1. ЗАКОНЫ КИРХГОФА ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Цель работы: приобретение навыков записи комплексной амплитуды по заданной функции времени, оценка влияния угла сдвига фаз на результат сложения гармонических колебаний, иллюстрация законов Кирхгоффа с помощью векторных и временных диаграмм.

1.1. Основные положения символического метода

В цепях переменного тока с синусоидальными источниками, установившиеся реакции изменяются по гармоническому закону, например:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \qquad (1.1)$$

Круговая частота реакции $\omega, рад/c$ совпадает с частотой генерируемых колебаний:

$$\omega = 2\pi f\ , \quad f = 1/T \qquad (1.2)$$

Здесь T, c - период колебаний, $f, Гц$ – частота, измеряемая в герцах.

Расчет цепей переменного тока сводится к нахождению двух параметров искомых величин – амплитуды U_m и начальной фазы ψ_u.

Для упрощения расчета вводят понятие вспомогательной величины - комплексной амплитуды, которая содержит информацию как об амплитуде , так и начальной фазе . Это понятие вытекает из представления гармонических колебаний с помощью комплексных чисел

Комплексное число изображается точкой на плоскости x, y (рис. 1.1а). Число z можно представить с помощью радиус вектора, орты которого совпадают с осями $x = \mathrm{Re}(z)$ и $y = \mathrm{Im}(z)$. Примеры изображения комплексных чисел приведены на рис.1.1а. Число $z_1 = 6 - j9$ находится в 4-ом квадранте, число $z_2 = 2 + j5$ – в 1-ом квадранте, число $z_3 = -4 - j5$ – в 3-ем квадранте.

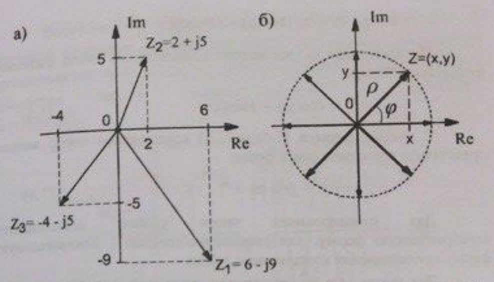

Рис.1.1. Изображение комплексных чисел в декартовой системе координат – а) геометрическое место комплексных чисел с одинаковым значением модуля – б)

В полярной системе координат (рис.1б) положение точки z задается ее расстоянием $\rho = |z|$ до начала координат и углом φ между осью x и лучом, проходящим через рассматриваемую точку z. Положительные значения угла отсчитываются по направлению «против часовой стрелки». Величина $|z|$ называется модулем, угол φ – аргументом числа.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \ \varphi = \arg(z) \qquad (1.3)$$

Комплексные числа с одинаковым модулем и разными значениями аргумента лежат на окружности с радиусом, равным модулю комплексного числа (рис.1б).

Тригонометрическая форма комплексного числа определяется формулами перехода от полярной системы к декартовой системе координат:

$$x = |z|\cos\varphi\ ; \ y = |z|\sin\varphi\ ; \qquad (1.4)$$

$$z = x + jy = |z| \cdot [\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)]$$

Показательная форма записи комплексного числа вытекает из формулы Эйлера

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) \qquad (1.5)$$

С учетом формул (1.4) и (1.5) комплексное число можно представить в показательной форме

$$z = x + jy = |z| \cdot e^{j\varphi} \qquad (1.6)$$

Для суммирования чисел удобно использовать алгебраическую форму, для умножения/деления – показательную форму представления комплексных чисел.

Два числа z и z^* называются комплексно сопряженными, если они отличаются только знаком мнимой части:

$$z = x + jy = |z| \cdot e^{j\varphi}\ ; \ z^* = x - jy = |z| \cdot e^{-j\varphi} \qquad (1.7)$$

Модули сопряженных чисел совпадают, а аргументы отличаются знаком. На комплексной плоскости сопряженные числа расположены симметрично относительно оси вещественных чисел.

Рассмотрим комплексную величину $\bar{u} = U_m \cdot \exp(j\theta)$, аргумент которой является функцией времени:

$$\theta(t) = \omega t + \psi \qquad (1.8)$$

Здесь U_m – модуль комплексной величины, ψ – начальная фаза или начальное значение аргумента, $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота, T – период.

