МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт–Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения»

Кафедра «Высшая математика и механика»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

**Методические указания
по контрольным работам для студентов
заочного отделения**

Санкт-Петербург

2019

Одобрено на заседании кафедры «Высшая математика и механика»
протокол № 12 от 19 июня 2019 г.

Сборник содержит задачи контрольных работ по математическому анализу для студентов заочного отделения технических направлений , предусмотренные учебной программой в соответствии с ФГОС. Задания и методические указания могут быть использованы в курсе дисциплин всех направлений и специальностей ГУАП.

Составители:
доцент, канд.экон.наук, доцент Т.А. Черняк;
доцент, канд.тех.наук, доцент Е.В. Состина
доцент, канд.экон.наук В.П. Пушкина

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, доц. А.О. Смирнов

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Контрольные работы следует выполнять в отдельной тетради. На обложке тетради необходимо указать: название института Университета; название кафедры; название и номер контрольной работы; название (номер) специальности; фамилию, имя**,** отчество и номер зачетной книжки студента.

2. На каждой странице следует оставить поля размером 4 см для оценки решения задач и методических указаний проверяющего работу.

3. Условия задач переписывать полностью необязательно, достаточно указать номера задач по данному сборнику. В условия задач следует сначала подставить конкретные числовые значения параметров m и n, после чего выполняется их решение.

4. Задачи в контрольной работе нужно располагать в порядке возрастания номеров.

ФОРМИРОВАНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ К ЗАДАЧАМ

Каждая контрольная работа состоит из задач одного или нескольких разделов сборника.

Условия задач, входящих в контрольную работу, одинаковы для всех студентов, однако числовые данные задач зависят от личного шифра студента, выполняющего работу.

Числовые значения параметров m и n определяются по двум последним цифрам номера зачетной книжки (А – предпоследняя цифра, B – последняя цифра). Значение параметра m выбирается из таблицы 1, а значение параметра n – из таблицы 2. Числа m и n следует подставить в условия задач контрольной работы.

Таблица 1 (выбор параметра m)

А	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Таблица 2 (выбор параметра n)

В	0	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9
n	3	5	4	2	1	5	4	1	3	2

Например, если номер зачетной книжки 2018/ 5037, то А = 3, В = 7, и из таблиц находим, что $m = 4$, $n = 2$. Полученные $m = 4$ и $n = 2$ подставляются в условия всех задач контрольной работы студента.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. Пособие : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Оникс 21 век, 2005.
2. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс – М.: Айрис-пресс, 2009.
3. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс – М.: Айрис-пресс, 2009.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 – Санкт-Петербург: Лань, 2015.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 – Санкт-Петербург: Лань, 2008.
6. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость.: учеб.пособие/ Л.Д. Кудрявцев и др. – Москва: Физматлит, 2010.
7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 – Санкт-Петербург: Лань, 2015.
8. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы.Ряды: учеб.пособие/ Л.Д. Кудрявцев и др. – Москва: Физматлит, 2009
9. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2003.

Контрольная работа № 1. Предел и производная функции одной переменной.

1.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{m^2x^{m+2}+(m-n)x^2-n^2}{n^2x^{n+2}+(m+n)x+m^2}$.

1.2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{n}{m}}\dfrac{mnx^2-\left(m^2+n^2\right)x+mn}{\sqrt{2mx}-\sqrt{mx+n}}$.

1.3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{mx+n}{mx-n}\right)^{(m+n)x}$.

1.4. В точках $x_1=0$ и $x_2=n$ для функции $f(x)=\dfrac{m}{2^{\frac{n}{x}}-2}$ установить непрерывность или определить характер точек разрыва.

1.5. Найти производную функции $y=\left(x^n+x^m\right)\cdot\sqrt[n]{x^m}+\dfrac{n^x}{\cos x}+mn$.

1.6. Найти производную функции $y=(n+1)^{\frac{m}{x^n}}$

1.7. Найти производную функции $(nx)^{\sin(mx)}$, применяя метод логарифмического дифференцирования.

1.8. Найти производную функции, заданной неявно: $e^{mx+ny}-\dfrac{nx}{my}=mn$.

1.9. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases}x=\ln(mt)+nt+m\\ y=nt^2+2t+mn\end{cases}$.

1.10. С помощью методов дифференциального исчисления исследовать и построить график функции $y=\dfrac{nx+m}{x^2-n^2}$.

1.11. Найти интеграл $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{n+m+x^{m+1}}}$.

1.11. Найти интеграл $\int (x+m)\cdot e^{-nx} dx$.

1.12. Найти интеграл $\int \frac{nx+m^2+n^2}{x^3-2nx^2+\left(m^2+n^2\right)x} dx$.

1.13. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin(mx)+n+1}$.

1.14. Построить схематический чертеж и найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + mx - n^2,\ \left(mn+n^2\right)x - (m+n)y + m^2 n - n^3 = 0.$$

1.15. Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int\limits_n^{+\infty} \frac{dx}{\left(n^2+x^2\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}$

Краткие теоретические сведения для выполнения контрольной работы № 1 и решение типовых задач

1.1. Раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Рассмотрим отношение функций $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ – бесконечно большие функции (б.б.ф.) при $x \to x_0$, отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в этом случае называется неопределенным выражением вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для нахождения предела неопределенного выражения нужно избавиться от неопределенности (или раскрыть неопределенность).

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень, а затем перейти к пределу.

Пример 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{3x^3-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3},$$

так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $\frac{3}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$ стремится к нулю.

Пример 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{3x^3-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Пример 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{3x^2-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}=\infty.$$

Замечание. Из рассмотренных примеров видно, что предел частного двух многочленов при $x \to \infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени многочленов, стоящих в числителе и знаменателе, равны; равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя; равен ∞, если степень числителя больше степени знаменателя.

1.2. Раскрытие неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Рассмотрим отношение функций $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ – бесконечно малые функции (б.м.ф.) при $x \to x_0$, отношение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в этом случае называется неопределенным выражением вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, заданную отношением двух многочленов, надо в числителе и знаменателе выделить критический множитель и сократить на него.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель содержит иррациональность, следует избавиться от иррациональности, домножив числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

Пример

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{1}{6}}\dfrac{6x^2-37x+6}{\sqrt{12x}-\sqrt{6x+1}}$.

Решение

При $x \to \dfrac{1}{6}$ числитель и знаменатель дроби стремится к нулю, т.е. имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель дроби умножим на сопряженное знаменателю выражение, т.е. на сумму $\sqrt{12x}+\sqrt{6x+1}$, а квадратный трехчлен $6x^2-37x+6$ разложим на множители, найдя для этого его корни:

$$x_{1,2}=\frac{37\pm\sqrt{37^2-4\cdot 6\cdot 6}}{12}=\frac{37\pm\sqrt{1225}}{12}=\frac{37\pm 35}{12},\ x_1=6,\ x_2=\frac{1}{6},$$

тогда,

$$6x^2-37x+6=6(x-6)\left(x-\frac{1}{6}\right)=(x-6)(6x-1).$$

Таким образом, получим:

$$\lim_{x\to\frac{1}{6}}\frac{6x^2-37x+6}{\sqrt{12x}-\sqrt{6x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{6}}\frac{(x-6)(6x-1)\left(\sqrt{12x}+\sqrt{6x+1}\right)}{\left(\sqrt{12x}-\sqrt{6x+1}\right)\left(\sqrt{12x}+\sqrt{6x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{6}}\frac{(x-6)(6x-1)\left(\sqrt{12x}+\sqrt{6x+1}\right)}{12x-(6x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{6}}\frac{(x-6)(6x-1)\left(\sqrt{12x}+\sqrt{6x+1}\right)}{6x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{6}}(x-6)\left(\sqrt{12x}+\sqrt{6x+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{6}-6\right)\left(\sqrt{12\cdot\frac{1}{6}}+\sqrt{6\cdot\frac{1}{6}+1}\right)=-\frac{35}{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=-\frac{35\cdot 2\sqrt{2}}{6}=-\frac{35\sqrt{2}}{3}.$$

1.3. Вычисление пределов с использованием второго замечательного предела

Одна из форм записи второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Второй замечательный предел раскрывает неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

Пример

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+8}{7x-5}\right)^{5x}$.

