однотипных деталей D, изготовленных с помощью двух станков разной точности. Оценить погрешность изготовления деталей роботами 1 и 2 и сделать вывод об их точности. Привести полные результаты измерений с учетом правил округления.

Таблица 9

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
Р1	Р2	Р1	Р2	Р1	Р2	Р1	Р2	Р1	Р2
49,994	50,103	50,010	49,893	50,086	50,194	50,135	49,931	49,925	49,995
49,980	49,917	49,998	49,926	50,107	49,932	49,993	50,012	49,981	50,040
50,016	49,982	50,108	50,180	49,991	49,963	50,122	50,029	50,014	49,916
49,983	49,972	49,966	50,135	49,989	50,114	49,896	50,011	49,955	49,944
49,986	50,095	50,012	50,049	50,070	50,056	49,949	49,954	50,033	49,939
49,956	49,908	49,983	49,957	50,050	50,119	50,001	49,994	50,018	49,982
50,025	50,099	50,010	49,975	50,010	50,066	50,044	50,008	50,072	50,093
50,072	50,049	50,018	50,097	50,076	50,094	50,055	49,988	49,907	50,028
50,044	50,013	50,083	50,080	50,024	50,177	49,941	50,005	49,955	49,864
49,929	50,007	49,949	50,049	49,932	49,873	49,972	50,086	49,961	50,206

Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10	
P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2
49,929	49,845	50,043	50,005	49,925	50,052	49,915	50,107	50,055	49,902
49,925	50,213	50,010	49,948	49,931	49,928	50,034	50,011	49,991	50,048
49,962	50,170	50,101	49,977	49,973	50,010	50,033	49,971	49,996	49,978
49,970	49,867	49,894	49,953	50,069	50,057	50,068	50,167	49,994	49,937
49,996	49,986	49,957	49,946	50,047	49,851	50,006	49,935	49,911	50,040
49,913	50,193	50,104	49,974	50,018	50,084	49,964	49,969	49,970	49,956
50,018	50,029	50,126	49,984	49,954	49,973	49,971	49,984	50,003	49,978
49,978	49,965	50,122	50,012	50,027	50,168	50,069	49,975	50,164	49,977
49,912	49,825	50,022	49,990	50,072	50,022	49,997	50,018	49,996	49,938
50,024	49,936	49,999	50,001	49,889	49,938	49,851	50,106	50,127	50,019
Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15	
P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2
59,970	60,197	59,899	59,872	60,024	59,956	60,128	59,820	59,954	60,120
59,931	60,395	59,814	59,831	59,815	59,776	59,902	60,044	59,931	59,923
59,967	59,811	60,381	59,963	60,134	59,995	59,991	59,981	60,483	59,981
60,166	59,779	59,671	59,839	60,054	60,061	60,090	59,706	60,582	60,192
59,856	59,804	59,590	59,915	59,848	60,095	59,964	59,951	60,171	59,997
59,742	59,258	59,979	60,145	59,872	60,074	59,935	60,635	59,542	60,076
60,069	59,700	60,164	60,032	59,906	60,198	59,976	50,744	60,243	60,013
60,007	59,895	59,793	60,083	60,086	60,259	59,936	60,104	60,167	59,908
60,221	50,170	59,953	60,144	60,130	60,090	60,011	60,107	60,039	60,000
60,044	59,557	59,665	60,062	60,021	60,160	59,897	60,022	59,997	60,124
Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2
59,929	59,845	60,043	60,005	59,925	60,052	59,915	60,107	60,055	59,902
59,925	60,213	60,010	59,948	59,931	59,928	60,034	60,011	59,991	60,048

59,962	60,170	60,101	59,977	59,973	60,010	60,033	59,971	59,996	59,978
59,970	59,867	59,894	59,953	60,069	60,057	60,068	60,167	59,994	59,937
59,996	59,986	59,957	59,946	60,047	59,851	60,006	59,935	59,911	60,040
59,913	60,193	60,104	59,974	60,018	60,084	59,964	59,969	59,970	59,956
60,018	60,029	60,126	59,984	59,954	59,973	59,971	59,984	60,003	59,978
59,978	59,965	60,122	60,012	60,027	60,168	60,069	59,975	60,164	59,977
59,912	59,825	60,022	59,990	60,072	60,022	59,997	60,018	59,996	59,938
60,024	59,936	59,999	60,001	59,889	59,938	59,851	60,106	60,127	60,019
Вариант 21		Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24		Вариант 25	
P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2	P1	P2
49,929	49,865	50,043	50,005	49,945	50,032	49,915	50,157	50,075	49,942
49,925	50,203	50,010	49,948	49,931	49,928	50,034	50,019	49,931	50,148
49,992	50,175	50,082	49,967	49,973	50,040	50,033	49,921	49,896	49,978
49,970	49,867	49,894	49,973	50,049	50,057	50,068	50,137	49,994	49,937
49,996	49,986	49,951	49,946	50,047	49,881	50,006	49,935	49,961	50,070
49,913	50,143	50,034	49,964	50,018	50,084	49,964	49,969	49,970	49,966
50,078	50,089	50,116	49,984	49,934	49,973	49,971	49,934	50,003	49,978
49,978	49,985	50,022	50,032	50,027	50,128	50,069	49,975	50,134	49,937
49,932	49,725	50,082	49,990	50,022	50,022	49,997	50,018	49,996	49,918
50,124	49,936	49,999	50,001	49,861	49,908	49,851	50,106	50,107	50,019