Запишем вектор $\vec{u}$ в ином виде, выделив множитель вращения $\exp(j\omega t)$ и коэффициент $\dot{U}_m$, не зависящий от времени:

$$\vec{u} = (U_m \cdot e^{j\psi}) \cdot e^{j\omega t} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t},\ \dot{U}_m = U_m e^{j\psi} \qquad (1.9)$$

Величина $\dot{U}_m$ носит название комплексной амплитуды. Эта величина содержит информацию, как о модуле, так и аргументе вращающегося вектора $\bar{u}(t)$ в момент времени $t = 0$. Вектор $\vec{u}$ вращается против часовой стрелки со скоростью $\omega = d\theta(t)/dt$.

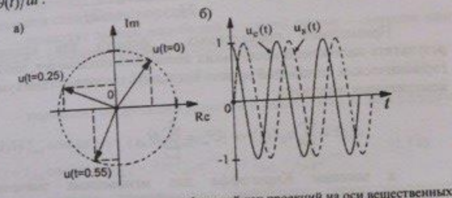

Рис.1.2. Представление гармонических функций как проекций на оси вещественных и мнимых чисел – а) и зависимость проекций вращающегося вектора от времени

На рисунке 1.2-а показано положение вращающегося вектора $\vec{u} = \dot{U}_m e^{j\psi_u} = (e^{j\pi/6}) \cdot e^{j2\pi t}$ в различные моменты времени: $t_1 = 0, t_2 = 0.25, t_3 = 0.55c$. Из рисунка 1.2-б видно, что проекции вращающегося вектора на оси декартовой системы координат изменяются во времени по гармоническому закону:

$$u_x(t) = \mathrm{Re}(\dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}) = U_m \cos(\omega t + \pi/6)\ ;$$
$$u_y(t) = \mathrm{Im}(\dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}) = U_m \sin(\omega t + \pi/6) \qquad (1.3)$$

В начальный момент времени положение вектора определяется начальной фазой колебаний.

Из формул Эйлера для комплексно сопряженных чисел вытекает другая форма записи гармонических колебаний:

$$v_c(t) = u_x(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = \frac{\dot{U}_m e^{j\omega t} + \dot{U}_m^* e^{-j\omega t}}{2} = \frac{\vec{u} + \vec{u}^*}{2} \qquad (1.4)$$

Из этой формулы видно, что косинус можно получить суммированием комплексно сопряженных векторов, вращающихся в противоположные стороны.

Синус получается вычитанием этих векторов

$$v_s(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) = \frac{\dot{U}_m e^{j\omega t} - \dot{U}_m^* e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{\vec{u} - \vec{u}^*}{2j} \qquad (1.5)$$

Применение приведенных формул для нахождения результата наложений нескольких колебаний показывает, что сумме гармонических колебаний можно поставить в соответствие сумму их комплексных амплитуд

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \;\rightarrow\; \dot{U}_m = \sum_{k=1}^{n} \dot{U}_{mk}, \qquad (1.13)$$

а законам Кирхгоффа для мгновенных значений – соответствующие законы для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \pm u_k(t) = 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \pm \dot{U}_{mk} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} \pm i_k(t) = 0 \quad &\rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \pm \dot{I}_{mk} = 0 \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Комплексная амплитуда находится по правилу сложения векторов, результирующее колебание - по формуле (1.11) или, что проще, по формуле (1.15)

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = \mathrm{Re}(\dot{U}_m e^{j\omega t}) \qquad (1.15)$$

При сложении гармонических колебаний следует иметь в виду, что амплитуда результирующего колебания в силу разности фаз не равна сумме амплитуд отдельных колебаний. Поэтому законы Кирхгоффа для показаний приборов в общем случае не выполняются:

$$U_v \neq U_{v1} + U_{v2} \qquad (1.16)$$

Исключение составляет сложение синфазных колебаний, для которых угол сдвига фаз между колебаниями отсутствует $\psi_{1,2} = \psi_1 - \psi_2 = 0$.

Сложение колебаний методом комплексных амплитуд производят в следующем порядке:

– приводят запись колебаний к одной форме - синусов или косинусов – с использованием соотношений

$$\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)\ ,\ \cos\beta = \sin(\beta + \pi/2) \qquad (1.17)$$

– переходят от функций времени к комплексным амплитудам

$$\begin{aligned} i_1(t) = I_{m1}\cos(\omega t + \psi_{i1}) = \mathrm{Re}(\dot{I}_{m1} e^{j\omega t}) \rightarrow \dot{I}_{m1} = I_{m1} e^{j\psi_{i1}} \\ i_2(t) = I_{m2}\cos(\omega t + \psi_{i2}) = \mathrm{Re}(\dot{I}_{m2} e^{j\omega t}) \rightarrow \dot{I}_{m2} = I_{m2} e^{j\psi_{i1}} \end{aligned} \qquad (1.18)$$

