Расчётно-графическое задание
«Кривые 2-го порядка»

1.1.Методические указания по выполнению и оформлению расчётно-графического задания (РГЗ)

Общие указания. Выполнение заданий РГЗ проходит в том порядке, в котором они представлены, и каждое из заданий является необходимым для выполнения работы в целом.

Отчёт о выполнении РГЗ должен содержать несколько пунктов:

-формулировка общего задания РГЗ с указанием значений параметров, необходимых для выполнения работы в целом;

-последовательное краткое описание полученных результатов при выполнении соответствующих заданий;

-общий вывод о проделанной работе с формулировкой основных результатов, отражающих выполнение сформулированного общего задания РГЗ;

-список литературы и ссылки на Интернет-ресурсы, которые были использованы при выполнении РГЗ.

Требования к оформлению отчёта о выполнении РГЗ:

- отчёт оформляется в письменной форме;
- графики чертятся «от руки»;
- все рисунки последовательно нумеруются и подписываются;
- титульный лист работы оформляется по образцу, представленному в Приложении;
- оформленный отчёт сдаётся на проверку преподавателю в соответствии с графиком проверки.

1.2. Замечание
(о графическом редакторе DESMOS Graphing Calculator*)*

Выбор Desmos Graphing Calculator обусловлен несколькими причинами:

- доступность: DESMOS Graphing Calculator - это облачный сервис, в основе которого лежит технология HTML5. Данная программа работает в режиме on-line на любом компьютере, планшете или смартфоне. После авторизации можно сохранять построенные графики, апплеты и делиться ими в виде ссылки или картинки;

- простой интерфейс;
- работа с функциями, заданными:
  - ✓ аналитически (в декартовой и полярной системах координат);
  - ✓ таблично;
- возможность создания графических анимаций (динамических моделей кривых), анимированных цветных рисунков;
- большое количество встроенных математических функций и операций:
  - ✓ тригонометрические функции;
  - ✓ статистические функции;
  - ✓ основные математические операции.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Эллипс: определение, основные характеристики

Определение. ***Эллипс*** - *это геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.*

Для вывода канонического уравнения эллипса введём прямоугольную систему координат *Oxy* так, что ось *Ox* проходит через фокусы F_1 и F_2, симметрично относительно начала координат: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$; $M(x,y)$ - произвольная точка эллипса. Отрезки $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ называются ***фокальными радиусами*** точки $M(x,y)$. Тогда, согласно определению эллипса, получим:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a\ (2a > 2c).$$

Подставляя выражения для соответствующих фокальных радиусов точек F_1 и F_2, получим:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

Возведем равенство в квадрат и раскроем при этом квадрат суммы и разности. Получим:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2.$$

Отсюда

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4xc$$

или

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc.$$

Еще раз возведем в квадрат равенство:

$$\underline{\underline{a^2x^2}}+2a^2xc+\underline{a^2c^2}+a^2y^2=\underline{a^4}+2a^2xc+\underline{\underline{x^2c^2}}$$

и получим

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right),\;\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Так как $a>c>0$, то, введя новый параметр $b^2=a^2-c^2$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое называется ***каноническим уравнением эллипса***. График эллипса представлен на рис.1.

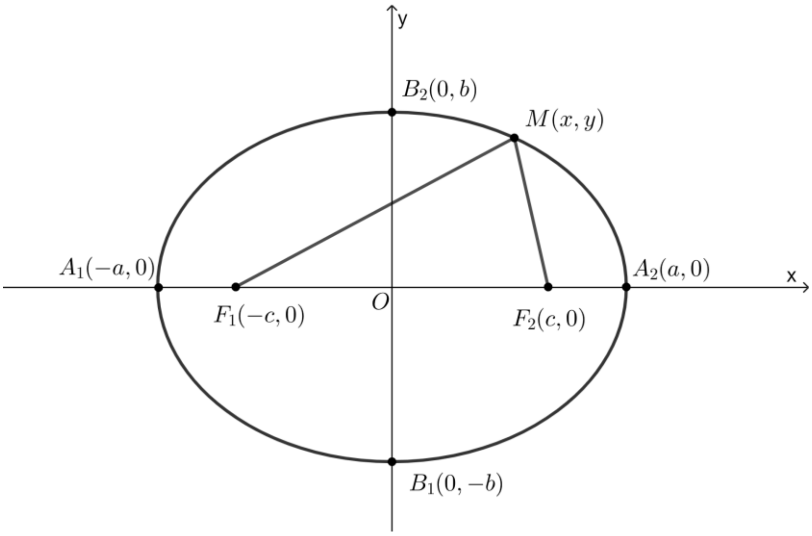

Рис.1

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются ***вершинами эллипса***, число a - ***большая полуось эллипса,*** число b - ***малая полуось эллипса,*** оси Ox и Oy называются ***большой и малой осями эллипса*** соответственно. Точка $O(0,0)$ - центр эллипса (очевидно, по построению и уравнению кривой, что эллипс - кривая, симметричная относительно своего центра).

Замечание 1.

1. Положение фокусов эллипса можно установить без вычисления фокусного расстояния c. Для этого необходимо циркулем, установленным в вершине $B_2(0,b)$, провести дугу радиуса a до пересечения с осью Ox в точках F_1 и F_2, т.к. $a^2 = c^2 + b^2$ - см. рис.2 и https://www.desmos.com/calculator/gvlt5opo9l.

2. Эллипс можно построить с помощью карандаша и нити [6].