Решение

Предел основания $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x+8}{7x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{7x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{7x}{x}-\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7+\frac{8}{x}}{7-\frac{5}{x}}=1$, а показатель степени $5x\to\infty$ при $x\to\infty$, т.е. имеет место неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Выделим целую часть основания степени

$$\frac{7x+8}{7x-5}=\frac{(7x-5)+13}{7x-5}=\frac{7x-5}{7x-5}+\frac{13}{7x-5}=1+\frac{13}{7x-5}$$

и применим второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x+8}{7x-5}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{13}{7x-5}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{7x-5}{13}}\right)^{\frac{7x-5}{13}}\right]^{\frac{13}{7x-5}\cdot 5x}=$$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{65x}{7x-5}}=e^{\frac{65}{7}}$, учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{65x}{7x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{65}{7-\frac{5}{x}}=\frac{65}{7}$.

1.4. Непрерывность функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она имеет предел в точке x_0 и этот предел равен $f(x_0)$ – значению функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Таким образом, для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0;
2) должны существовать пределы функции $f(x)$ при $x\to x_0$ как слева, так и справа, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

3) эти пределы должны быть равны между собой и равны значению функции $f(x)$ в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то говорят, что **функция имеет разрыв в точке** x_0 и точку x_0 называют **точкой разрыва** функции $f(x)$.

Точки разрыва следует искать среди точек, не входящих в область определения функции.

Классификация точек разрыва

Определение. Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет пределы слева и справа и они равны между собой, а в точке x_0

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

или функция не определена, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва** функции $f(x)$.

В этом случае функцию можно доопределить в точке x_0 так, чтобы она стала непрерывной, т.е. положить

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Определение. Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа, причем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$ **1-го рода**.

При переходе через точку x_0 значение функции $f(x)$ претерпевает скачок, измеряемый разностью $\left| f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) \right|$.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2-го рода**, если в этой точке хотя бы один из пределов (справа или слева) не существует или равен $\pm\infty$.

Пример

В точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 5$ для функции $f\left(x\right) = \dfrac{9}{4^{\frac{5}{x}} - 4}$ установить характер точек разрыва.

Решение

Область определения функции $\left(-\infty;0\right)\bigcup\left(0;5\right)\bigcup\left(5;+\infty\right)$. Данная функция непрерывна во всех точках, кроме точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 5$, которые не входят в область определения функции.

Исследуем точку $x_1 = 0$, находя ее односторонние пределы в этой точке:

если $x \to 0-0$, то $\dfrac{5}{x} \to -\infty,\ 4^{\frac{5}{x}} \to 0$, тогда предел слева $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{9}{4^{\frac{5}{x}} - 4} = -\dfrac{9}{4}$,

если $x \to 0+0$, то $\dfrac{5}{x} \to \infty,\ 4^{\frac{5}{x}} \to \infty$, тогда предел справа $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{9}{4^{\frac{5}{x}} - 4} = 0$.

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то в точке $x_1 = 0$ функция $f\left(x\right)$ имеет разрыв 1-го рода (скачок функции).

Исследуем точку $x_2 = 5$, находя ее односторонние пределы в этой точке:

если $x \to 5-0$, то $\dfrac{5}{x} \to 1+0,\ 4^{\frac{5}{x}} - 4 \to +0$, тогда $\lim\limits_{x\to 5-0} \dfrac{9}{4^{\frac{5}{x}} - 4} = \infty$,

если $x \to 5+0$, то $\dfrac{5}{x} \to 1-0,\ 4^{\frac{5}{x}} - 4 \to -0$, тогда $\lim\limits_{x\to 5+0} \dfrac{9}{4^{\frac{5}{x}} - 4} = -\infty$.

Так как односторонние пределы равны $\pm\infty$, то в точке $x_2 = 5$ функция $f\left(x\right)$ имеет разрыв 2-го рода.

1.5. Правила дифференцирования

Определение. **Производной функции** $y = f\left(x\right)$ **в данной точке** *x* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при $\Delta x \to 0$, если он существует.

По определению

$$f'\left(x\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Таблица производных

№		№	
1	$(c)' = 0,\ c = const$	10	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$	11	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$(a^x)' = a^x \ln a$	12	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$(e^x)' = e^x$	13	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
5	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	14	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
6	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	15	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
7	$(\sin x)' = \cos x$	16	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	17	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
9	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	18	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна нулю: $(c)' = 0,\ c = const$.
2.

Теорема. Если каждая из функций $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируема в данной точке *x*, то сумма, разность, произведение и частное (частное при условии $V(x) \neq 0$) так же дифференцируемы в этой точке, причем имеют место формулы:

1) $(U \pm V)' = U' \pm V'$,

2) $(UV)' = U'V + V'U$,

3) $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - V'U}{V^2},\ V \neq 0$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$\left(cU\left(x\right)\right)' = cU'\left(x\right).$$

Пример

Используя таблицу производных и правила дифференцирования, найти производную функции $y = \sin x \cdot \ln x + \dfrac{e^x}{1+x^2} + 4$.

Решение

$$y' = \left(\sin x \cdot \ln x + \frac{e^x}{1+x^2} + 4\right)' = \left(\sin x\right)' \cdot \ln x + \left(\ln x\right)' \cdot \sin x +$$

$$+\frac{\left(e^x\right)' \cdot \left(1+x^2\right) - \left(1+x^2\right)' \cdot e^x}{\left(1+x^2\right)^2} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{e^x \cdot \left(1+x^2\right) - 2x \cdot e^x}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{e^x \cdot \left(1+x^2-2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{e^x \cdot \left(1-x\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

1.6. Производная сложной функции

Пусть дана сложная функция $y = f\left(U\right)$, где $U = \varphi\left(x\right)$ или $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$.

Теорема. Если функция $U = \varphi\left(x\right)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f\left(U\right)$ дифференцируема в точке $U_0 = \varphi\left(x_0\right)$, тогда сложная функция $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$\left(f\left(\varphi\left(x\right)\right)\right)'_x\Big|_{x=x_0} = f'\left(U_0\right) \cdot \varphi'\left(x_0\right) \text{ или } y'_x = y'_U \cdot U'_x$$

Замечание. Теорема может быть обобщена на случай любой конечной цепочки функций. Так, если $y = f\left(U\right)$, $U = \varphi\left(z\right)$, $z = \psi\left(x\right)$, или $y = f\left(\varphi\left(\psi\left(x\right)\right)\right)$ и существуют производные f'_U, φ'_z, ψ'_x, то $y'_x = y'_U \cdot U'_z \cdot z'_x$.

Пример

Найти производную функции $y = 10^{x^6}$.

Решение

Здесь $y = 10^u$, $U = x^6$,

$y'_U = 10^U \cdot \ln 10$, $U'_x = 6x^5$, тогда $\left(10^{x^6}\right)' = 10^{x^6} \cdot \ln 10 \cdot 6x^5 = 6\ln 10 \cdot x^5 \cdot 10^{x^6}$.

