

### 3. Метод законов Кирхгофа.

#### 3.1. Общие сведения.

Для составления уравнений относительно неизвестных токов ветвей используются законы Кирхгофа. Законы Кирхгофа отражают свойства, связанные с геометрической конфигурацией или топологией цепи. Топологические свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоят ветви цепи. Поэтому для составления уравнений по законам Кирхгофа используют представление цепи в виде ориентированного графа, в котором каждая ветвь цепи изображается отрезком линии без указания элементов, из которых состоит ветвь. Следует иметь в виду, что ветви цепи могут состоять из различных элементов, соединенных различным образом. Граф является упрощенной моделью цепи. Пример графа цепи (рис 3.1а) показан на рисунке 3.1б.

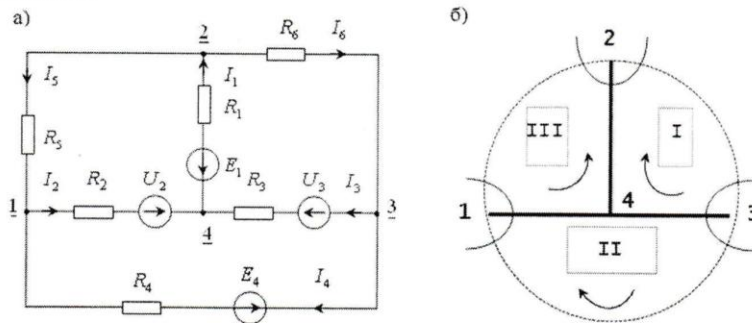


Рис.3.1. Схема цепи – а) и ее ориентированный граф – б)

Цепь содержит шесть ветвей с неизвестными токами  $n_b = 6$  и четыре узла  $n_n = 4$ . Под узлом понимается точка соединения нескольких ветвей. В случае соединения двух ветвей узел является устранимым. Сплошными линиями обозначены ветви дерева графа. Под деревом графа понимается совокупность ветвей, которые соединяют все узлы, но не образуют при этом замкнутых путей. Пунктирными линиями обозначены ветви связи, которые также называются хордами.

Контуром называется совокупность ветвей, образующих замкнутый путь графа, т.е. путь, для которого начальный и конечный узлы совпадают. Главный контур включает только одну ветвь связи. Направление обхода главного контура, как показано на рис. 3.1б, задается направлением ветви связи.

Сечение графа представляет собой совокупность ветвей, через которые проходит след пересечения замкнутой поверхности с плоскостью графа. В главное сечение входит только одна ветвь графа. Следы пересечения замкнутой поверхности с плоскостью графа в окрестностях узлов 1, 2 и 3 показаны на рисунке 3.1б.

Число ветвей дерева  $n_{tb}$  и число хорд/ветвей связи  $n_{tc}$  определяется формулами

$$n_{tb} = n_n - 1 \quad n_{tc} = n_b - n_n + 1$$

Закон Кирхгофа для токов (ЗКТ) или первый закон Кирхгофа отражает условие равновесия токов в узлах, в соответствии с которым сумма втекающих в узел токов должна равняться сумме вытекающих токов или алгебраическая сумма токов в узле должна равняться нулю

$$\sum_{j=1}^l \pm I_j = 0$$

Здесь  $l$  - число ветвей в узле. Знак «+» выбирается для вытекающих токов, знак «-» для втекающих токов. Число уравнений, составляемых по ЗКТ, равно числу ветвей дерева графа и на единицу меньше числа узлов

$$N_l = n_{tb} = n_n - 1$$

Для рассматриваемого графа (рис. 1б) число уравнений по 1-ому закону Кирхгофа равно  $N_l = 4 - 1 = 3$ . для узлов графа 1, 2 и 3 получим

$$I_2 - I_5 - I_4 = 0, \quad I_6 + I_5 - I_1 = 0 \quad I_3 + I_4 - I_6 = 0$$

Второй закон Кирхгофа или закон Кирхгофа для напряжений (ЗКН) отражает условие равновесия напряжений в замкнутом контуре, в соответствии с которым алгебраическая сумма напряжений ветвей контура равна нулю.

$$\sum_{k=1}^p \pm U_k = 0$$

Если напряжение ветви совпадает с направлением обхода контура, то при записи ЗКН напряжение записывается со знаком «+». Направление обхода задается направлением тока ветви связи. Число уравнений, составленных по ЗКН, равно числу независимых контуров, которое в свою очередь равно числу ветвей связи

$$N_{II} = n_{ic} = n_b - n_{ib} = n_b - (n_n - 1).$$

Для рассматриваемого графа  $N_{II} = 6 - 3 = 3$ .