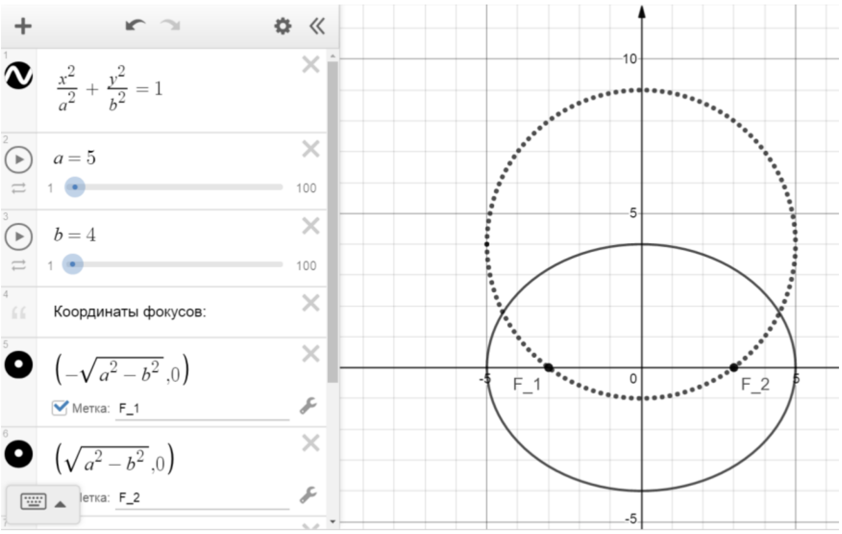

Рис.2.

Введём новый параметр ε - ***эксцентриситет эллипса:***

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

и рассмотрим прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}$, которые называются ***директрисами эллипса*** и всегда находятся вне него - см. рис.3.

Замечание 2. Величина ε характеризует отношение длин полуосей эллипса $\frac{b}{a}$, т.е. степень «сплюснутости» эллипса. Например, для окружности $c = 0$, то есть $\varepsilon = 0$. Для эллипсов, близких по форме к окружности, отношение $\frac{b}{a}$ близко к единице, а ε - малая величина.

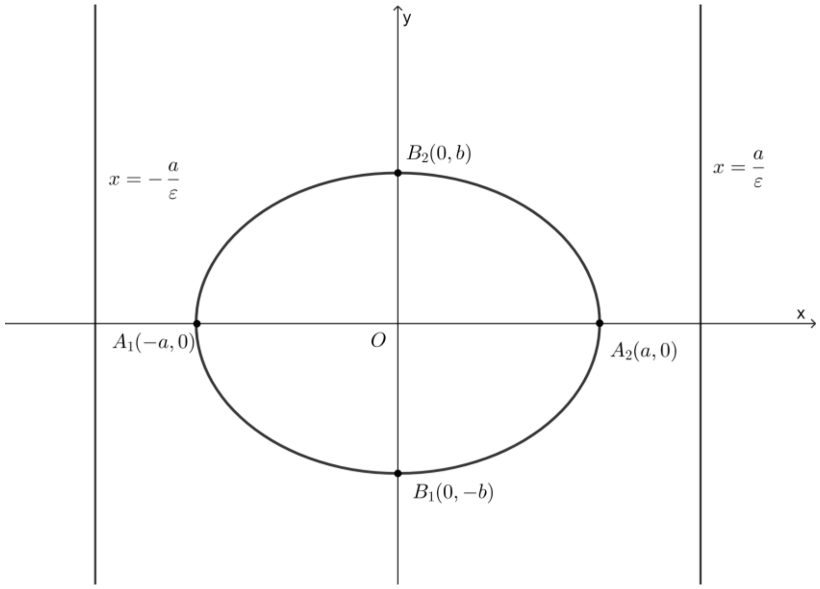

Рис.3.

Фокальные радиусы точки $M(x,y)$ находятся по формулам [1, с.66-67]:

$$\left|\overrightarrow{MF_1}\right| = a + \varepsilon x, \quad \left|\overrightarrow{MF_2}\right| = a - \varepsilon x.$$

Рассмотрим отношение расстояния от произвольной точки $M(x,y)$ до фокуса F_2 к расстоянию до ближайшей директрисы $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ - см. рис.4.

$$\frac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \frac{a - \varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{\varepsilon(a - \varepsilon x)}{a - \varepsilon x} = \varepsilon\ .$$

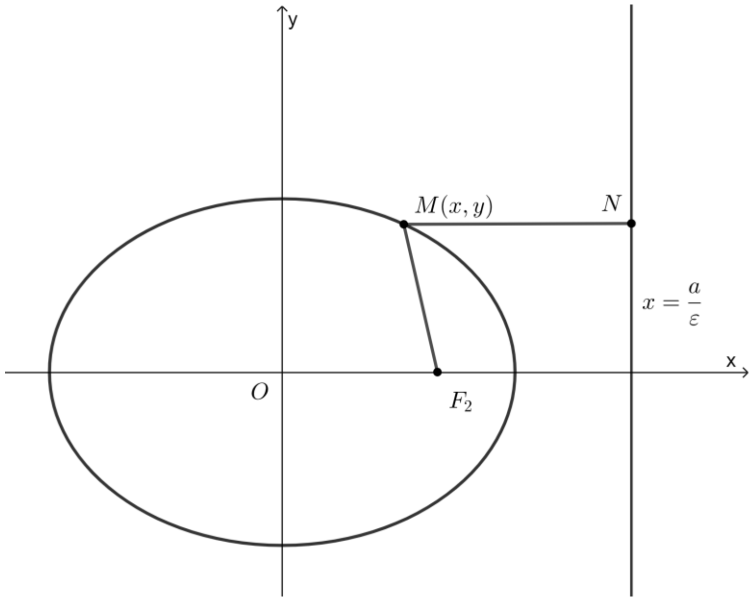

Рис.4.

