чивания, проводится расчет диаметра вала и условий прочности и жесткости.

Третья задача соответствует разделу изгиб и преследует цель определения реакций в опорах, построения эпюры изгибающих моментов и определение значения осевого момента сопротивления.

Четвертая задача содержит шесть характерных вариантов соединения деталей и в ней дается методика определения основных элементов соединения. Варианты имеют место направленность и могут быть использованы при курсовом и дипломном проектировании.

В каждой задаче даются расчетные схемы, исходные данные по варианту задания и приводится подробная методика расчета реакций опор и построения эпюр внутренних сил, напряжений и перемещений.



# 1. ЗАДАЧА НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

## Варианты заданий

Цель задания: определение внутренних сил в сечениях элементов стержня переменной площади и длины, а также напряжений и перемещений по длине стержня под действием внешних сил, приложенных в различных точках исследуемого стержня.

Исходная обобщенная расчетная схема стержня изображена на рис. 1.1.

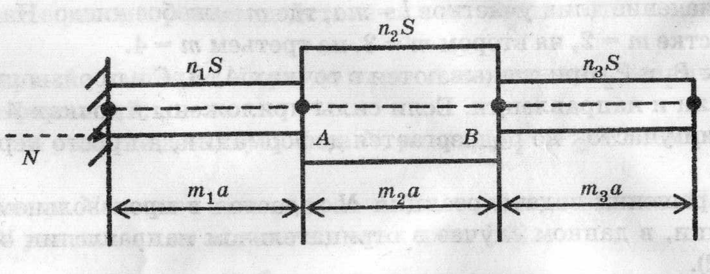



*Рис. 1.1. Обобщённая схема задачи*

Исходные данные для элементов конструкции стержня приведены в табл. 1.1.

*Таблица 1.1*

**Исходные данные для расчета**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$, мм | 10 | 12 | 14 | 16 | 12 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 |
| $S$, мм$^2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $P_1$, $H$ | 100 | 120 | 140 | 150 | 160 | 180 | 200 | 210 | 240 | 260 |
| $P_2$, $H$ | 250 | 200 | 300 | 100 | 200 | 300 | 150 | 400 | 300 | 200 |

| № | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$, мм | 30 | 32 | 34 | 34 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 |
| $S$, мм$^2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $P_1$, $H$ | 280 | 300 | 320 | 340 | 360 | 380 | 400 | 420 | 440 | 460 |
| $P_2$, $H$ | 140 | 200 | 180 | 160 | 120 | 400 | 150 | 280 | 140 | 160 |

Положение приложенных сил $P_1$ и $P_2$ и их направления (точки $A$, $B$, $C$) и значения коэффициентов $n_1$, $n_2$, $n_3$ и $m_1$, $m_2$, $m_3$ задаются в каждом варианте преподавателем.

## Пример решения задачи

В задаче рассматривается единая расчетная схема стержня из трех участков с различными параметрами длины $a$ и площади сечения $S$. Точки приложения сил $P_1$ и $P_2$ и их направления варьируются. Под схемой оставляют свободное место для построения эпюр внутренних сил $N$, напряжений на участке $\sigma$ и перемещений $\Delta l_i$ на соответствующем участке [1–4].

Рассмотрим пример, когда сечение на отдельных участках задаются в виде $S = nS_3$. $S_3$ площадь дана в варианте, $n$ выбирается по смыслу. На первом участке $n = 0{,}2$, на втором $n = 2$, на третьем $n = 1$. Значение длин участков $l = ma$, где $m$ – любое число. На первом участке $m = 2$, на втором $m = 3$, на третьем $m = 4$.

Силы $P_1$ и $P_2$ прикладываются в точках $A$, $B$, $C$ в произвольном сочетании и направлении. Если силы приложены в точках $A$ и $B$, то третий участок не подвергается деформации, а просто перемещается.

При решении задачи реакция $N$ задается в произвольном направлении, в данном случае в отрицательном направлении оси $x$ (рис. 1.2).