1.7. Метод логарифмического дифференцирования

Метод логарифмического дифференцирования удобен для нахождения производной показательной функции $y = a^x$, показательно – степенной функции $y = U(x)^{V(x)}$, а также, если функция представляет собой выражение вида $y = \dfrac{U_1(x)U_2(x)...U_n(x)}{V_1(x)V_2(x)...V_m(x)}$. Этот метод состоит в следующем: данное выражение сначала логарифмируют по основанию *e*, а затем дифференцируют как тождество, получая уравнение для нахождения производной.

Пример

Найти производную функции $y = (2x)^{\cos 5x}$ применяя метод логарифмического дифференцирования.

Решение

Здесь основание и показатель степени зависит от *x*. Логарифмируем обе части равенства $y = (2x)^{\cos 5x}$ по основанию *e*:

$\ln y = \ln(2x)^{\cos 5x}$,

применяя свойства логарифмов, получим

$\ln y = \cos 5x \cdot \ln(2x)$.

Продифференцируем обе части последнего равенства по *x*, рассматривая *y* как функцию *x*:

$$\frac{y'}{y} = -5\sin 5x \cdot \ln 2x + \frac{2\cos 5x}{2x},$$

умножим обе части равенства на *y* и подставим вместо *y* его выражение $(2x)^{\cos 5x}$, получим

$$y' = (2x)^{\cos 5x} \cdot \left(\frac{\cos 5x}{x} - 5\sin 5x \cdot \ln 2x\right).$$

1.8. Производная функции, заданной неявно

Дифференцирование функций, заданных неявно, опирается на возможность почленного дифференцирования тождеств.

В общем случае уравнение почленно дифференцировать нельзя.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ и известно, что существует решение этого уравнения в виде $y = f(x)$; подставив это решение в уравнение, получим тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Продифференцировав $F(x, f(x)) \equiv 0$ по x, получим уравнение для нахождения производной $f'(x)$.

Пример

Найти производную функции, заданной неявно: $\sin(x+y) - \dfrac{e^{y^2}}{6x} = 15$.

Решение

Продифференцируем обе части данного уравнения по аргументу x:

$$\cos(x+y)\cdot(1+y') - \frac{e^{y^2}\cdot 2y\cdot y'\cdot 6x - 6\cdot e^{y^2}}{36x^2} = 0$$

$$36x^2\cdot\cos(x+y) + 36x^2\cdot\cos(x+y)\cdot y' - 12xye^{y^2}\cdot y' + 6e^{y^2} = 0$$

$$y'\left(36x^2\cdot\cos(x+y) - 12xye^{y^2}\right) = -36x^2\cdot\cos(x+y) - 6e^{y^2}$$

$$y' = -\frac{6\left(6x^2\cdot\cos(x+y) + e^{y^2}\right)}{12x\left(3x\cdot\cos(x+y) - ye^{y^2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(6x^2\cdot\cos(x+y) + e^{y^2}\right)}{2x\left(ye^{y^2} - 3x\cdot\cos(x+y)\right)}.$$

1.9. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями

$$\textbf{(1)}\quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},\ t \in (\alpha, \beta),\ t \text{ - параметр.}$$

Требуется найти производную y'_x.

Имеет место формула

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} \text{ или } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример

Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = e^{4t} + 5t^2 - 1 \\ y = \ln 3t + 2 \end{cases}$.

Решение

Найдем производные функций *x* и *y* по переменной *t*:

$$y'_t = (\ln 3t + 2)'_t = \frac{3}{3t} = \frac{1}{t},$$

$$x'_t = \left(e^{4t} + 5t^2 - 1\right)'_t = 4e^{4t} + 10t.$$

Согласно формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, получим

$$y'_x = \frac{\frac{1}{t}}{4e^{4t} + 10t} = \frac{1}{2t\left(2e^{4t} + 5t\right)}.$$

1.10. Исследование функций и построение графиков функций

Одна из возможных схем исследования функции и построения ее графика включает следующие этапы решения задачи:

1. Найти область определения функции, найти точки разрыва.
2. Определить четность, нечетность и периодичность функции.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти асимптоты графика функции.

5. Исследовать функцию на экстремум, найти интервалы монотонности функции, точки максимума и минимума.
6. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции и точки перегиба.
7. Построить график функции.

Пример

С помощью методов дифференциального исчисления исследовать и построить график функции $y = \dfrac{7x}{x^2 - 36}$.

Решение

1. Область определения функции находится из условия: $x^2 - 36 \neq 0,\ x \neq \pm 6$, т.е. $(-\infty; -6) \cup (-6; 6) \cup (6; +\infty)$.
2. Четность, нечетность, периодичность функции.

   Функция $f(x)$ называется четной, если для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется нечетной, если для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. Если не выполнено ни одно из равенств, то функцию называют функцией общего вида.

   В нашем случае, $f(-x) = \dfrac{7(-x)}{(-x^2) - 36} = -\dfrac{7x}{x^2 - 36} = -f(x)$, следовательно, функция нечетная, а ее график симметричен относительно начала координат.

   Функция непериодическая.
3. Точки пересечения графика функции с осями координат:

   с осью Oy, $x = 0,\ y(0) = 0$, точка $(0;0)$,

   с осью Ox, $y = 0,\ \dfrac{7x}{x^2 - 36} = 0,\ x = 0$, точка $(0;0)$.
4. Точки разрыва функции и асимптоты графика функции.

   1) Вертикальные асимптоты. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$. Таким образом, для нахождения вертикальных асимптот следует найти все точки разрыва 2-го рода данной функции. Если точек разрыва нет, то нет и вертикальных асимптот.

Заданная функция имеет две точки разрыва второго рода $x_1=-6$ и $x_2=6$, так как

$$\lim_{x\to-6-0}\frac{7x}{x^2-36}=-\infty,\quad \lim_{x\to-6+0}\frac{7x}{x^2-36}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to6-0}\frac{7x}{x^2-36}=-\infty,\quad \lim_{x\to6+0}\frac{7x}{x^2-36}=+\infty,$$

следовательно, график функции имеет две вертикальных асимптоты $x=-6$ и $x=6$.

2) Наклонные асимптоты. Пусть прямая $y=kx+b$ является асимптотой графика функции $y=f(x)$. Такую асимптоту называют **наклонной**. Для того, чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=b.$$

Аналогично находится асимптота при $x\to-\infty$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x}{x\left(x^2-36\right)}=0$, то наклонных асимптот нет.

3) Горизонтальные асимптоты. Горизонтальная асимптота – частный случай наклонной асимптоты, когда $k=0$.

Чтобы найти горизонтальные асимптоты графика функции, нужно найти пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b_1,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b_2.$$

Если эти пределы конечны и различны, то прямые $y=b_1$, $y=b_2$ будут горизонтальными асимптотами. Если какой-либо из этих пределов не существует или равен $\pm\infty$, то не существуют и соответствующие асимптоты.

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x}{x^2-36}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{x^2-36}=0,$$

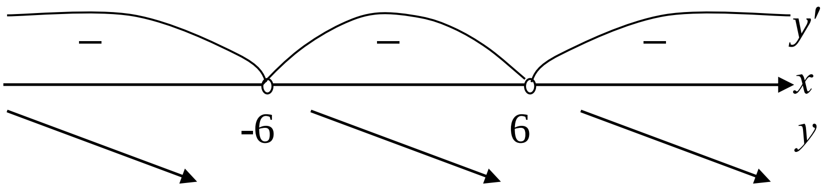
то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=0$.

