

Самостоятельная работа № 3.
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Задача 1.

1. Найти дробно-линейную функцию, которая отображает единичную окружность $|z|=1$ на вещественную ось $\text{Im } w=0$ так, чтобы точки $1, i, -i$ переходили в точки $1, 0, -1$ соответственно. Во что при таком преобразовании отобразится внутренняя часть круга $|z|<1$?

2. Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, отображающую единичный круг на себя и такую, что $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

3. Отобразить верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на единичный круг $|w|<1$ так, чтобы точке $z = i$ соответствовала точка $w = 0$, а оси, выходящей из точки i и идущей параллельно оси Ox в положительную сторону, соответствовало положительное направление мнимой оси Ov плоскости w .

4. Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, отображающую единичный круг на себя и такую, что $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

5. Отобразить нижнюю полуплоскость $\text{Im } z < 0$ на единичный круг $|w|<1$ так, чтобы точке $z = i$ соответствовала точка $w = 0$, а оси, выходящей из точки i и идущей параллельно оси Ox в положительную сторону, соответствовало положительное направление мнимой оси Ov плоскости w .

6. Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, отображающую единичный круг на себя и такую, что $f(0) = 0$, $\arg f'(0) = -\frac{\pi}{2}$.

Задача 2.

1. Отобразить полукруг $|z-1|<1, \text{Im } z > 0$ (рис. 1а) на угол, занимающий I, II и III квадраты $0 < \arg w < \frac{3\pi}{2}$ (рис. 1б).

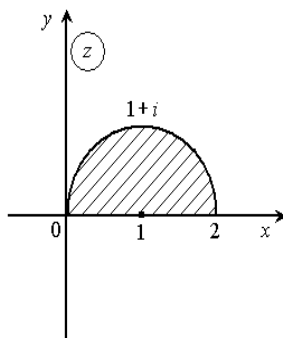


Рис. 1а

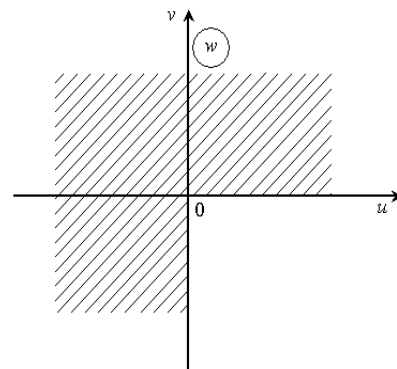


Рис. 1б

2. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость область $|z| < 2$; $0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.
3. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость сектор $|z| < 2$; $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.
4. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость сегмент $\operatorname{Im} z > 1$, $|z| > 2$.
5. Отобразить на верхнюю полуплоскость, являющуюся общей частью кругов радиуса 1 с центром в точках $z = 0$ и $z = 1$.
6. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость область $|z| > 2$; $|z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}$.

Задача 3.

1. Угол, образованный положительными направлениями координатных осей плоскости z $\left(0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right)$ отобразить на ту часть полосы, лежащей между прямыми $v = 0$ и $v = \pi$, которая лежит слева от мнимой оси плоскости w ($0 < \operatorname{Im} w < \pi$, $\operatorname{Re} w < 0$).
2. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость область $|z| < 2$, $|z - 1| < 1$.
3. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость область $|z| > 2$, $|z - 3| > 1$.
4. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость полосу $a < \operatorname{Re} z < b$.
5. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость полуполосу $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < a$.
6. Найти функцию, отображающую конформно на верхнюю полуплоскость круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.