– находят комплексную амплитуду результирующего колебания по правилу сложения векторов

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = I_m e^{j\psi} \qquad (1.19)$$

– переходят от комплексной амплитуды к функции времени

$$\dot{I}_m \rightarrow i(t),\quad i(t) = \mathrm{Re}(\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) \qquad (1.20)$$

Отметим, что длина вектора или модуль комплексной амплитуды соответствует показаниям приборов. Амплитуда колебаний измеряется с помощью осциллографа. Шкала амперметров/вольтметров чаще всего градуируется в действующих значениях. Действующее (ДЗ) или среднеквадратичное значение (СКЗ) I вычисляется в соответствии с выражением

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{T} i^2(t)dt} \qquad (1.21)$$

В практике расчетов вместо комплексной амплитуды $\dot{I}_m$ часто используют комплекс действующего значения

$$\dot{I} = \dot{I}_m / \sqrt{2} \qquad (1.22)$$

1.2. Эквивалентное преобразование синусоидальных источников. Исходные данные для расчета

В работе рассматривается эквивалентное преобразование источников напряжения (ИН) (рисунок.1.3а) и источников тока (ИТ) (рис.1.3б). Естественным режимом ИН является режим ХХ, естественным режимом ИТ – режим КЗ.

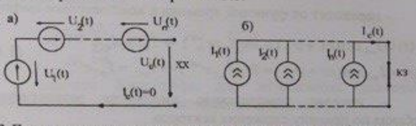

Рис.1.3. Последовательное соединение источников напряжения – а) и параллельное соединение источников тока – б)

Задачей работы является:

– определение тока КЗ источника, эквивалентного двум параллельным источникам тока, или напряжения ХХ источника напряжения, эквивалентного двум последовательным источникам напряжения, параметры которых приведены в таблице 1.1

– представление каждой из величин с помощью комплексной амплитуды, комплекса действующего значения в алгебраической и показательной форме и в виде зависимости напряжения/тока от времени

– определение периода колебаний и угла сдвига фаз между токами/напряжениями $\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2$ с указанием опережающего тока/напряжения

– определение показаний приборов действующего значения, построение графиков функций и векторных диаграмм токов/напряжений.

Таблица 1.1.

№	Параметры источников				
1	$i_1(t) = 4\cos(100\pi t + 60°)$	$\dot{I}_2 = \sqrt{2}e^{-j30°}$	14	$i_1(t) = 3\sin(200\pi t + 45°)$	$\dot{I}_2 = 2\sqrt{2}e^{-j45°}$
2	$i_1(t) = 5\sin(50\pi t - 135°)$	$\dot{I}_2 = 3\sqrt{2}e^{-j15}$	15	$i_1(t) = 4\cos(100\pi t + 60°)$	$\dot{I}_2 = 2\sqrt{2}e^{-j60°}$
3	$i_1(t) = 2\sin(200\pi t + 135°)$	$\dot{I}_2 = \sqrt{2}e^{-j15°}$	16	$i_1(t) = 2\sin(200\pi t + 135°)$	$\dot{I}_2 = 2\sqrt{2}e^{-j45°}$
4	$i_1(t) = \cos(100\pi t + 225°)$	$\dot{I}_2 = \sqrt{2}$	17	$i_1(t) = 4\cos(50\pi t + 210°)$	$\dot{I}_2 = 3\sqrt{2}e^{-j60°}$
5	$i_1(t) = 3\sin(50\pi t + 150°)$	$\dot{I}_{m2} = \sqrt{3} + j$	18	$i_1(t) = 2\sin(200\pi t + 30°)$	$\dot{I}_2 = -j2\sqrt{2}$
6	$u_1(t) = 100\cos(100\pi t + 30°)$	$\dot{U}_2 = -j50\sqrt{2}$	19	$u_1(t) = 30\cos(100\pi t + 120°)$	$\dot{U}_2 = 20\sqrt{2}e^{j30}$
7	$u_1(t) = 50\cos(50\pi t + 120°)$	$\dot{U}_2 = 50\sqrt{2}e^{-j30°}$	20	$u_1(t) = 60\cos(50\pi t - 30°)$	$\dot{U}_2 = 40\sqrt{2}e^{j60}$
8	$u_1(t) = 100\sin(100\pi t + 120°)$	$\dot{U}_2 = 100\sqrt{2}e^{j30°}$	23	$u_1(t) = 50\sin(100\pi t - 120°)$	$\dot{U}_2 = 50\sqrt{2}e^{j30}$
9	$u_1(t) = 30\cos(50\pi t + 30°)$	$\dot{U}_2 = 20\sqrt{2}e^{j120°}$	24	$u_1(t) = 100\sin(50\pi t + 150°)$	$\dot{U}_2 = 50\sqrt{2}e^{j30}$
10	$u_1(t) = 80\sqrt{2}\sin(100\pi t - 150°)$	$\dot{U}_2 = j80$	25	$u_1(t) = 30\cos(50\pi t + 30°)$	$\dot{U}_2 = 20\sqrt{2}e^{-j60}$
11	$u_1(t) = 100\cos(50\pi t + 120°)$	$\dot{U}_2 = 100\sqrt{2}e^{-j30}$	26	$i_1(t) = 4\sqrt{2}\sin(200\pi t + 45°)$	$\dot{I}_2 = 2e^{-j75°}$
12	$i_1(t) = 4\sqrt{2}\sin(200\pi t + 45°)$	$\dot{I}_2 = (3 - j3)/\sqrt{2}$	27	$i_1(t) = \cos(100\pi t - 150°)$	$\dot{I}_2 = \sqrt{2}e^{-j30°}$
13	$i_1(t) = 2\cos(100\pi t + 60°)$	$\dot{I}_2 = -j2\sqrt{2}$	28	$u_1(t) = 80\cos(100\pi t + 30°)$	$\dot{U}_2 = 30\sqrt{2}e^{-j60°}$