Это отношение позволяет дать ещё одно **определение эллипса**:

Эллипс - *это геометрическое место точек плоскости, для которых отношение фокального расстояния к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* $\varepsilon(0 < \varepsilon < 1)$ - *эксцентриситету эллипса.*

Замечание 3. Эллипс также может быть задан параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

2.2. Гипербола: определение, основные характеристики

Определение. ***Гипербола*** - *это геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Аналогично эллипсу, введём прямоугольную систему координат, в которой фокусы F_1 и F_2 имеют координаты: $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Отрезки $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ и $\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ называются ***фокальными радиусами*** точки $M(x,y)$. Возьмём некоторое число $a>0$. Тогда, согласно определению гиперболы, получим:

$$\left|\left|\overrightarrow{MF_1}\right|-\left|\overrightarrow{MF_2}\right|\right|=2a\ \ (a<c).$$

Подставляя выражения для соответствующих фокальных радиусов точек F_1 и F_2 получим:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Сделав ряд преобразований (аналогично выводу канонического уравнения эллипса, см.[1,с.70-71]) и введя новый параметр $b^2=c^2-a^2$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

которое называется ***каноническим уравнением гиперболы***.

График гиперболы, заданной этим уравнением, представлен на рис.5. Точки A_1,A_2 и B_1,B_2 называются ***действительными и мнимыми вершинами гиперболы*** соответственно; параметр a - ***действительная полуось гиперболы,*** параметр b - ***мнимая полуось гиперболы;*** оси Ox и Oy называются ***действительной и мнимой осями гиперболы,*** соответственно. Точка $O(0,0)$ - центр гиперболы (очевидно, по построению и уравнению кривой, что гипербола - кривая, симметричная относительно своего центра) и имеет две симметричные относительно оси Oy ветви.

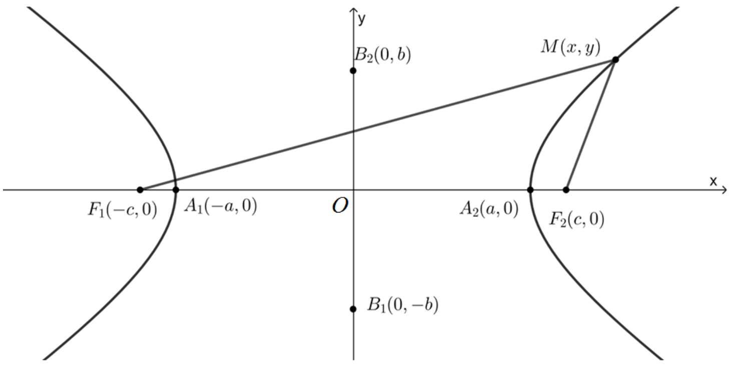

Рис.5.

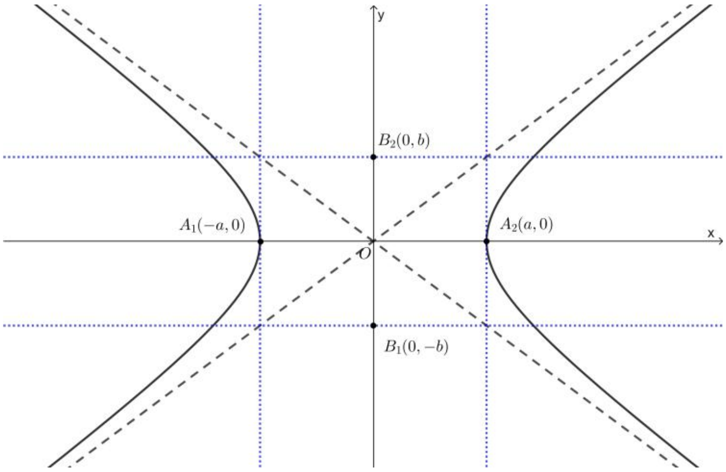

Рис.6.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ называются ***асимптотами гиперболы*** и являются диагоналями прямоугольника, образованного пересечением прямых $x = a, x = -a, y = b, y = -b$ - см. рис.6.

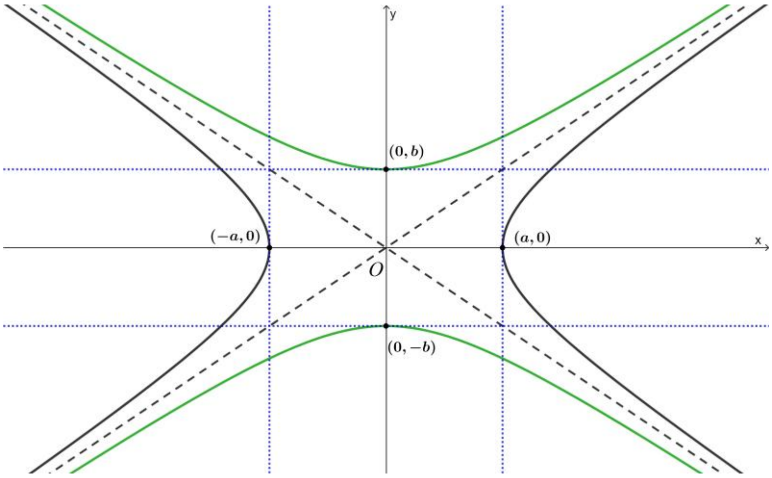

Рис.7.