5. Исследование функции на экстремум.
Для определения интервалов возрастания и убывания функции и ее точек экстремума найдем первую производную:

$$y' = \left(\frac{7x}{x^2-36} \right)' = \frac{7\left(x^2-36\right)-2x\cdot 7x}{\left(x^2-36\right)^2} = \frac{7x^2-252-14x^2}{\left(x^2-36\right)^2} = \frac{-7x^2-252}{\left(x^2-36\right)^2}.$$

Найдем критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует, для чего приравниваем числитель y' к нулю:

$-7x^2-252=0 \Rightarrow x^2=-\dfrac{252}{7}$, т.е. вещественных корней нет, следовательно, точек экстремума нет. Так как производная отрицательна во всей области определения функции, то она всюду убывает в этой области.



6. Исследование на выпуклость, вогнутость. Точки перегиба.
Вычислим производную второго порядка:

$$y'' = \left(\frac{-7x^2-252}{\left(x^2-36\right)^2} \right)' = \frac{-14x\cdot\left(x^2-36\right)^2-2\left(x^2-36\right)\cdot 2x\cdot\left(-7x^2-252\right)}{\left(x^2-36\right)^4} =$$

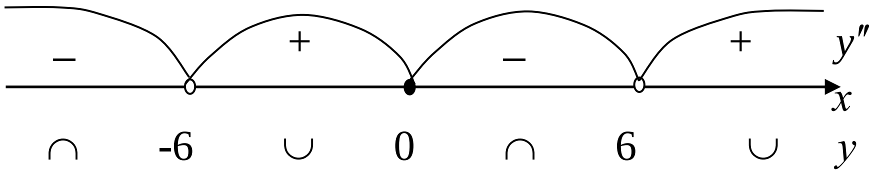
$$= \frac{\left(x^2-36\right)\left(-14x\cdot\left(x^2-36\right)-4x\cdot\left(-7x^2-252\right)\right)}{\left(x^2-36\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\left(-7\cdot\left(x^2-36\right)-2\cdot\left(-7x^2-252\right)\right)}{\left(x^2-36\right)^3} = \frac{2x\left(-7x^2+252+14x^2+504\right)}{\left(x^2-36\right)^3} =$$

$$= \frac{2x\left(7x^2+756\right)}{\left(x^2-36\right)^3}.$$

Необходимое условие точки перегиба: $y''=0$ или не существует. Равенство $2x\left(7x^2+756\right)=0$ выполняется при $x=0$, следовательно, эта точка является «подозрительной» на точку перегиба.

Определим знак второй производной на всей числовой оси и укажем на ней интервалы выпуклости и вогнутости функции.



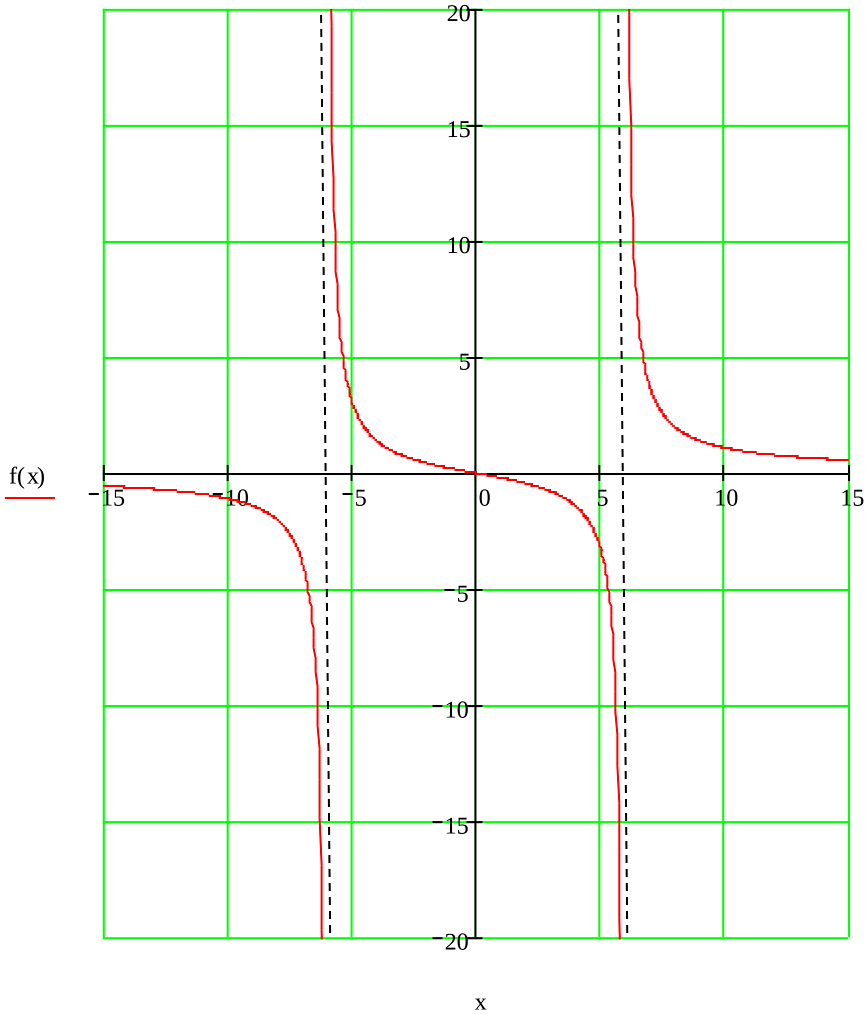
Так как при переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет знак, то точка с абсциссой $x = 0$ является точкой перегиба. Итак, точка перегиба имеет координаты $(0;0)$.

7. Построение графика функции.

Для уточнения построения графика функции можно найти ряд вспомогательных точек

x	-9	-4	4	9
y	-1,4	1,4	-1,4	1,4

после чего строим график функции.



1.11. Метод интегрирования подведением под знак дифференциала

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), конечном или бесконечном, если в любой точке $x\in(a,b)$ этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)=f(x)$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенных на интервале (a,b), называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Метод подведения под знак дифференциала следует из свойства инвариантности неопределенного интеграла.

Пусть дан интеграл $\int f(x)dx=F(x)+c$. Справедливо равенство

$$\int f(U)dU=F(U)+c,$$

где $U=\varphi(x)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

Таблица интегралов

1. $\int 0\cdot dU=C$	8. $\int \sin U dU=-\cos U+C$
2. $\int 1\cdot dU=U+C$	9. $\int \cos U dU=\sin U+C$
3. $\int U^n dU=\dfrac{U^{n+1}}{n+1}+C$	10. $\int \dfrac{dU}{\cos^2 U}=\mathrm{tg}\,U+C$
4. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U}}=2\sqrt{U}+C$	11. $\int \dfrac{dU}{\sin^2 U}=-\mathrm{ctg}\,U+C$
5. $\int \dfrac{dU}{U}=\ln\lvert U\rvert+C$	12. $\int \dfrac{dU}{1+U^2}=\mathrm{arctg}\,U+C$
6. $\int a^U dU=\dfrac{a^U}{\ln a}+C$	13. $\int \dfrac{dU}{a^2+U^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{U}{a}+C$
7. $\int e^U dU=e^U+C$	14. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{1-U^2}}=\arcsin U+C$
15. $\int \dfrac{dU}{\sqrt{a^2-U^2}}=\arcsin\dfrac{U}{a}+C==-\arccos\dfrac{U}{a}+C$	

При интегрировании методом подведения под знак дифференциала необходимо иметь в виду следующие равенства:

$$dx = d\left(x+b\right),\ b = const \qquad dx = \frac{1}{a}d\left(ax+b\right),\ a = const \neq 0$$

$$xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2+b\right) \qquad x^{n-1}dx = \frac{1}{n}d\left(x^n\right)$$

$$\frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right) \qquad e^x dx = d\left(e^x\right)$$

$$\sin x dx = -d\left(\cos x\right) \qquad \cos x dx = d\left(\sin x\right)$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\operatorname{tg} x\right) \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\operatorname{ctg} x\right)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x\right) \qquad \frac{dx}{1+x^2} = d\left(\operatorname{arctg} x\right) \qquad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$$

В общем случае

$$\varphi'\left(x\right)dx = d\varphi\left(x\right).$$

Пример 1

Найти интеграл $\int\left(2x+3\right)^2 dx$.