1.3. Пример выполнения работы

Рассмотрим случай параллельно включенных источников тока ИТ-1 и ИТ-2. Токи источников заданы в различной форме – в виде функции времени и в виде комплекса действующего значения (КДЗ):

$$i_1(t) = 2 \cdot \sin(50\pi t - 150^\circ) \text{ и } \dot{I}_2 = 2 \cdot \sqrt{2} e^{-j30^\circ}$$

Перейдем к комплексной амплитуде $\dot{I}_{m1}$ и комплексу действующего значения $\dot{I}_1$ тока $ИТ1$:

$$i_1(t) = \mathrm{Im}(2 \cdot e^{-j150^\circ} \cdot e^{j\omega t}) \rightarrow \dot{I}_{m1} = 2e^{-j150} = (-\sqrt{3} - j)$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{m1}/\sqrt{2} = \sqrt{2} e^{-j150}$$

По заданному значению КДЗ $\dot{I}_2$ находим комплексную амплитуду $\dot{I}_{m2}$, и затем зависимость тока $i_2(t)$ от времени

$$\dot{I}_{m2} = \dot{I}_2 \cdot \sqrt{2} = 4e^{-j30^\circ} = 2\sqrt{3} - j2$$

Временная зависимость тока $i_2(t)$

$$i_2(t) = \mathrm{Im}[\dot{I}_{m2} \exp(j\omega t)] = 4\sin(50\pi t - 30^\circ)$$

Угол сдвига фаз между колебаниями $i_1(t), i_2(t)$

$$\psi_{2,1} = \psi_2 - \psi_1 = -30^\circ - (-150^\circ) = 120^\circ$$

Ток $i_2(t)$ опережает ток $i_1(t)$ на угол 120°. Частота и период колебаний тока

$$f = \omega/2\pi = 25, \quad T = f^{-1} = 0.04 = 40\ мс$$

Комплексную амплитуду эквивалентного источника находим по ЗКТ

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = (-\sqrt{3} - j) + (2\sqrt{3} - j2) =$$

$$= \sqrt{3} - j3 = 2\sqrt{3} e^{-j60^\circ} = 3.46 e^{-j60}$$

КДЗ результирующего тока

$$\dot{I} = \dot{I}_m/\sqrt{2} = \sqrt{6} e^{-j60^\circ} = 2.25 e^{-j60^\circ}$$

Переходим к мгновенному току $i(t)$

$$i(t) = \mathrm{Im}[\dot{I}_m \exp(j\omega t)] = 2\sqrt{3}\sin(\omega t - 60^\circ)$$

Показания амперметров определяются по модулю КДЗ токов

$$I_{A1} = |\dot{I}_1| = 1.41; \quad I_{A2} = |\dot{I}_2| = 2.82; \quad I_A = |\dot{I}| = 2.45$$