Составим уравнения для независимого контура, состоящего из 2-ой, 3-ей и 4-ой ветвей. Обход контура производится по часовой стрелке в соответствии направлением тока в ветви связи

$$U_4 + U_2 - U_3 = 0$$

Связь напряжения и тока ветви задается законом Ома для участка цепи с источником ЭДС. Для ветвей 2-ого контура получим

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 - E_2 \quad U_3 = I_3 \cdot R_3 - E_3 \quad U_4 = I_4 \cdot R_4 + E_4$$

Объединение приведенных выше выражений дает

$$U_4 + U_2 - U_3 = I_4 \cdot R_4 + E_4 + I_2 \cdot R_2 - E_2 - I_3 \cdot R_3 + E_3 = 0$$

После переноса напряжений независимых источников в правую часть, получим другую запись 2-ого закона Кирхгофа. Алгебраическая сумма падений напряжений на сопротивлениях ветвей замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников.

$$I_4 \cdot R_4 + I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = E_2 - E_3 - E_4$$

Запишем систему независимых уравнений по 1-ому и 2-ому законам Кирхгофа в матричном виде

$$Z \cdot I = E$$

Здесь  $I$  - вектор-столбец токов ветвей

$$I = [I_1 \quad I_2 \quad I_3 \quad I_4 \quad I_5 \quad I_6]^T$$

$Z$  - квадратная матрица коэффициентов уравнений

$$Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix}$$

$E$  - вектор столбец напряжений источников

$$E = [0 \quad 0 \quad 0 \quad (E_2 + E_2) \quad (E_2 - E_3 - E_4) \quad (E_3 + E_1)]^T$$

Решение уравнения

$$I = Z^{-1} \cdot E$$

Запишем решение для следующих значений параметров элементов

$$R_1 = R_2 = \dots = R_6 = 5 \quad E_1 = 10 \quad E_2 = 25 \quad E_3 = 15 \quad E_4 = 10.$$

Используя вычислительную среду *Mathcad*, получим

$$I = [3 \quad 1.75 \quad 1.25 \quad -0.5 \quad 2.25 \quad 0.75]^T$$

Знак «-» означает, что реальный ток  $I_4$  имеет направление, противоположное направлению, указанному на схеме, представленной на рис 1а.

### 3.2. Задание.

- Используя законы Кирхгофа, определить токи сопротивлений и источников напряжения, вычислить напряжения источников тока.
- Составить баланс мощностей.

### 3.3. Пример решения задачи

Структура цепи и параметры элементов заданы таблицей 3.1. Схема и граф цепи показаны на рис. 3.2. Жирной линией выделены ветви дерева, тонкой линией – ветвь связи, пунктирной линией – ветви с идеальными источниками тока  $J_2, J_5$ .

Таблица 3.1.

Структура и параметры элементов.

Тип и номер элемента	$E_1, В$	$J_2, А$	$R_3, Ом$	$R_4, Ом$	$J_5, А$
Номера узлов	1-3	3-1	1-2	2-3	2-3
Значение параметра	6	1	2	2	1

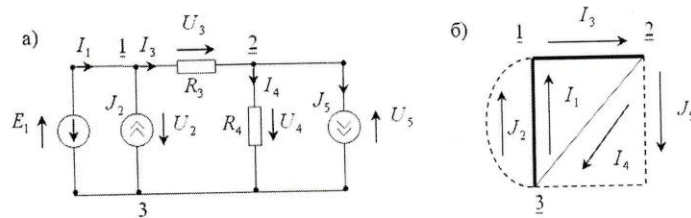


Рис.3.2. Схема цепи –а) и ее граф –б).

Цепь содержит три ветви с неизвестными токами  $n_b = 3$  и три узла  $n_n = 3$ . Для составления уравнений необходимо выбрать положительные направления токов ветвей, как показано на рис.3.2. Уравнения составляются для узлов 2, 3 и контура, состоящего из ветвей с элементами  $E_1, R_3, R_4$ .

$$I_3 - I_4 = J_5 \quad I_3 - I_1 = J_2 \quad I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = E_1$$

После подстановки значений параметров получим

$$I_3 - I_4 = 1 \quad I_3 - I_1 = 1 \quad I_3 \cdot 2 + I_4 \cdot 2 = 6$$

Можно записать систему уравнений в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Решение системы:  $I_1 = I_4 = 1, I_3 = 2$ .