Аналогично эллипсу, введём параметр ε - ***эксцентриситет гиперболы:***

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

и прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}$, называемые ***директрисами гиперболы,*** которые <u>всегда</u> находятся между её действительными вершинами - см. рис.8.

Рассмотрим отношение $\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{|\overrightarrow{MN}|}$, где $|\overrightarrow{MF_2}|$ - фокальный радиус точки $M(x, y)$, лежащей в правой полуплоскости (или расстояние от произвольной точки гиперболы $M(x, y)$ до правого фокуса гиперболы F_2), $|\overrightarrow{MN}|$ - расстояние от точки $M(x, y)$ до ближайшей директрисы - см. рис.9.

$$\frac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\frac{|a-\varepsilon x|}{x-\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{|a-\varepsilon x|}{\varepsilon x-a}=\varepsilon, \qquad \frac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\varepsilon.$$

Это соотношение позволяет дать ещё одно ***определение гиперболы*** (аналогично эллипсу):

Гипербола *– это геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* $\varepsilon(\varepsilon>1)$ *- эксцентриситету гиперболы.*

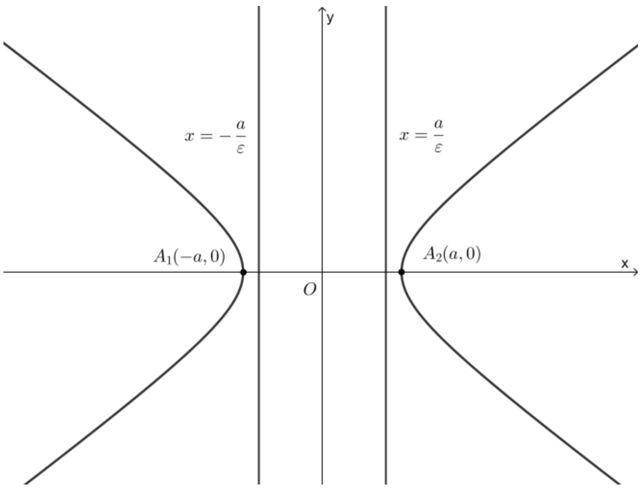

Рис.8.

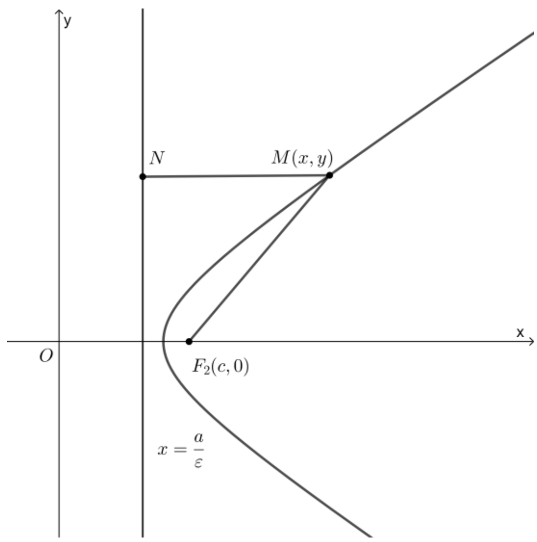

Рис.9.

Замечание. Гипербола может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \pm a \cdot \operatorname{ch} t = \pm a \cdot \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t = b \cdot \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}, t \in R.$$

2.3. Парабола: определение, основные характеристики

Определение. ***Парабола*** *– это геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой* ***фокусом****, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, не проходящей через фокус и называемой* ***директрисой.***

Расстояние от фокуса параболы до её директрисы называется ***параметром параболы*** $p(p > 0)$ **.**

Аналогично выводу уравнений эллипса и гиперболы вводим прямоугольную систему координат, в которой фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, уравнение директрисы: $x=-\frac{p}{2}$ (рис.10). Тогда, согласно определению параболы: $\left|\overrightarrow{MF}\right|=\left|\overrightarrow{MN}\right|$,

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Откуда, сделав ряд преобразований [1, с.76-77], получаем уравнение

$$y^2=2px,$$

которое называется ***каноническим уравнение параболы.***

Очевидно (по построению кривой), что парабола, заданная уравнением $y^2=2px$ симметрична относительно оси Ox.

Рассмотрим отношение $\frac{\left|\overrightarrow{MF}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$, где $\left|\overrightarrow{MF}\right|$ - фокальный радиус точки $M(x,y)$, $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ - расстояние от точки $M(x,y)$ до директрисы параболы - см. рис.10.

$$\frac{\left|\overrightarrow{MF}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}=1.$$

Это соотношение позволяет дать ещё одно ***определение параболы*** (аналогично эллипсу и гиперболе):

***Парабола** - это геометрическое место точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* $\varepsilon=1$ *- эксцентриситету параболы* .