Векторная диаграмма токов и осциллограммы токов казаны на рисунке 1.4. Из-за фазового сдвига между токами $\psi_{2,1} = 120^\circ$ закон Кирхгофа для показаний приборов не выполняется:

$$I_{m3} \neq I_{m1} + I_{m2}, \quad I_{A3} \neq I_{A1} + I_{A2}$$

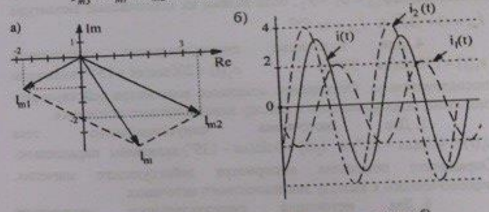

Рис.1.4. Векторная диаграмма – а) и осциллограммы токов – б)

Результаты расчета сведены в таблицу 1.2, в которой I_A – показание амперметра действующего значения.

Таблица 1.2

Хар-ки токов	Источник тока 1	Источник тока 2	Эквивалентный источник тока
$i(t)$	$i_1(t) = 2 \cdot \sin(50\pi t - 150^\circ)$	$i_2(t) = 4\sin(50\pi t - 30^\circ)$	$i(t) = 2\sqrt{3}\sin(\omega t - 60^\circ)$
$\dot{I}_m$	$\dot{I}_{m1} = 2e^{-j150} = -\sqrt{3} - j$	$\dot{I}_{m2} = 4e^{-j30^\circ} = 2\sqrt{3} - j2$	$\dot{I}_m = 2\sqrt{3}\exp(-j60^\circ)$
$\dot{I}$	$\dot{I}_1 = \sqrt{2} e^{-j150}$	$\dot{I}_2 = 2 \cdot \sqrt{2} e^{-j30^\circ}$	$\dot{I} = \sqrt{6} e^{-j60^\circ}$
I_A	$I_{A1} = 1.41$	$I_{A2} = 2.82$	$I_A = 2.45$

1.4. Контрольные вопросы

1. Запишите комплексную амплитуду колебания $i(t) = 3\sin(\omega t + 5\pi/6)$

2. Используя косинусное представление колебаний $e_1(t) = 20\sin(\omega t - \pi/6)$, $e_2(t) = 50\cos(\omega t - \pi/3)$, найти их комплексные амплитуды.

3. Определите угол сдвига фаз между колебаниями $\psi_{1,2} = \psi_1 - \psi_2$, если заданы их комплексные амплитуды $\dot{I}_{m1} = -3 + j3\sqrt{3}$ и $\dot{I}_{m2} = 4e^{-j2\pi/3}$

4. Два источника синусоидального напряжения $e_1(t) = 150\sin(\omega t - 30^\circ)$ и $e_2(t) = 200\sin(\omega t + 150^\circ)$ включены последовательно. Определите показание вольтметра действующего значения, подключенного к выходу эквивалентного источника.

5. Два источника синусоидального тока $i_1(t) = 4\sin(\omega t - 45^\circ)$ и $i_2(t) = 3\sin(\omega t - 135^\circ)$ включены параллельно. Определите показания амперметра действующего значения, подключенного к выходу эквивалентного источника

6. Два источника синусоидального напряжения $e_1(t) = 50\sin(\omega t + 30^\circ)$ и $e_2(t) = 50\sin(\omega t + \psi)$ включены последовательно. Определите показания вольтметра действующего значения, подключенного к выходу эквивалентного источника, если начальная фаза второго источника принимает значения: а) $\psi = 30^\circ$; б) $\psi = -150^\circ$; в) $\psi = 120^\circ$

7. Ток источника изменяется по закону $i(t) = 2\sqrt{2}\sin(50\pi t - 3\pi/4)$. Чему равны параметры колебания: а) – амплитуда; б) – действующее значение; в) – круговая частота; г) – период колебаний; д) – частота, Гц; е) – начальная фаза, выраженная в радианах и градусах.

8. По комплексному напряжению $\dot{U} = 90e^{j60^\circ}$ запишите мгновенное значение $u(t)$ при частоте колебаний $f = 25$.

9. Запишите КДЗ тока $\dot{I} = -30 - j40$ в показательной форме.

10. Найдите параметры результирующего колебания $U_m \sin(50\pi t + \psi_u) = 50\sin(50\pi t + 2\pi/3) + 50\sin(50\pi t - 2\pi/3)$

11. Найти действующее значение напряжения

$$u(t) = 100\sin(50\pi t + 2\pi/3) - 100\sin(50\pi t - 2\pi/3)$$