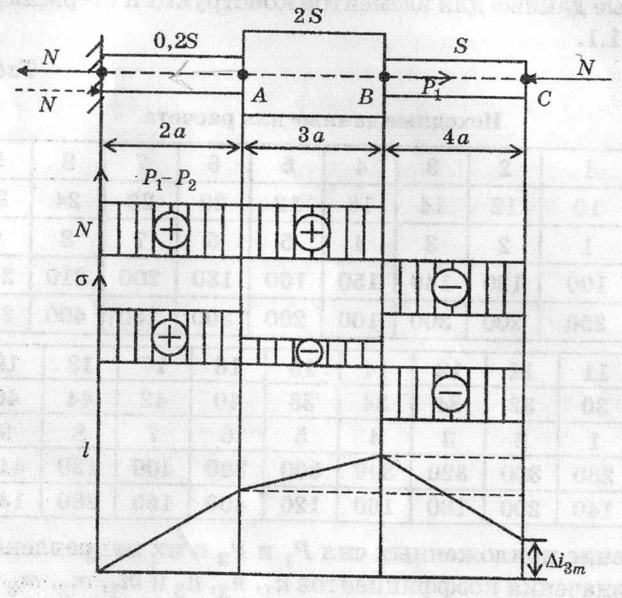



*Рис. 1.2. Графическое представление результатов решения задачи*



Реакция $N$ находится из условия равновесия. Сумма всех сил $x_i$, действующих по оси $x$ равняется нулю

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

В нашем случае количество сил равно трем. Имеем $-N + P_1 - P_2 = 0$. Определяем реакцию $N$. $N = P_1 - P_2$.

Если реакция положительная, $P_1 > P_2$, то ее направление верно, если реакция $N$ отрицательная, $P_2 > P_1$, то необходимо поменять ее направление как показано штриховой линией.

Далее рассматриваем действие сил на каждом отдельном участке.

Первый участок от опоры до точки $A$ может иметь различные виды деформаций:

а) На участке действует сила $N$, равная $P_1 - P_2$. Имеем растяжение;

б) если $N$ меняет свое направление, то имеем сжатие. На эпюре сил $N$ учитываем ее значение и знак (рис. 1.3).

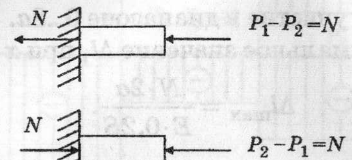


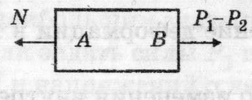

*Рис. 1.3. Виды деформаций в зависимости от знака N:*
*а) деформация растяжения; б) деформация сжатия*

Далее рассматриваем участок от $A$ до $B$ (рис. 1.4).

Поскольку в точке $A$ нет приложенных сил, то по правилу переноса сил вдоль линии ее действия переносим реакцию $N$ в точку $A$. В точке $B$ тоже имеем $N$.

На эпюре сил на первом и втором участке действует одинаковая сила $N = P_1 - P_2$ – положительная. Штрихуется вертикальными линиями.

На третьем участке имеем значение сил (рис. 1.5).



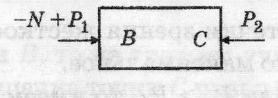




*Рис. 1.4. Деформация растяжения*

*Рис. 1.5. Деформация сжатия*

В точке $B$ действует сумма сил $N$ и $P_1$ с учетом их знаков. На третьем участке имеем сжатие силой $P_2$, знак минус. Напряжение на каждом участке

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}.$$

На первом участке $\sigma_1 = \dfrac{P_1 - P_2}{0{,}2S}$;

– на втором участке $\sigma_2 = \dfrac{P_1 - P_2}{2S}$;

– на третьем участке $\sigma_3 = -\dfrac{P_2}{S}$.

Очевидно, что напряжение на первом участке максимальное.

Далее строим эпюру перемещений.

При задании координаты $x$ вдоль оси стержня деформация

$$\Delta l(x) = \frac{Nx}{EF},$$

где $E$–модуль упругости, для стали-45 – $2{,}15 \cdot 10^5$ Н/мм$^2$. Координата $x$ меняется на первом участке в диапазоне 0...2$a$.

Определяем максимальное значение $\Delta l_1$ при $x = 2a$. Получаем

$$\Delta l_{\max} = \frac{N \cdot 2a}{E \cdot 0{,}2S}.$$

Характер изменения деформации – линейный. Если точка $A$ переместилась на $\Delta l_{1\max}$, то все точки стержня на втором и третьем участке также переместятся на $\Delta l_{1\max}$, что показано на эпюре перемещений штриховой линией, параллельной оси $x$.

Перемещение на втором участке соответственно

$$\Delta l_{2\max} = \Delta l_{1\max} + \frac{N \cdot 3a}{E2S}.$$

Наклон прямой на втором участке меньше, поскольку площадь в 10 раз больше по заданию, а длина увеличивается незначительно.

На третьем участке сила меняет знак

$$\Delta l_{3\max} = \Delta l_{2\max} - \frac{P_2 \cdot 4a}{ES}.$$

С точки зрения жесткости важно значение деформации в точке $B$. Оно максимальное.