Так как $dx = \frac{1}{2}d\left(2x+3\right)$, то

$$\int\left(2x+3\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int\left(2x+3\right)^2 d\left(2x+3\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2x+3\right)^3}{3} + C = \frac{1}{6}\left(2x+3\right)^3 + C.$$

Пример 2

Найти интеграл $\int\frac{x^3dx}{x^4+8}$.

Так как $x^3dx = \frac{1}{4}d\left(x^4+8\right)$, то

$$\int\frac{x^3dx}{x^4+8} = \frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^4+8\right)}{x^4+8} = \frac{1}{4}\ln\left|x^4+8\right| + C.$$

Пример 3

Найти интеграл $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$.

Так как $\frac{dx}{1+x^2} = d\left(\operatorname{arctg} x\right)$, то

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2} = \int e^{\operatorname{arctg} x} d\left(\operatorname{arctg} x\right) = e^{\operatorname{arctg} x} + C$$

Пример 4

Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

Так как $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(1+\operatorname{tg} x\right)$, то

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} = \int \frac{d\left(1+\operatorname{tg} x\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}} = 2\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + C.$$

1.12. Метод интегрирования по частям

Пусть дан интеграл вида $\int UdV$, где $U = U\left(x\right),\ \ V = V\left(x\right)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Справедлива формула интегрирования по частям

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

Таким образом, вычисление интеграла $\int UdV$ приводится к вычислению интеграла $\int VdU$, который может оказаться более простым или табличным.

Пусть $P_n\left(x\right)$ - многочлен степени *n*. Методом интегрирования по частям можно вычислить, например, интегралы вида:

1 группа:

$\int P_n\left(x\right)\cos ax dx,\quad U = P_n\left(x\right)$

$\int P_n\left(x\right)\sin ax dx,\quad U = P_n\left(x\right)$

$\int P_n\left(x\right)e^{ax} dx,\quad U = P_n\left(x\right)$

$\int P_n\left(x\right)a^{bx} dx,\quad U = P_n\left(x\right)$

2 группа:

$\int P_n\left(x\right)\ln ax dx,\quad U = \ln ax$

$\int P_n\left(x\right)\arcsin ax dx,\quad U = \arcsin ax$

$\int P_n\left(x\right)\operatorname{arctg} ax dx,\quad U = \operatorname{arctg} ax$

$\int P_n\left(x\right)\arccos ax dx,\quad U = \arccos ax$

Пример

Найти интеграл $\int (4x+3)e^{-6x}dx$.

Решение

Положим $U=4x+3,\ dV=e^{-6x}dx$, найдем $dU=4dx$, $V=\int dV=\int e^{-6x}dx=-\frac{1}{6}\int e^{-6x}d(-6x)=-\frac{1}{6}e^{-6x}+C$. Так как достаточно взять одну из первообразных, то принимаем $C=0$. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int (4x+3)e^{-6x}dx=\begin{vmatrix} U=4x+3, & dU=4dx \\ dV=e^{-6x}dx, & V=-\frac{1}{6}e^{-6x} \end{vmatrix}=(4x+3)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)e^{-6x}-$$

$$-\int\left(-\frac{1}{6}\right)e^{-6x}\cdot 4dx=-\frac{1}{6}(4x+3)e^{-6x}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\int e^{-6x}d(-6x)=$$

$$=\frac{1}{6}(4x+3)e^{-6x}-\frac{1}{9}e^{-6x}+C.$$

1.13. Интегрирование рациональных дробей

Функция вида $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно называется рациональной функцией или **рациональной дробью**.

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, т.е. $n<m$. Если $n\geq m$, то рациональная дробь называется **неправильной**.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби, т.е. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M(x)+\frac{R(x)}{Q_m(x)}$, где $M(x)$ - многочлен степени $n-m$, $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ - правильная рациональная дробь, $R(x)$ - остаток – многочлен степени меньше m. Это представление единственно.

Выделение целой части (многочлена $M(x)$) производится с помощью преобразования числителя дроби (в простых случаях) или, в общем случае, делением многочлена $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби на простейшие). Правильная рациональная дробь вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ может быть представлена тождественно равной ей суммой простейших рациональных дробей, причем в этой сумме:

1) каждому простому вещественному корню a знаменателя $Q_m(x)$ соответствует дробь вида $\dfrac{A}{x-a}$;
2) каждому вещественному корню b кратности k соответствует сумма дробей $\dfrac{A_k}{(x-b)^k}+\dfrac{A_{k-1}}{(x-b)^{k-1}}+\ldots+\dfrac{A_1}{(x-b)}$;
3) каждой паре простых комплексно сопряженных корней соответствует дробь вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;
4) каждой паре комплексно сопряженных корней кратности k соответствует сумма дробей вида $\dfrac{M_k x+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\ldots+\dfrac{M_1 x+N_1}{x^2+px+q}$.

A_i, M_j, N_l - неопределенные коэффициенты. Для нахождения этих коэффициентов применяются следующие методы:

1. **Метод неопределенных коэффициентов**. Согласно этому методу в правой части разложения дроби на простейшие надо привести дроби к общему знаменателю. В результате получим равенство 2-х дробей с одинаковыми знаменателями, а значит, можно приравнять только числители. Приравнивая в числителях коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения этих коэффициентов.
2. **Метод частных значений аргумента**. Согласно этому методу в полученное равенство подставляем отдельные значения аргумента, наиболее удобно подставлять вещественные корни знаменателя.
3. **Комбинированный метод**. Метод состоит в комбинировании двух предыдущих методов. Сначала применяют метод частных значений аргумента (подставляют вещественные корни знаменателя), а затем применяют метод неопределенных коэффициентов.

Пример

Найти интеграл $\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$.

Решение

Согласно теореме разложим правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1},$$

приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1(x-1)(x^2+1)+A_2(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)},$$

приравнивая числители, получим

$$x^3-2x+2=A_1(x-1)(x^2+1)+A_2(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)^2.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов применим комбинированный метод. Подставим в левую и правую часть вещественный корень знаменателя $x=1$, получим

$$1=2A_2\text{, откуда } A_2=\frac{1}{2}.$$

Теперь применим метод неопределенных коэффициентов, для этого раскроем скобки в правой части равенства и сгруппируем слагаемые по одинаковым степеням x:

$$A_1x^3+A_1x-A_1x^2-A_1+A_2x^2+A_2+Mx^3-2Mx^2+Mx+Nx^2-2Nx+N=$$
$$=(A_1+M)x^3+(-A_1+A_2-2M+N)x^2+(A_1+M-2N)x+(-A_1+A_2+N),$$

откуда

$$x^3-2x+2=(A_1+M)x^3+(-A_1+A_2-2M+N)x^2+$$
$$+(A_1+M-2N)x+(-A_1+A_2+N).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$x^3:1=A_1+M$

$x^2:0=-A_1+A_2-2M+N$,

$x^1:-2=A_1+M-2N$

получаем систему уравнений для нахождения оставшихся неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} A_1 + M = 1 \\ -A_1 + \dfrac{1}{2} - 2M + N = 0, \\ A_1 + M - 2N = -2 \end{cases}$$

решая которую находим

$$A_1 = 0,\ M = 1,\ N = \frac{3}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x + \frac{3}{2}}{x^2+1},$$

тогда

$$\int \frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{x + \frac{3}{2}}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

1.14. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx,$ где R – рациональная функция своих аргументов.