Составим баланс мощностей. Мощность пассивных  $R$ -элементов

$$P_3 = R_3 \cdot I_3^2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \quad P_4 = R_4 \cdot I_4^2 = 2 \cdot 1^2 = 2$$

Определим режим работы активных элементов  $E_1, J_2, J_5$ .

На источнике напряжения  $E_1$  направление тока и направление напряжения не согласованы, мощность отрицательна, активный элемент работает в режиме генератора

$$P_1 = -U_1 \cdot I_1 = -6 \cdot 1 = -6$$

Режим источников тока определяется согласованностью или несогласованностью напряжения на их зажимах с направлением тока. Источник тока  $J_2$  включен параллельно с источником напряжения  $E_1$ . Поэтому напряжение источника  $U_2 = E_1$  с направлением тока не согласовано, источник  $J_2$  работает в режиме генератора электрической энергии

$$P_2 = -J_2 \cdot U_1 = -6$$

Напряжение  $U_5 = U_{2-3} = I_4 \cdot R_4 = 2$  на зажимах источника тока  $J_5$  согласовано с направлением тока, мощность положительна, активный элемент работает в режиме потребителя энергии

$$P_5 = U_5 \cdot J_5 = 2$$

Баланс мощностей выполняется

$$\sum_{k=1}^5 P_k = (-6 - 6 + 2) + 8 + 2 = 0.$$

Как следует из рисунка 3.3, результаты расчета совпадают с результатами измерений.

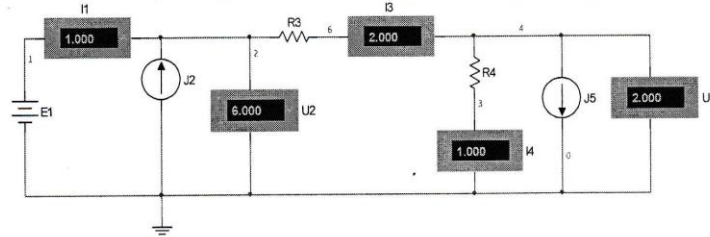


Рис. 3.3. Электрическая цепь на рабочем столе Electronics Workbench.

Рис. 3.3. Электрическая цепь на рабочем столе Electronics Workbench.

### 3.4. Таблица вариантов заданий к задаче 3.

Таблица 3.2

#### Варианты заданий

№ варианта	Значение параметра и номера узлов элемента				
	1	2	3	4	5
1	$J_1 = 5A,$ 3-1	$R_2 = 10\text{Om},$ 1-3	$E_3 = 50B,$ 2-1	$R_4 = 15\text{Om},$ 2-3	$J_5 = 5A,$ 2-3
2	$E_1 = 20B,$ 1-4	$R_2 = 10\text{Om},$ 1-3	$J_3 = 3A,$ 1-2	$R_4 = 10\text{Om},$ 2-3	$E_5 = 10B,$ 3-4
3	$E_1 = 10B,$ 1-3	$J_2 = 3A,$ 3-1	$R_3 = 5\text{Om},$ 1-2	$R_4 = 5\text{Om},$ 2-3	$J_5 = 4A,$ 3-2
4	$E_1 = 20B,$ 3-1	$R_2 = 4\text{Om},$ 1-2	$R_3 = 4\text{Om},$ 2-3	$J_4 = 2A,$ 3-2	$R_5 = 4\text{Om},$ 2-3
5	$E_1 = 10B,$ 1-4	$J_2 = 4A,$ 1-2	$R_3 = 5\text{Om},$ 2-4	$R_4 = 5\text{Om},$ 2-3	$E_5 = 10B,$ 4-3
6	$R_1 = 3\text{Om},$ 1-3	$J_2 = 5A,$ 3-1	$E_3 = 15B,$ 1-2	$J_4 = 5A,$ 2-3	$R_5 = 12\text{Om},$ 2-3
7	$R_1 = 10\text{Om},$ 1-4	$E_2 = 20B,$ 2-1	$J_3 = 2A,$ 2-4	$R_4 = 10\text{Om},$ 2-3	$E_5 = 20B,$ 4-3
8	$J_1 = 2A,$ 1-3	$E_2 = 20B,$ 1-3	$R_3 = 10\text{Om},$ 1-2	$R_4 = 10\text{Om},$ 2-3	$J_5 = 3A,$ 3-2
9	$E_1 = 24B,$ 1-4	$R_2 = 12\text{Om},$ 1-2	$R_3 = 4\text{Om},$ 2-3	$J_4 = 2A,$ 4-3	$R_5 = 4\text{Om},$ 2-4