Замечание 1. Парабола может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, \ t \in R.$$

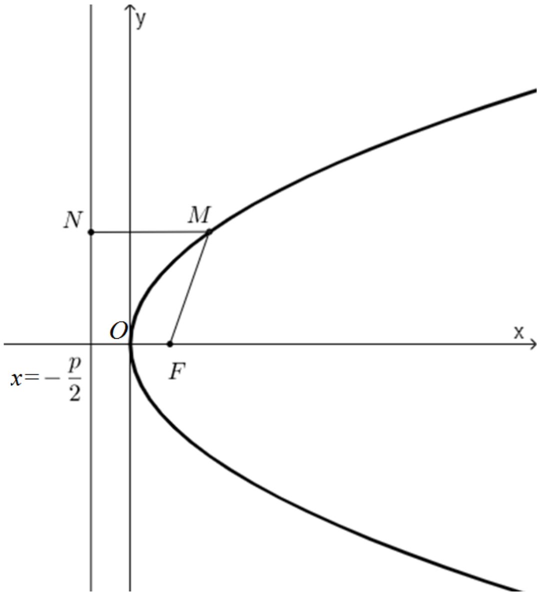

Рис.10.

Замечание 2. Параболу можно построить с помощью карандаша, линейки и угольника [7], а также с помощью специального прибора - параболографа Кавальери [8].

Замечание 3. Анимированное представление эллипса, гиперболы и параболы как конических сечений можно увидеть в [9]; оптические свойства этих кривых представлены в [10], [11].

2.4. Общее уравнение кривой 2-го порядка. Преобразование координат на плоскости

Общим уравнением кривой 2-го порядка называется уравнение вида $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, если хотя бы один из коэффициентов *A, B, C* отличен от нуля.

При определённом соотношении коэффициентов данное уравнение задает: эллипс, гиперболу, параболу, пару пересекающихся прямых, одну прямую, точку или не задаёт ни одного из геометрических объектов.

Преобразование координат на плоскости - это переход от одной системы координат к другой. Целью этого преобразования является переход к такой системе координат, в которой уравнение заданной линии становится каноническим.

Формулы преобразования координат при параллельном переносе координатных осей в точку $O'(x_0;y_0)$:

$$\begin{cases} x = x' + x_0; \\ y = y' + y_0; \end{cases} \qquad (1)$$

где *x, y* – координаты точки M в системе xOy; x', y' – ее координаты точки M в системе $x'O'y'$; x_0, y_0 – координаты нового начала координат O' в системе координат xOy (рис.11).

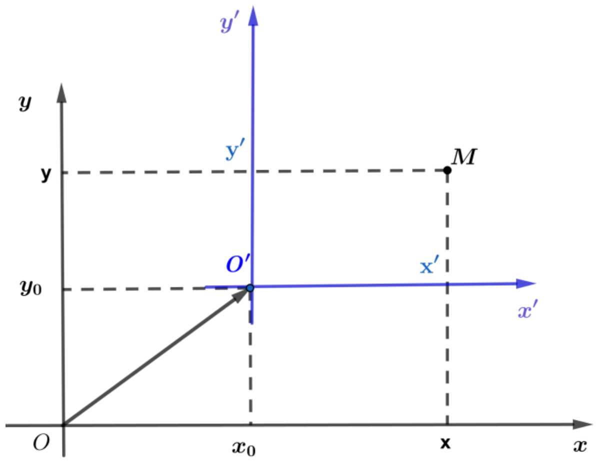

Рис.11

Формулы преобразования координат при повороте координатных осей на угол φ

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi; \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi; \end{cases} \qquad (2)$$

где φ – угол поворота осей; x, y – координаты точки M в исходной системе координат xOy; x', y' – координаты той же точки M в новой системе $x'Oy'$ (рис.12). Если в уравнении $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ коэффициент $B=0$, то для приведения такого уравнения к каноническому виду достаточно параллельного переноса осей координат. Если $B\neq 0$, то для этого необходимо сначала совершить поворот осей на угол φ, выбрав φ таким образом, чтобы в новой системе координат $x'Oy'$ уравнение кривой не содержало произведения $x'y'$.

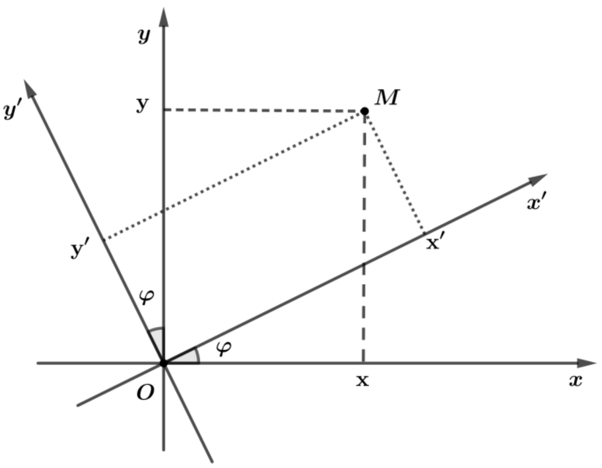

Рис.12

Пример . Привести к каноническому виду уравнения линий второго порядка и построить их графики:

1. $3x+2y^2+4y-4=0$.
2. $4x^2+9y^2-16x-18y+16=0$.
3. $6x^2-5y^2+30y+24x-21=0$.
4. $y=-1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$.
5. $y=1-\dfrac{4}{3}\sqrt{-x^2-6x}$.
6. $5x^2+4xy+8y^2-52x-64y+164=0$

Решение. 1. Преобразуем уравнение $3x+2y^2+4y-4=0$, выделив полный квадрат относительно y:

$$3x+2\left(y^2+2y\right)-4=0 \Rightarrow 3x+2\left(y^2+2y+1\right)-2-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(y+1\right)^2=6-3x \Rightarrow \left(y+1\right)^2=-\frac{3}{2}\left(x-2\right)$$ - это уравнение параболы.