Универсальная подстановка $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ сводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби, при этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Итак: $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$

Пример

Найти интеграл $\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x + 2}$.

Решение

Применим универсальную подстановку

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

получим

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t+2-2t^2+2+2t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{6t+2-2t^2+2+2t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3t+2)}{3t+2} = \frac{1}{3}\ln|3t+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right| + C.$$

1.15. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, $a < b$, определена и непрерывная на отрезке $[a;b]$ и пусть, для определенности, $f(x) \ge 0$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей произвольным образом точками деления: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Выберем на каждом частичном промежутке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольным образом точки ξ_k, $k = 1, 2, ..., n$.

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n.$ Составим сумму $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, которая называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначим длину наибольшего частичного промежутка через $\lambda = \max \Delta x_k$, $k = 1, 2, ..., n.$ Перейдем к пределу при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} S_n$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные и выбора на них точек ξ_k, то он и называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} S_n.$$

Если $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$, то справедлива **формула Ньютона – Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

т.е. для вычисления определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ нужно составить разность значений произвольной ее первообразной для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Пример 1

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Если $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a,\ \ x = b$ и осью *ox*:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Если $f(x)$ меняет знак конечное число раз на отрезке $[a;b]$, то интеграл по всему отрезку разбивается на сумму интегралов по частичным отрезкам, интеграл будет положителен там, где $f(x) > 0$ и отрицателен, где $f(x) < 0$:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

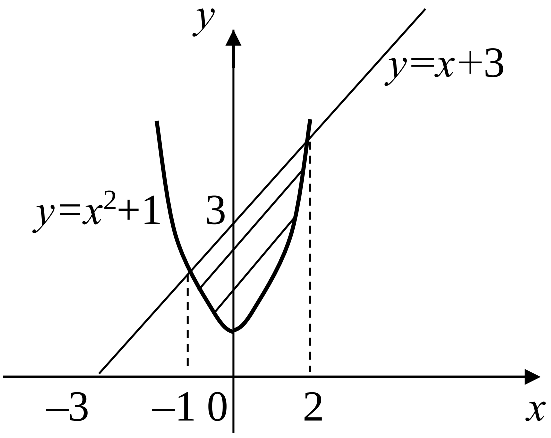
Пусть нужно вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a,\ \ x = b$, тогда при условии $f_2(x) > f_1(x)$ имеем

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

Пример 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x+3$ и $y=x^2+1$.

Решение



Найдем точки пересечения:

$$\begin{cases} y=x+3 \\ y=x^2+1 \end{cases},\quad x^2+1=x+3,$$

$$x^2-x-2=0,\ x_1=-1,\ x_2=2$$

$$S=\int_{-1}^{2}\left[(x+3)-\left(x^2+1\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$$

1.16. Несобственные интегралы 1-го рода

Пусть дана функция $y=f(x)$, которая определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$. Пусть интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует для любого конечного b и пусть $b\to+\infty$.

Предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b\to+\infty$ называется **несобственным интегралом 1-го рода** от функции $f(x)$ на $[a;+\infty)$ и обозначается символом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Итак, $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Если этот предел конечен, то говорят, что интеграл **сходится**, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой на $[a;+\infty)$. Если предел бесконечен или не существует, то про интеграл говорят, что он **расходится**.

Вычислить несобственный интеграл 1-го рода можно по определению.

Пример

Вычислить интеграл или установить его расходимость $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$.

Решение

$$\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} e^{-x^2}\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b^2}-1\right) =$$

$= -\frac{1}{2}\cdot\left(-1\right) = \frac{1}{2}$, интеграл сходится.

Аналогично определяются еще два вида несобственных интегралов 1-го рода: $\int\limits_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f\left(x\right)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f\left(x\right)dx$, c – любое число.

Контрольная работа № 2. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных.

2.1. Найти дифференциал dz функции $z = \sin^2\left(mx^2 - ny^2\right)$.

2.2. Показать, что функция $z = y \cdot \ln\left(mx^2 - ny^2\right)$ удовлетворяет уравнению $\frac{n}{x} \cdot z'_x + \frac{m}{y} \cdot z'_y = \frac{m \cdot z}{y^2}$.

2.3. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $4z = xy - nx - my + mn$ в точке $(-m; -n; mn)$.

2.4. Для функции $z = \ln\left(mx^2 + ny^2\right)$ в точке $A(-n; m)$ найти градиент и производную по направлению $\vec{a} = m \cdot \vec{i} - n \cdot \vec{j}$.

2.5. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

2.5.1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(m+n) + k^{m+1}}$.

2.5.2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(m+n)^k}$.

2.5.3 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m \cdot k^2 + n}{(m+n) \cdot k^2 + m} \right)^k$.

2.6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n+m]{k}}$.

2.7. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{(n+m)k} \cdot x^k}{k!}$.

2.8. Разложить функцию $f(x) = (n+m)^{mx}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = n$.

Краткие теоретические сведения для выполнения контрольной работы № 2 и решение типовых задач

2.1. Частные производные функции двух переменных

Переменная z называется **функцией двух независимых переменных** x и y на некотором множестве точек D, если каждой паре значений $(x;y)$ из множества D соответствует определенное значение величины z.

Пишут:

$$z = f(x,y).$$

С геометрической точки зрения функция $z = f(x,y)$ представляет собой поверхность.

Если при $\Delta x \to 0$ отношение частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ имеет конечный предел, то этот предел называется **частной производной функции** $z = f(x,y)$ по независимой переменной x в точке (x,y) и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$, или $f'_x(x,y)$, или $z'_x(x,y)$.

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Так как $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном значении переменной y, а $\Delta_y z$ – при неизменном значении переменной x, определение частных производных можно сформулировать так: частной производной по x функции $z = f(x,y)$ называется обычная производная этой функции по x, вычисленная в предположении, что y есть постоянная; частной производной по y функции $z = f(x,y)$ называется ее производная по y, вычисленная в предположении, что x – постоянная.

Пример 1

Найти частные производные функции $z = xy^2 + \arcsin 2x - e^{xy} + \ln y$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - xe^{xy} + \frac{1}{y}.$$

Пример 2

Показать, что функция $z = x \cdot \ln\left(4x^2 + 6y^2\right)$ удовлетворяет уравнению $\frac{3}{x} \cdot z'_x - \frac{2}{y} z'_y = \frac{3z}{x^2}$.

Решение

Найдем частные производные

$$z'_x = \ln\left(4x^2 + 6y^2\right) + x \cdot \frac{1}{4x^2 + 6y^2} \cdot 8x = \ln\left(4x^2 + 6y^2\right) + \frac{8x^2}{4x^2 + 6y^2},$$

$$z'_y = x \cdot \frac{1}{4x^2 + 6y^2} \cdot 12y = \frac{12xy}{4x^2 + 6y^2}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{3\ln\left(4x^2 + 6y^2\right)}{x} + \frac{24x^2}{x\left(4x^2 + 6y^2\right)} - \frac{24xy}{y\left(4x^2 + 6y^2\right)} =$$

$$= \frac{3x\ln\left(4x^2 + 6y^2\right)}{x^2} + \frac{24x}{\left(4x^2 + 6y^2\right)} - \frac{24x}{\left(4x^2 + 6y^2\right)} = \frac{3z}{x^2}$$ что и требовалось доказать.