10	$R_1 = 10\Omega,$ 1-4	$E_2 = 40\text{B},$ 2-1	$R_3 = 5\Omega,$ 2-4	$J_4 = 1\text{A},$ 2-3	$E_5 = 10\text{B},$ 3-4
11	$J_1 = 1\text{A},$ 1-3	$R_2 = 10\Omega,$ 1-3	$E_3 = 10\text{B},$ 2-1	$J_4 = 5\text{A},$ 2-3	$R_5 = 10\Omega,$ 2-3
12	$E_1 = 20\text{B},$ 4-1	$R_2 = 10\Omega,$ 1-2	$J_3 = 5\text{A},$ 4-2	$E_1 = 20\text{B},$ 4-1	$R_5 = 10\Omega,$ 3-4
13	$E_1 = 15\text{B},$ 3-1	$J_2 = 1\text{A},$ 3-1	$R_3 = 5\Omega,$ 1-2	$J_4 = 1\text{A},$ 2-3	$R_5 = 5\Omega,$ 2-3
14	$J_1 = 2\text{A},$ 3-1	$R_2 = 6\Omega,$ 1-3	$R_3 = 3\Omega,$ 1-3	$E_4 = 12\text{B},$ 1-2	$R_5 = 6\Omega,$ 2-3
15	$E_1 = 10\text{B},$ 4-1	$R_2 = 10\Omega,$ 1-2	$E_3 = 40\text{B},$ 3-2	$J_4 = 4\text{A},$ 4-3	$R_5 = 20\Omega,$ 2-4
16	$R_1 = 8\Omega,$ 1-3	$J_2 = 1\text{A},$ 1-3	$E_3 = 10\text{B},$ 1-2	$J_4 = 1\text{A},$ 3-2	$R_5 = 2\Omega,$ 2-3
17	$R_1 = 12\Omega,$ 1-4	$E_2 = 12\text{B},$ 1-2	$J_3 = 1\text{A},$ 2-4	$E_4 = 48\text{B},$ 2-3	$R_5 = 12\Omega,$ 3-4
18	$J_1 = 4\text{A},$ 1-3	$R_2 = 6\Omega,$ 1-3	$R_3 = 6\Omega,$ 1-2	$E_4 = 12\text{B},$ 3-2	$J_5 = 4\text{A},$ 2-3
19	$J_1 = 2\text{A},$ 3-1	$R_2 = 10\Omega,$ 3-4	$R_3 = 5\Omega,$ 1-4	$E_4 = 20\text{B},$ 2-1	$R_5 = 5\Omega,$ 2-4
20	$R_1 = 4\Omega,$ 1-4	$R_2 = 4\Omega,$ 1-2	$E_3 = 16\text{B},$ 4-2	$J_4 = 2\text{A},$ 1-3	$E_5 = 8\text{B},$ 3-4
21	$J_1 = 10\text{A},$ 3-1	$R_2 = 15\Omega,$ 1-3	$E_3 = 25\text{B},$ 2-1	$R_4 = 10\Omega,$ 2-3	$J_5 = 5\text{A},$ 3-2
22	$E_1 = 25\text{B},$ 1-4	$R_2 = 5\Omega,$ 1-2	$J_3 = 5\text{A},$ 4-2	$E_4 = 20\text{B},$ 3-2	$R_5 = 5\Omega,$ 3-4
23	$E_1 = 6\text{B},$ 1-3	$J_2 = 1\text{A},$ 3-1	$R_3 = 2\Omega,$ 1-2	$R_4 = 2\Omega,$ 2-3	$J_5 = 1\text{A},$ 2-3
24	$R_1 = 2\Omega,$ 1-3	$E_2 = 20\text{B},$ 2-1	$R_3 = 8\Omega,$ 2-3	$J_4 = 4\text{A},$ 2-3	$R_5 = 8\Omega,$ 2-3
25	$E_1 = 30\text{B},$ 1-4	$R_2 = 5\Omega,$ 1-2	$J_3 = 2\text{A},$ 2-3	$R_4 = 10\Omega,$ 3-4	$R_5 = 5\Omega,$ 2-4