Если $P_2 > P_1$, то имеем другой характер изменения внутренних сил $N$.



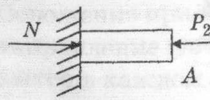



Рис. 1.6. Деформация сжатия

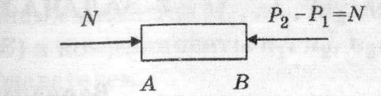



Рис. 1.7. Деформация сжатия

Первый участок – (рис. 1.6).

Второй участок – сжатие разностной силой (рис. 1.7).

Третий участок – сжатие максимальной силой $P_2$ (рис. 1.8).

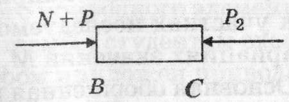



Рис. 1.8. Деформация сжатия

Из проведенного анализа внутренних усилий $N$ по участкам следует, что значения $N$, σ и $\Delta l$ отрицательны (рис. 1.9).

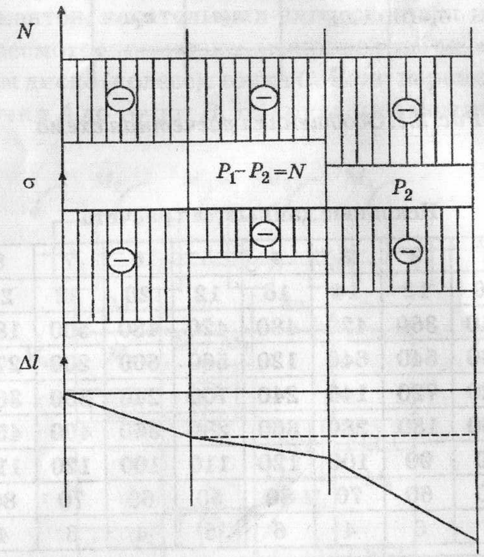



Рис. 1.9. Графическое представление результатов решения задач

Напряжение на первом участке большое ввиду меньшей величины площади. Наклон на первом участке определяется в основном малым значением площади. На третьем участке наклон определяется наибольшим значением силы $P_2$.

Если задать силы $P_1$ и $P_2$ в точках $A$ и $B$, то на третьем участке сил $N$ и напряжений σ не будет, а перемещение точки $C$ равно перемещению точки $B$.



2250

## 2. ЗАДАЧА НА КРУЧЕНИЕ

### Варианты заданий

Цель задания: построение эпюр крутящих моментов по сечениям вала, касательных напряжений и углов закручивания на отдельных участках исследуемого при вариации приводного момента $M_0$ и вариациях значений $M_i$ на отдельных участках вала.

Основная обобщенная расчетная схема представлена на рис. 2.1.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 2.1.

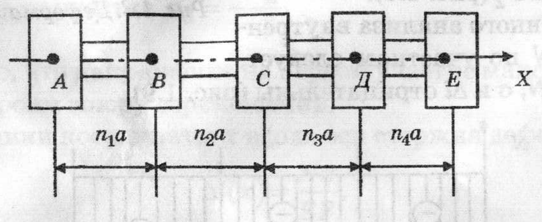



*Рис. 2.1. Обобщенная расчетная схема*

*Таблица 2.1*

**Исходные данные для расчета**

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$, мм | 10 | 12 | 14 | 16 | 12 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 |
| $M_1$, Н·мм | 240 | 360 | 420 | 480 | 420 | 480 | 500 | 180 | 600 | 450 |
| $M_2$,Н·мм | 480 | 540 | 640 | 120 | 560 | 600 | 200 | 270 | 500 | 540 |
| $M_3$, Н·мм | 720 | 720 | 140 | 240 | 700 | 240 | 300 | 360 | 400 | 270 |
| $M_4$, Н·мм | 960 | 180 | 280 | 360 | 280 | 360 | 400 | 450 | 300 | 360 |
| [σ], МПа | 80 | 90 | 100 | 120 | 110 | 100 | 120 | 110 | 80 | 90 |
| [τ], МПа | 50 | 60 | 70 | 80 | 50 | 60 | 70 | 80 | 50 | 60 |
| [φ], угл. мин | 5 | 6 | 4 | 6 | 5 | 4 | 6 | 4 | 3 | 5 |

| № | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$, мм | 30 | 32 | 34 | 34 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 |
| $M_1$, Н·мм | 240 | 280 | 400 | 420 | 450 | 320 | 360 | 380 | 400 | 420 |
| $M_2$, Н·мм | 320 | 350 | 480 | 490 | 260 | 390 | 420 | 440 | 250 | 320 |
| $M_3$, Н·мм | 400 | 420 | 560 | 280 | 320 | 450 | 480 | 270 | 300 | 330 |
| $M_4$, Н·мм | 480 | 210 | 320 | 350 | 390 | 520 | 400 | 330 | 350 | 340 |
| [σ], МПа | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 150 | 140 | 150 | 160 |
| [τ], МПа | 90 | 70 | 100 | 80 | 70 | 100 | 80 | 60 | 70 | 80 |
| [φ], угл. мин | 3 | 5 | 4 | 6 | 5 | 4 | 3 | 5 | 6 | 4 |



Положение приложенных крутящих моментов $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ и их направление (точки $A$, $B$, $C$, $Д$, $E$) и коэффициенты $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ задаются в каждом варианте преподавателем.

### Пример решения задачи

Дается единая расчетная схема из одного приводного элемента и четырех потребителей (рис. 2.2). В предлагаемых студентам схемах расчета варьируется номер штива, в котором приложен приводной момента $M_0$, равный сумме моментов потребителей.

$$M_0 = \sum_{i=1}^{4} M_i .$$

Под схемой оставляется свободное место для построения эпюр крутящих моментов, касательных напряжений τ и углов закручивания φ. На рассмотренном примере приводной момент $M_0$ расположен на среднем диске (колесе), точка $C$. Если перемещаться по координате $x$ от точки $A$ до точки $B$, то крутящий момент на участке ра-

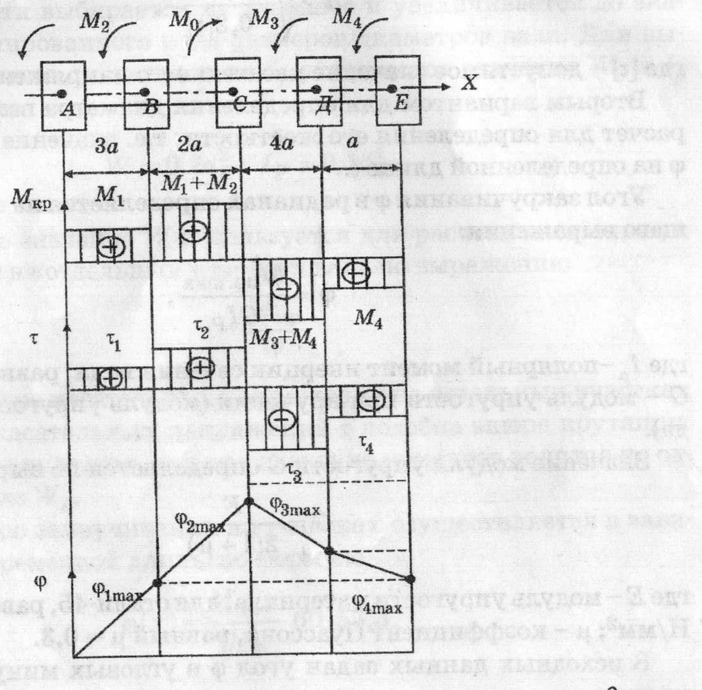



*Рис. 2.2. Графическое представление результатов решения задач*

вен моменту $M_1$ и направлен против часовой стрелки, т.е. положительный. В точке $B$ добавляется момент $M_2$ и сумма моментов $M_1$ и $M_2$ действует до точки $C$. В точке $C$ добавляется суммарный момент $M_0$ и изменяет знак момента на участке $СД$. На участке $СД$ крутящий момент равен $M_0 - (M_1 + M_2) = M_3 + M_4$. В точке $Д$ действие момента $M_3$ приращается и остается только момент $M_4$.

На основе эпюры крутящихся моментов определяется максимальное значение момента на соответствующем участке [1, 4].

На основе полученного значения момента из условия прочности определяется диаметр вала [2].

Допустимое напряжение $\tau$ определяется из выражения

$$\tau = \frac{M_{\text{пр. max}}}{W_p},$$

где $W_p$ – момент сопротивления сечения вала диаметром $d_B$ при кручении, равный $W_p = 0{,}2d^3$.

Из условия прочности диаметр вала равен

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{пр.max}}}{0{,}2[\tau]}},$$

где $[\tau]$ – допустимое значение касательного напряжения.

Вторым вариантом для определения диаметра вала $d_B$ является расчет для определения его жесткости, т.е. значение угла поворота $\varphi$ на определенной длине $l$.