Сделаем параллельный перенос: $x=x'+2$; $y=y'-1$. Тогда начало координат $O'(0;0)$ системы $x'Oy'$ в системе xOy будет иметь координаты $O'(2;-1)$, а уравнение параболы примет вид $(y')^2=-1{,}5x'$ (рис.13). Вершина параболы – в начале системы координат $x'O'y'$, ось симметрии - $O'x'$.

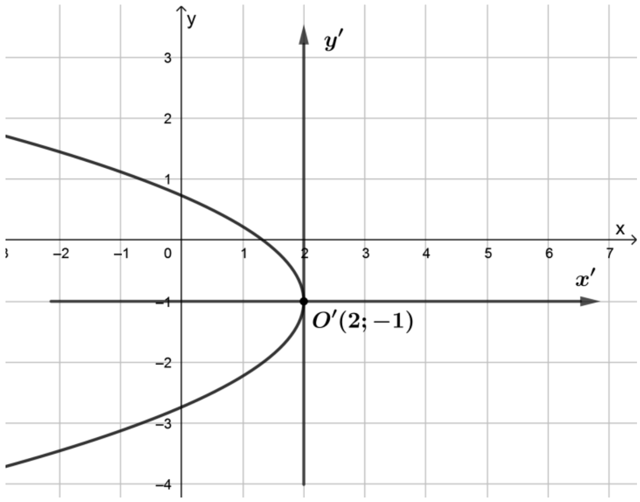

Рис.13

2. Преобразуем уравнение $4x^2+9y^2-16x-18y+16=0$, выделив полные квадраты относительно x и y:

$$4(x^2-4x+4)-16+9(y^2-2y+1)-9+16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1 -$$

это уравнение задаёт эллипс.

Выполним параллельный перенос осей координат по формулам $x = x' + 2$; $y = y' + 1$.

Начало системы координат $x'O'y'$ в системе xOy будет иметь координаты $O'(2;1)$, а уравнение эллипса в ней примет вид

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1.$$

Точки пересечения эллипса с осями координат $O'x'$ и $O'y'$: $\left(-\frac{3}{2};0\right), \left(\frac{3}{2};0\right), (0;-1), (0;1)$ (рис.14).

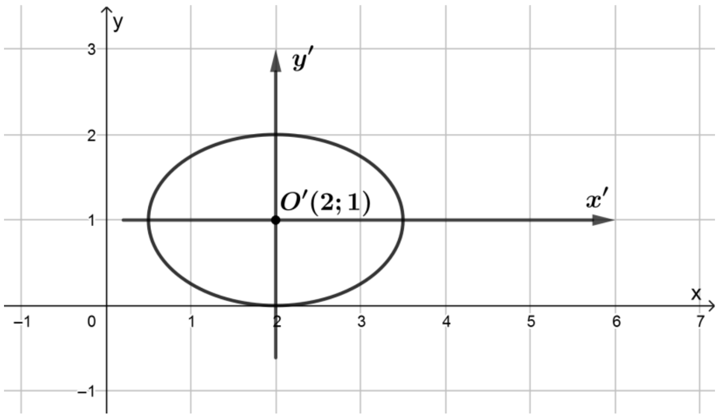

Рис.14

3. Преобразуем уравнение $6x^2-5y^2+30y+24x-21=0$, выделив полные квадраты относительно x и y:

$$6(x^2+4x+4-4)-5(y^2-6y+9-9)-21=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x+2)^2-24-5(y-3)^2+45-21=0\Rightarrow$$

$$6(x+2)^2-5(y-3)^2=0.$$

Выполнив преобразование координат по формулам $x=x'-2$; $y=y'+3$, получим пару пересекающихся прямых

$y'=\pm\sqrt{\dfrac{6}{5}}x'$.Прямые проходят через начало координат системы $x'O'y$ (рис.15); точка O' в исходной системе xOy имеет координаты $(-2;3)$.

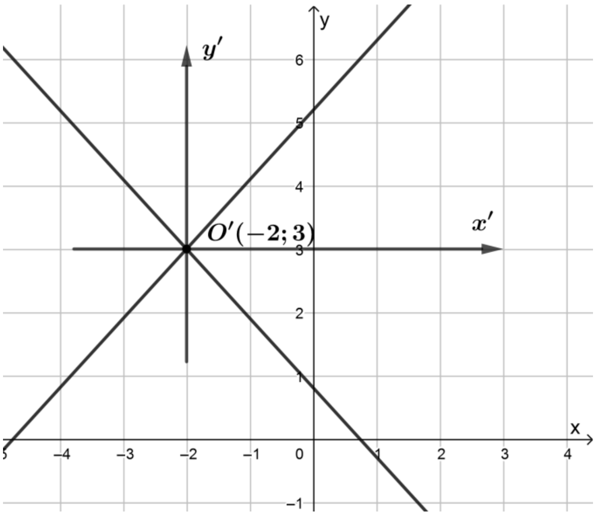

Рис.15

4. Найдем область определения и изменения функции $y=-1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$:

$$\begin{cases} x^2-4x-5\ge 0\,; \\ \quad y+1\ge 0\,; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1]\cup[5;\infty)\,; \\ \quad y\in[-1;+\infty). \end{cases}$$

Возведем уравнение $y+1=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$ в квадрат и выделим полный квадрат относительно *x*:

$$(y+1)^2=\frac{4}{9}\left((x-2)^2-9\right)\Rightarrow\ (y+1)^2-\frac{4}{9}(x-2)^2=-4\Rightarrow$$

$\Rightarrow\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$ - это уравнение задает гиперболу.