Задача 8

На вольтметре класса точности A с пределом измерений B *B* был получен отсчет измеряемого напряжения U = X *B (табл. 10)*. Определить предел абсолютной погрешности и записать полный результат однократного измерения с учетом правил округления.

Таблица 10

№ вар.	A	B	X
1	1	100	59,88
2	0,5	150	114,7
3	2	200	75,2
4	1,5	250	189,4
5	2,5	300	210,7

6	1	500	438,1
7	5	1000	875,5
8	0,5	750	655,5
9	6	400	247,3
10	0,2	350	165,51
11	4	200	95,3
12	0,1	150	117,5
13	0,02	100	48,03
14	2	50	16,5
15	1,5	250	143,3
16	0,25	600	393,5
17	0,4	650	547,8
18	0,15	700	593,6
19	0,6	800	777,5
20	1	900	883,3
21	2,5	500	279,9
22	0,4	300	111,57
23	5	100	24,4
24	0,15	10	7,77
25	1	1500	888,4

3. Объединение рядов наблюдений

На практике часто возникает потребность в объединении результатов нескольких групп измерений одной и той же величины. Сравнение равноточности и однородности групп проводится по значимости отличий средних значений и дисперсий эмпирических распределений этих групп. На практике реализуются четыре варианта (13):

$$\begin{aligned}
&\text{1-й: } X_{ср1} = X_{ср2};\ \sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2\ ;\\
&\text{2-й: } X_{ср1} \neq X_{ср2};\ \sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2;\\
&\text{3-й: } X_{ср1} = X_{ср2};\ \sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_2;\\
&\text{4-й: } X_{ср1} \neq X_{ср2};\ \sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Равенство означает однородность значений среднего или дисперсий, т.е. принадлежность этих точечных оценок к одному распределению. В данном случае результаты наблюдений следует объединить и рассматривать их как одну выборку. Процедуры оценивания ничем не отличаются от обработки многократных равноточных наблюдений, рассмотренных выше .

Неравенство дисперсий означает неравноточность измерений в рассматриваемых группах, а неравенство средних – значимость различий, связанных с тем, что, по крайней мере, в одной группе не исключена существенная систематическая погрешность или в разных группах измеряли разные значения величин, а не одну и ту же. В таких случаях объединение групп лишено смысла.

Средневзвешенное при неравноточных (неравнорассеянных) измерениях $\overline{X_0}$ определяют по соотношению (14):

$$\overline{X_0} = \frac{\sum_i \alpha_i \cdot \overline{X_i}}{\sum_i \alpha_i}, \qquad (14)$$

где α_i – вес среднего i-й группы измерений;

$\overline{X_i}$ - среднее значение i-й группы.

Вес среднего группы α_i определяется по формуле (15)

$$\alpha_i = \frac{1}{\sigma^2_{\overline{X_i}}} = \frac{n_i}{\sigma_i^2}, \qquad (15)$$

где - $\sigma^2_{\overline{X_i}}$ - квадрат СКО (дисперсия) среднего значения i-й группы;

σ_i^2 - дисперсия единичного значения i-й группы;

n_i – число наблюдений в i-й группе.

Выражение (14) можно записать в виде:

$$\overline{X_0} = \sum_i a_i \cdot \overline{X_i} \qquad (16)$$

где a_i – весовой коэффициент для среднего значения группы.

$$a_i = \frac{\alpha_i}{\sum_i \alpha_i} \qquad (17)$$

Дисперсия распределения средневзвешенного определяется по (18):

$$\sigma^2_{\overline{X_0}} = \frac{1}{\sum_i \alpha_i} \qquad (18)$$

Типовой пример.