Угол закручивания $\varphi$ в радианах определяется на основе следующего выражения:

$$\varphi = \frac{M_{\text{пр.max}}}{GI_P},$$

где $I_p$ –полярный момент инерции сечения вала, равный $I_P = 0{,}1d_B^4$; $G$ – модуль упругости при кручении (модуль упругости второго рода).

Значение модуля упругости $G$ определяется по выражению

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

где $E$ – модуль упругости материала, для стали-45, равен $E = 2{,}15 \cdot 10^5$ Н/мм$^2$; $\mu$ – коэффициент Пуассона, равный $\mu = 0{,}3$.

В исходных данных задан угол $\varphi$ в угловых минутах на 10 мм длины.



Введем относительный угол поворота на единицу длины, равный

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{l}.$$

Тогда $\left[\varphi^* = \frac{M_{\text{пр}}}{GI_P}\right]$ в радианах, а диаметр вала $d_B$ определяется по выражению

$$d_B \geq \sqrt[4]{\frac{M_{\text{пр.max}}}{G \cdot 0{,}1\left[\varphi^*\right]}}.$$

Определение $[\varphi^*]$ осуществляется следующим образом: $\varphi$ задано в угловых минутах, а $l = 10$ мм, а $\varphi^*$ равно

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{10 \cdot 60 \cdot 57{,}3},\ \frac{\text{рад}}{\text{мм}}.$$

Значение $\varphi^*$ получается в рад/мм и подставляется в выражение для расчета диаметра вала из условия жесткости.

Из полученных значений диаметра вала $d_B$ по условиям прочности и жесткости выбирается наибольшее и увеличивается до значения из нормированного ряда размеров диаметров вала. Для выбранного значения диаметра вала $d_B$ уточняются значения $W_P$ и $I_p$ по выражениям

$$W = 0{,}2d_B^2,\ \ I_P = 0{,}1d_B^4.$$

Полученное значение $W$ используется для расчета касательных напряжений $\tau$ на отдельных участках вала по выражению

$$\tau = \frac{M_{\text{пр}}}{W}$$

и строится эпюра касательных напряжений на отдельных участках вала. Эпюра касательных напряжений $\tau$ подобна эпюре крутящих моментов $M$ на участках, так как значение моментов делится на одно и тоже число $W_P$.

Расчет углов закручивания на участках осуществляется в зависимости от переменной длины по формуле

$$\varphi(x) = \frac{M_{\text{пр}}x}{GI_P} \cdot 60 \cdot 57{,}3.$$

На первом участке $x$ меняется в диапазоне $x = 0...3a$ и представляет собой линейную зависимость. Максимальное значение угла закручивания

$$\varphi_{1\max} = \frac{M_{\text{пр}1} \cdot 3a}{GI_P} \cdot 60 \cdot 57,3.$$

На эпюре углов закручивания получаем прямую линию от нуля до $\varphi_{1\max}$. На такой же угол поворачивается вал от точки $B$ до точки $E$. На втором участке угол закручивания

$$\varphi_{2\max} = \varphi_{1\max} + \frac{(M_1 + M_2) \cdot 2a}{G \cdot I_P} \cdot 60 \cdot 57.$$

На такой же угол поворачивается вал на участке $CE$. На третьем участке момент меняет знак и уже будет закручиваться в обратную сторону, т.е. со знаком минус. Выражение для угла закручивания имеет вид

$$\varphi_{3\max} = \varphi_{2\max} - \frac{(M_3 + M_4)4a}{G \cdot I_P} \cdot 60 \cdot 57,3.$$

На тот же угол повернется вал на участке $ДЕ$. На четвертом участке угол закручивания

$$\varphi_{4\max} = \varphi_{3\max} - \frac{M_4 a}{GI_P} \cdot 60 \cdot 57,3.$$

Положение начального сечения в точке $A$ отличается от поперечного конечного сечения в точке $E$ на угол $\varphi_{4\max}$. Наибольший угол поворота сечения вала будет в точке $C$, где приложен максимальный момент $M_0$. Поэтому жесткость вала $C$ определяется по выражению

$$C = \frac{M_{\text{пр.max}}}{\varphi_{2\max}}.$$

Построение эпюр $M_{\text{кр}}$, $\tau$, $\varphi$ дает полное представление об особенностях работы исследуемого вала в различных сечениях в зависимости от координаты $x$. Если расчеты диаметра вала производить по отдельным участкам, то получится ступенчатый вал для заданных условий прочности $[\tau]$ и жесткости $[\varphi^*]$.