Преобразуем систему координат по формулам $x=x'+2$; $y=y'-1$. Начало координат новой системы $x'O'y'$ в системе xOy имеет координаты $O'(2;-1)$. Уравнение гиперболы в системе $x'O'y'$ имеет вид: $\frac{(x')^2}{9}-\frac{(y')^2}{4}=1$.

Точки пересечения с осью абсцисс $O'x'$**:** $(-3;0)$, $(3;0)$, оси ординат гипербола не пересекает; уравнения асимптот $y'=\pm\frac{2}{3}x'$ (в исходной системе координат уравнения асимптот: $y+1=\pm\frac{2}{3}(x-2)$ с учетом формул перехода от новой системы координат к исходной). Так как $y'=y+1\ge 0$, заданному уравнению отвечает та часть гиперболы, которая расположена в верхней полуплоскости системы $x'O'y'$ (рис.16).

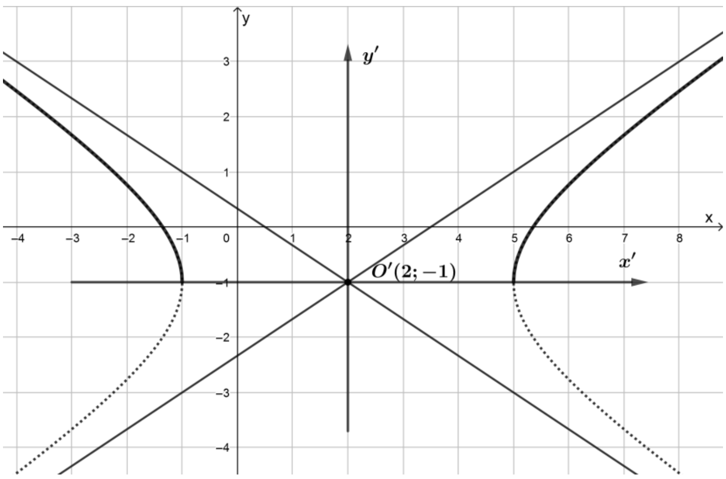

Рис.16

5. Найдем область определения и область значений функции $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-x^2 - 6x}$:

$$\begin{cases} y - 1 \le 0 \ \left(-\sqrt{a} \le 0 \ \ \forall a \ge 0\right); \\ -6x - x^2 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 1; \\ x(x+6) \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-\infty; 1]; \\ x \in [-6;\ 0]. \end{cases}$$

Возведем уравнение $y - 1 = -\frac{4}{3}\sqrt{-x^2 - 6x}$ в квадрат и выделим полные квадраты:

$$(y-1)^2 + \frac{16}{9}(x^2 + 6x + 9 - 9) = 0; \quad \frac{16}{9}(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16;$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$ - это уравнение задаёт эллипс.

Выполнив преобразование координат по формулам $x = x' - 3$; $y = y' + 1$, в новой системе координат $x'O'y'$ уравнение эллипса:

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{16} = 1.$$

В исходной системе координат начало новой системы координат $x'O'y'$ расположено в точке $O'(-3; 1)$. Построим кривую в системе координат $x'O'y'$: точки пересечения с осями $B_1(0; -4)$, $B_2(0; 4)$, $C_1(-3; 0)$, $C_2(3; 0)$. С учетом области изменения заданной функции $(y' = y - 1 \le 0)$ ее графиком является та дуга эллипса (рис. 17) , которая лежит в нижней полуплоскости системы $x'O'y'$.

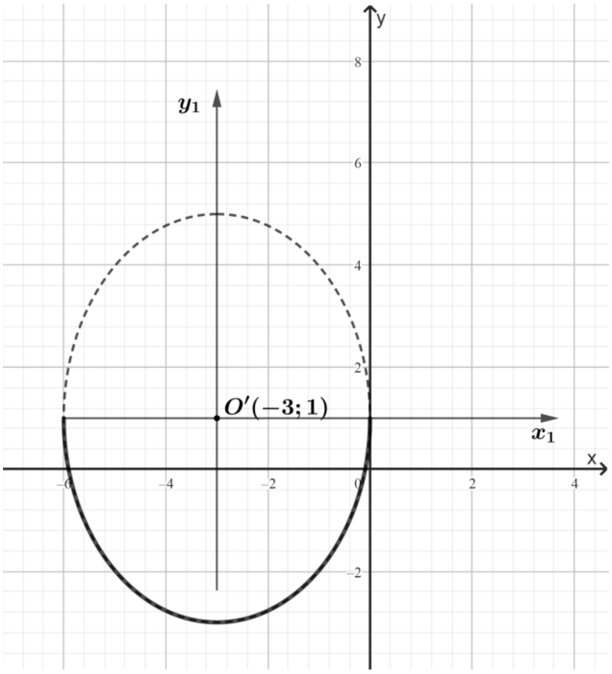

Рис.17

6. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0$.