2.2. Дифференциал функции двух переменных

Частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется произведение частной производной на соответствующее произвольное приращение независимой переменной:

выражение $d_x z = f'_x(x, y)dx$ **называется** частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ по переменной *x*;

выражение $d_y z = f'_y(x, y)dy$ называется **частным дифференциалом функции** $z = f(x, y)$ **по переменной *y***.

Пример 1

Найти частные дифференциалы функции

$z = x^2 \cdot \cos y + \operatorname{tg} x \cdot e^y + 2\operatorname{arctg} x - 3\arcsin y$

Решение

$$d_x z = \left(2x \cdot \cos y + \frac{e^y}{\cos^2 x} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx,$$

$$d_y z = \left(-x^2 \sin y + \operatorname{tg} x \cdot e^y - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dy.$$

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ равен сумме ее частных дифференциалов:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Пример 2

Найти дифференциал dz функции $z = \operatorname{tg}^3\left(2x^3 + 6y^2\right)$.

Решение

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\operatorname{tg}^2\left(2x^3+6y^2\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(2x^3+6y^2\right)} \cdot 6x^2 = \frac{18x^2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(2x^3+6y^2\right)}{\cos^2\left(2x^3+6y^2\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3\operatorname{tg}^2\left(2x^3+6y^2\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(2x^3+6y^2\right)} \cdot 12y = \frac{36y \cdot \operatorname{tg}^2\left(2x^3+6y^2\right)}{\cos^2\left(2x^3+6y^2\right)}.$$

Подставим частные производные в формулу полного дифференциала, получим

$$dz = \frac{18x^2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(2x^3+6y^2\right)}{\cos^2\left(2x^3+6y^2\right)} dx + \frac{36y \cdot \operatorname{tg}^2\left(2x^3+6y^2\right)}{\cos^2\left(2x^3+6y^2\right)} dy.$$

2.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Прямая линия называется **касательной к поверхности** в некоторой точке $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку M_0.

Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную точку M_0, называется **касательной плоскостью к поверхности** в точке M_0.

Если уравнение поверхности задано неявно, т.е. $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0.$$

Если уравнение поверхности задано в явном виде, т.е. $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости к поверхности имеет вид

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Нормалью к поверхности называют прямую, перпендикулярную к касательной плоскости в точке касания.

Если уравнение поверхности задано неявно, т.е. $F(x,y,z)=0$, то уравнение нормали к поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Если уравнение поверхности задано в явном виде, т.е. $z=f(x,y)$, то уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Пример

Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=1+x^2+y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Решение

Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и вычислим их значения в точке $M_0(1;1;3)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(2x)\Big|_{M_0}=2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(2y)\Big|_{M_0}=2.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z-3=2(x-1)+2(y-1) \text{ или } 2x+2y-z-1=0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}.$$

2.4. Производная по направлению и градиент

Пусть функция $U=f(x,y,z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Производная функции $U=f(x,y,z)$ **по направлению вектора** $\vec{l}$ находится по формуле

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma,$$

где $\vec{l}^{\,0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ – единичный вектор заданного направления $\vec{l}$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора, которые находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{l_x}{|\vec{l}|},\ \cos\beta=\frac{l_y}{|\vec{l}|},\ \cos\gamma=\frac{l_z}{|\vec{l}|}.$$

Производная по направлению является скоростью изменения функции $U=f(x,y,z)$ в точке M_0 по направлению $\vec{l}$.

Абсолютная величина производной по направлению $\vec{l}$ определяет величину скорости, а знак производной – характер изменения функции (возрастание или убывание).

Градиентом функции $U=f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ называется вектор, обозначаемый символом $\mathrm{grad}\,U$ и равный

$$\left.\mathrm{grad}\,U\right|_{M_0}=\left\{\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0}\right\},$$

т.е. вектор, проекции которого на координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz* равны соответственно частным производным по *x*, *y*, *z* в точке M_0 от функции $U = f(x, y, z)$.

Градиент *U* в данной точке по численному значению и по направлению характеризует наибольшую скорость возрастания величины *U*.

Пример

Для функции $z = \ln\left(2x^3 + 3y^3\right)$ в точке $M_0(-2;2)$ найти градиент и производную по направлению $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$.

Решение

Градиент находим по формуле $\operatorname{grad} z\big|_{M_0} = \left\{ \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}; \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} \right\}$, где

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{6x^2}{2x^3 + 3y^3}\Bigg|_{(-2;2)} = \dfrac{24}{8} = 3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{9y^2}{2x^3 + 3y^3}\Bigg|_{(-2;2)} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2}$, тогда

$\operatorname{grad} z\big|_{M_0} = \left\{3; \dfrac{9}{2}\right\}$.

Производная по направлению: $\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0} \cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0} \cos\beta$,

где $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{4+4}} = \dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{-2}{\sqrt{4+4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тогда

$\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0} = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{9}{2} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{6\sqrt{2} - 9\sqrt{2}}{4} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

2.5. Числовые ряды с положительными членами

Числовым рядом называется выражение вида

$$U_1+U_2+...+U_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}U_n,$$

числа U_1, U_2, ..., U_n, ... называются членами ряда, U_n - общим членом ряда.

Сумму первых n членов данного ряда называют ***n*-ной частичной суммой** данного ряда и обозначают символом S_n, т.е.

$$S_n=U_1+U_2+...+U_n=\sum_{k=1}^{n}U_k.$$

Числовой ряд называется **сходящимся**, если сходится последовательность частичных сумм $\{S_n\}$, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$; числовой ряд называется **расходящимся**, если этот предел не существует или бесконечен. Этот предел S (в случае сходимости ряда) последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ называется **суммой данного ряда**:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{k=1}^{\infty}U_k.$$

Если ряд сходится, то $U_n\to 0$ при $n\to\infty$. Это **необходимый признак сходимости** ряда. Если этот признак не выполнен, то ряд расходится.

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ не нарушится, если все его члены умножить на одно и то же число k, отличное от нуля, причем для сумм этих рядов выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}kU_n=k\sum_{n=1}^{\infty}U_n.$$

Прибавление к ряду или отбрасывание от него конечного числа первых членов не влияет на сходимость ряда.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ называется **рядом с положительными членами**, если все члены ряда неотрицательны, т.е. $U_n\geq 0$ для любого n; если члены ряда строго больше нуля, т.е. $U_n > 0$ для любого n, то такой ряд называется **рядом со строго положительными членами**.

Для рядов с положительными членами имеют место достаточные признаки, по которым можно установить их сходимость или расходимость.

Первый признак сравнения. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ с положительными членами, начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ $\left(0 \le U_n \le V_n\right)$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$.

Второй признак сравнения. Если $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ - ряд с положительными членами, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ - ряд со строго положительными членами и если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = l \ne 0$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по признакам сравнения часто используются следующие ряды:

1) натуральный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\ldots+n+\ldots$, расходится;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^n = -1+1-1+\ldots+\left(-1\right)^n+\ldots$, расходится;

3) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, расходится;

4) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a} = \frac{1}{1+a}+\frac{1}{2+a}+\ldots+\frac{1}{n+a}+\ldots$, расходится;

5) обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$, сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \le 1$;

6) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^{\alpha}}=\frac{1}{(1+a)^{\alpha}}+\frac{1}{(2+a)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{(n+a)^{\alpha}}+\ldots$, сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le 1$;

7) ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^{2}+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$ сходится, если $|q|<1$, расходится, если $|q|\ge 1$.