Тремя группами исследователей с применением различных методов получены следующие значения ускорения свободного падения и СКО результата измерений: g_1=981,9190±0,0004; g_2=981,9215±0,0016; g_3=981,923±0,002 см*с-2. Найти средневзвешенное значение g и его СКО.

Решение. Примем за значения СКО $\sigma_{\overline{g_i}}$ трех групп измерений значения границ погрешности, т.е.

$\sigma_{\bar{g}_1} = 0{,}0004\,см \cdot c^{-2}$

$\sigma_{\bar{g}_2} = 0{,}0016\,см \cdot c^{-2}$

$\sigma_{\bar{g}_3} = 0{,}002\,см \cdot c^{-2}$

Рассчитаем веса средних для всех групп:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{g}_1}} = \frac{1}{0{,}0004^2} = 6250000\,(\frac{c^4}{см^2})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{g}_1}} = \frac{1}{0{,}0016^2} = 390625(\frac{c^4}{см^2})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{g}_1}} = \frac{1}{0{,}002^2} = 250000(\frac{c^4}{см^2})$$

С учетом полученных значений определим весовые коэффициенты a_i:

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\sum_i \alpha_i} = \frac{6250000}{6250000 + 390625 + 250000} = \frac{6250000}{6890625} = 0{,}91$$

$$a_2 = \frac{\alpha_1}{\sum_i \alpha_i} = \frac{390625}{6250000 + 390625 + 250000} = \frac{390625}{6890625} = 0{,}06$$

$$a_3 = \frac{\alpha_1}{\sum_i \alpha_i} = \frac{250000}{6250000 + 390625 + 250000} = \frac{250000}{6890625} = 0{,}03$$

Сумма всех коэффициентов $\sum_i a_i = 1$, расчет произведен верно. Далее определим средневзвешенное

$$\overline{g_0} = \sum_i a_i \cdot \overline{g_i} = 0{,}91 \cdot 981{,}9190 + 0{,}06 \cdot 981{,}9215 + 0{,}03 \cdot 981{,}923 = 981{,}9193(\text{см} \cdot \text{c}^{-2})$$

Рассчитаем оценку СКО средневзвешенного:

$$\sigma_{\overline{g_0}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \alpha_i}} = \sqrt{\frac{1}{6890625}} = \sqrt{14{,}5 \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^{-4}(\text{см} \cdot \text{c}^{-2})$$

Ответ: $\overline{g_0} = 981{,}9193\text{см} \cdot \text{c}^{-2}, \sigma_{\overline{g_0}} = 0{,}0004\text{см} \cdot \text{c}^{-2}$

Задача №9

Диаметр цилиндра измерен различным инструментом: штангенциркулем, микрометром, скобой-калибром и индикатором часового типа. Результаты измерений и характеристики точности приведены в табл 11. Найти средневзвешенное значение диаметра цилиндра, СКО измерений.

Таблица 11

СИ	Штангенциркуль	Микрометр	Скоба-калибр	Индикатор
$\overline{D}$, мм	9,95	10,015	10,000	10,01
Δ, ± мм	0,02	0,002	0,004	0,01
Число измерений	A	B	C	D

Решить по вариантам, определив значение A – D из соотношений:
A=D=10+N;
B=30-N;
C=15+N,
где N – номер варианта.

4. Грубые промахи

Грубая погрешность или промах – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от результатов этого ряда.

Источниками грубых погрешностей могут быть непредсказуемые значительные изменения условий измерений (изменения значений влияющих факторов), нарушение условий эксплуатации СИ (условия окружающей среды, параметры питания, условия согласования измерительной цепи, повреждения измерительной линии и отказы СИ), а также ошибки оператора (неправильный отсчет, неправильная запись).

Грубые погрешности возникают при однократных измерениях и обычно устраняются повторными измерениями.

При многократных измерениях ошибочные отсчеты исключают. Эта процедура называется цензурированием выборки. Для обнаружения и исключения промахов используют статистические критерии, зависящие от закона распределения результатов наблюдений. Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения x_i не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. При этом задаются значением вероятности (или уровнем значимости) того, что сомнительный результат принадлежит данной совокупности.

К основным критериям исключения грубых погрешностей относят:

- Критерий «трех сигм» (для результатов наблюдений, распределенных по нормальному закону);
- Критерий Романовского (при числе измерений n<20);
- Критерий Шарлье (при числе измерений n>20);
- Критерий Диксона (для вариационных рядов);
- Критерий Граббса (невысокая точность оценки).

Рассмотрим процедуру исключения грубых погрешностей по критерию Романовского.

1. Определяется сомнительный результат измерений X_j, который требуется проверить.