Признак Даламбера. Если для ряда со строго положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ $(U_n>0)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=l$, то при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ ряд расходится (при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым).

Радикальный признак Коши. Если для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ $(U_n\ge 0)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=l$, то при $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ ряд расходится (при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым).

Интегральный признак Коши. Если $f(x)$ при $x\ge a$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$, где $U_n=f(n)$, сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int_a^{\infty}f(x)dx$.

Пример 1

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{9+n^3}$.

Решение

Сравним данный ряд, общий член которого $U_n=\frac{8}{9+n^3}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^3}$, для которого общий член $V_n=\frac{8}{n^3}$. Поскольку

$$\frac{8}{9+n^3}<\frac{8}{n^3}\quad (U_n<V_n,\ n=1,2,3,\ldots)$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^3}=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится (ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ - обобщенный гармонический ряд, где $\alpha=3>1$, сходимость ряда не нарушится, если все его члены умножить на одно и то же число), то на основании первого признака сравнения исходный ряд также сходится.

Пример 2

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{12^n}$.

Решение

Применим признак Даламбера. Общий член ряда $U_n=\frac{n!}{12^n}$, $(n+1)$-й член ряда $U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{12^{n+1}}$.

Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{12^{n+1}}:\frac{n!}{12^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 12^n}{12^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{12}=\infty.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=l=\infty>1$, то данный ряд расходится.

Пример 3

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n^2+4}{12n^2+8}\right)^n$.

Решение

Применим радикальный признак Коши, найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n^2+4}{12n^2+8}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+4}{12n^2+8}=\frac{7}{12}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=l=\frac{7}{12}<1$, то данный ряд сходится.

2.6. Знакочередующиеся ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ называется **знакопеременным**, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|.$$

Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^{n+1} U_n + \ldots$$

где $U_n \geq 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. ряд, у которого любые рядом стоящие члены его имеют противоположные знаки.

Теорема (признак Лейбница). Пусть в знакочередующемся ряде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n$ числовая последовательность $\{U_n\}$ убывает, $U_1 > U_2 > U_3 > \ldots$ и $\lim_{n \to \infty} U_n = 0$. Тогда этот ряд сходится (по крайней мере условно), причем его сумма S положительна и не превосходит первого члена: $0 < S \leq U_1$.

Пример

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[12]{n}}$.

Решение

Так как данный ряд – знакочередующийся, то для решения вопроса о его сходимости можно применить признак Лейбница.

Члены ряда убывают по абсолютной величине

$$1 > \frac{1}{\sqrt[12]{2}} > \frac{1}{\sqrt[12]{3}} > \frac{1}{\sqrt[12]{4}} > \ldots,$$

общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[12]{n}} = 0.$$

Оба условия признака Лейбница выполняются, следовательно, данный ряд сходится.

Чтобы решить вопрос о том, сходится ли ряд абсолютно, составим ряд из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[12]{n}} = 1+\frac{1}{\sqrt[12]{2}}+\frac{1}{\sqrt[12]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[12]{n}}+\ldots.$$

Этот ряд расходится как обобщенный гармонический ряд, в котором $\alpha = \frac{1}{12} < 1$, следовательно, абсолютной сходимости нет, данный ряд сходится условно.

2.7. Область сходимости степенного ряда

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-a\right)^n.$$

где a_n $\left(n=0,1,2,\ldots\right)$ – постоянные величины – коэффициенты степенного ряда, a – число, x – переменная.

Рассматривают, также, степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Структура области сходимости степенного ряда устанавливается теоремой Абеля.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x| < |x_0|$. Если ряд расходится при некотором значении x_0', то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_0'|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует число R, для которого при $|x| < R$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, а при $|x| > R$ – расходится. Такое число R называется **радиусом сходимости степенного ряда** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется такой интервал от $-R$ до R, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится.

При $x = \pm R$ вопрос о сходимости ряда остается открытым и решается дополнительно.

При $R = 0$ область сходимости – точка $x = 0$. При $R = \infty$ область сходимости – вся числовая прямая.

Если в точках $x = \pm R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится, то $(-R; R)$ – область сходимости (одновременно интервал сходимости). Если хотя бы в одной точке $x = \pm R$ ряд сходится, то интервал сходимости и область сходимости не одно и то же.

Если для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$, то **радиус сходимости** $R = \frac{1}{l}$, т.е. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ радиус сходимости находится также, но интервал сходимости симметричен относительно точки $x = a$.

Пример

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{3n} \cdot x^n}{n!}$.

Решение

Найдем радиус сходимости степенного ряда. Так как $a_n = \frac{7^{3n}}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{7^{3n+3}}{(n+1)!}$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7^{3n}}{n!} : \frac{7^{3n+3}}{(n+1)!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{3n} \cdot (n+1)!}{n! \cdot 7^{3n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{7^3} = \infty,$$

следовательно, область сходимости данного степенного ряда $(-\infty; \infty)$.

2.8. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть функция $f\left(x\right)$ бесконечное число раз дифференцируема в окрестности некоторой точки x_0 и пусть ее можно представить в виде суммы степенного ряда, сходящегося в интервале, содержащем точку x_0.

Ряд вида

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+\ldots$$

называется **рядом Тейлора** для функции $f\left(x\right)$, а коэффициенты ряда $a_n=\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}$, $n=0,1,2,\ldots$ называются **коэффициентами Тейлора**.

Говорят, что функция $f\left(x\right)$ разложена в степенной ряд по степеням $\left(x-x_0\right)$ в окрестности точки x_0.

В частности, при $x_0=0$, ряд вида

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{f'\left(0\right)}{1!}x+\frac{f''\left(0\right)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n+\ldots$$

называется **рядом Маклорена**, а коэффициенты $a_n=\dfrac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}$ - **коэффициентами Маклорена**.

Говорят, что функция $f\left(x\right)$ разложена в ряд по степеням x в окрестности точки 0.

Пример

Разложить функцию $f\left(x\right)=6^{2x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=7$.

Решение

Вычислим значения функции $f\left(x\right)$ и ее производных в точке x_0:

$f\left(x\right)=6^{2x}\Big|_{x=7}=6^{14}$,

$f'\left(x\right)=2\ln 6\cdot 6^{2x}\Big|_{x=7}=2\ln 6\cdot 6^{14}$,

$f''\left(x\right)=2^2\ln^2 6\cdot 6^{2x}\Big|_{x=7}=2^2\ln^2 6\cdot 6^{14}$,

$f'''\left(x\right)=2^3\ln^3 6\cdot 6^{2x}\Big|_{x=7}=2^3\ln^3 6\cdot 6^{14}$,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n \ln^n 6 \cdot 6^{2x}\Big|_{x=7} = 2^n \ln^n 6 \cdot 6^{14}, \ldots$$

Составим ряд Тейлора для данной функции:

$$f(x) = 6^{14} + \frac{2\ln 6 \cdot 6^{14}}{1!}(x-7) + \frac{2^2 \ln^2 6 \cdot 6^{14}}{2!}(x-7)^2 + \ldots + \frac{2^n \ln^n 6 \cdot 6^{14}}{n!}(x-7)^n + \ldots$$

или

$$f(x) = 6^{14}\left(1 + \frac{2\ln 6}{1!}(x-7) + \frac{2^2 \ln^2 6}{2!}(x-7)^2 + \ldots + \frac{2^n \ln^n 6}{n!}(x-7)^n + \ldots\right),$$

$$x \in (-\infty; \infty).$$

Черняк Татьяна Анатольевна
Состина Елена Викторовна
Пушкина Вера Павловна

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