2. Рассчитывается среднее значение выборки $\overline{X}$ и оценка СКО единичного измерения σ_i по (6) и (7) без учета сомнительного результата (не включается в сумму i-х результатов при расчете среднего, число наблюдений уменьшается на единицу).

3. Определяется уровень значимости q из доверительной вероятности P:

$$q = 1 - P \tag{19}$$

4. По данным, представленным в табл. 12, определяется значение критерия Романовского t_β в зависимости от количества измерений n уровня значимости q.

Таблица 12

Значения критерия Романовского t_β

N	*q*=		*N*	*Q*=	
	0,05	0,01		0,05	0,01
2	15,56	77,96	12	2,29	3,23
3	4,97	11,46	13	2,26	3,17
4	3,56	6,53	14	2,24	3,12
5	3,04	5,04	15	2,22	3,08
6	2,78	4,36	16	2,20	3,04
7	2,62	3,96	17	2,18	3,01
8	2,51	3,71	18	2,17	3,00
9	2,43	3,54	19	2,16	2,95
10	2,37	3,41	20	2,145	2,93
11	2,33	3,31	∞	1,96	2,58

5. Для значения выборки X_j проверяется неравенство:

$$\frac{\left|X_j - \overline{X}\right|}{\sigma} = \beta_{\text{н}} < t_\beta \tag{20}$$

В случае $\beta_н \geq t_\beta$ значение X_j считают грубым промахом.

Типовой пример

Произведено 10 измерений силы тока, результаты которых приведены в табл. 13. Расположение значений тока по возрастанию позволило исследователю усомниться в правильности последнего результата. Требуется проверить принадлежность 10-го результата к однородной выборке, используя критерий Романовского при доверительной вероятности Р = 0,99.

Таблица 13

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

I_i, А	10,07	10,08	10,10	10,12	10,13	10,14	10,16	10,17	10,20	10,40

Решение. Рассчитаем среднее значение и оценку СКО без последнего результата (I_{10}=10,40 А):

$$\bar{I} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} I_i}{n-1} = \frac{10{,}07+10{,}08+10{,}10+10{,}12+10{,}13+10{,}14+10{,}16+10{,}17+10{,}20}{9} = \frac{91{,}17}{9} = 10{,}13(A)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(I_i-\bar{I})^2}{((n-1)-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}0146}{8}} = \sqrt{0{,}0018} \approx 0{,}04(A)$$

Определяем из таблицы 11 для q=0,01 и n=9 значение $t_\beta = 3{,}54$. Рассчитываем значение $\beta_н$ и сравниваем с критериальным:

$$\beta_н = \frac{|I_{10}-\bar{I}|}{\sigma} = \frac{10{,}40-10{,}13}{0{,}04} = 6{,}75 > t_\beta$$

Значение I_{10}=10,40 А является грубым промахом.

Ответ: I_{10} не принадлежит однородной выборке и является грубым промахом.

Задача №10

При пятикратном измерении постоянной температуры получены результаты, приведенные в таблице 14. Требуется выявить и исключить грубый промах по критерию Романовского при доверительной вероятности Р = 0,95.

Решить по вариантам, приведенным в таблице.

Таблица 14

№ вар.	t_i, °С				
	1	2	3	4	5
1	12,45	12,25	12,3	12,35	12,85
2	14,5	14,3	14,35	14,4	14,9
3	16,55	16,35	16,4	16,45	16,95
4	18,6	18,4	18,45	18,5	19
5	20,65	20,45	20,5	20,55	21,05
6	22,7	22,5	22,55	22,6	23,1
7	24,75	24,55	24,6	24,65	25,15
8	26,8	26,6	26,65	26,7	27,2
9	28,85	28,65	28,7	28,75	29,25
10	30,9	30,7	30,75	30,8	31,3
11	32,95	32,75	32,8	32,85	33,35
12	35	34,8	34,85	34,9	35,4
13	37,05	36,85	36,9	36,95	37,45
14	39,1	38,9	38,95	39	39,5
15	41,15	40,95	41	41,05	41,55

16	43,2	43	43,05	43,1	43,6
17	45,25	45,05	45,1	45,15	45,65
18	47,3	47,1	47,15	47,2	47,7
19	49,35	49,15	49,2	49,25	49,75
20	51,4	51,2	51,25	51,3	51,8
21	53,45	53,25	53,3	53,35	53,85
22	55,5	55,3	55,35	55,4	55,9
23	57,55	57,35	57,4	57,45	57,95
24	59,6	59,4	59,45	59,5	60
25	61,65	61,45	61,5	61,55	62,05