Выполняем поворот координатных осей по формулам:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y' \\ y = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y' \end{cases}.$$

Подставив выражения $x = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y'$ и $y = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y'$ в уравнение кривой $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0$, получим:

$$5(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y')^2 + 4(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y')(\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y') +$$
$$+ 8(\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y')^2 -$$
$$- 52(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y') - 64(\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y') + 164 = 0,$$

откуда, приравнивая коэффициент при $x' \cdot y'$ к нулю, находим:

$$(\mathrm{tg}\alpha)_1 = 2 \text{ и } (\mathrm{tg}\alpha)_2 = -\frac{1}{2}.$$

Выберем угол, который осуществляет поворот координатных осей в положительном направлении: $(\mathrm{tg}\alpha) = 2$, $\alpha \approx 63.64^0$.

Зная значение $(\mathrm{tg}\alpha) = 2$, находим $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x' - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x' + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y' \end{cases}$ и, решая систему относительно переменных x', y' получаем: $\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot y \\ y' = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y \end{cases}$, то есть уравнения координатных осей в новой СК (повёрнутой относительно исходной Oxy) в системе Oxy будут иметь уравнения:

$Ox' : -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y = 0$, $Oy' : \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot y = 0$, - см. https://www.desmos.com/calculator/11ajmyv0mu и Рис.18.

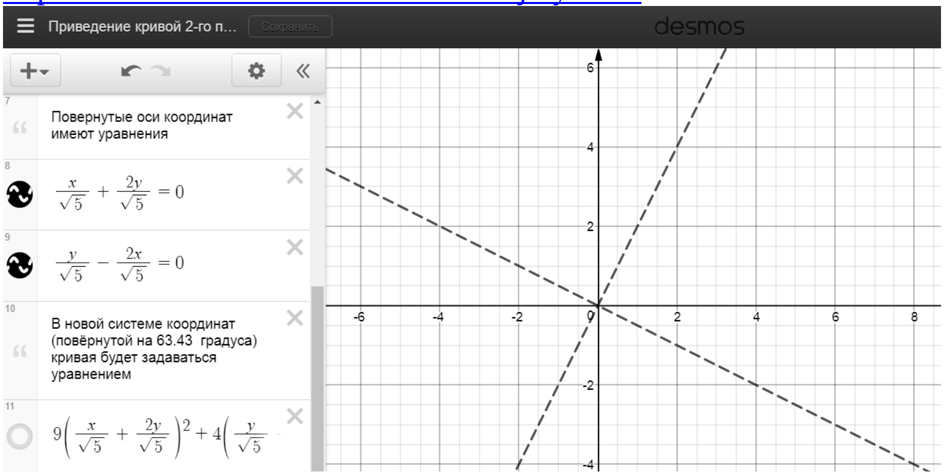

Рис.18. График координатных осей $Ox' : -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y = 0$ и $Oy' : \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot y = 0$ в системе Oxy.

Подставляя $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ в уравнение

$$5(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y')^2 + 4(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y')(\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y') +$$
$$+ 8(\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y')^2 -$$
$$- 52(\cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y') - 64(\sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y') + 164 = 0,$$

находим, что в системе координат $Ox'y'$ уравнение кривой примет вид:

$$9x'^2 + 4y'^2 - 36\sqrt{5}x' + 8\sqrt{5}y' + 164 = 0,$$

график этой кривой в системе $Ox'y'$ представлен на https://www.desmos.com/calculator/qwev6wq4mb и Рис.19.

Выделяя полный квадрат, получим:

$$9(x'-2\sqrt{5})^2+4(y'+\sqrt{5})^2-36=0.$$

Значит, если мы осуществим в системе $Ox'y'$ параллельный перенос в точку $(2\sqrt{5},-\sqrt{5})$ по формулам $\begin{cases} x''=x'-2\sqrt{5} \\ y''=y'+\sqrt{5} \end{cases}$, то получим в новой системе координат $Ox''y''$ каноническое уравнение кривой 2-го порядка:

$$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{9}=1.$$

Это эллипс, вытянутый вдоль оси Oy'' на 3 единицы, а вдоль оси Ox'' - на 2 единицы. График эллипса представлен на https://www.desmos.com/calculator/ijpyapexd2 и Рис.20.

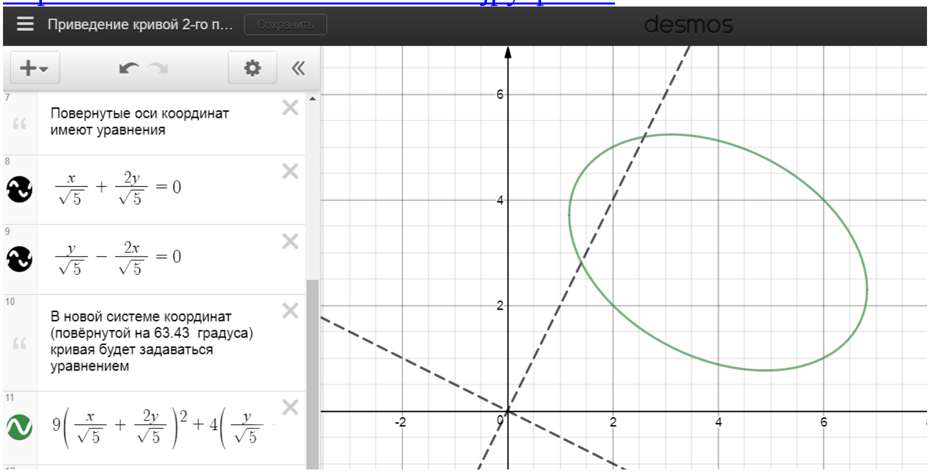

Рис.19. График кривой $9x'^2+4y'^2-36\sqrt{5}x'+8\sqrt{5}y'+164=0$ в системе $Ox'y'$.

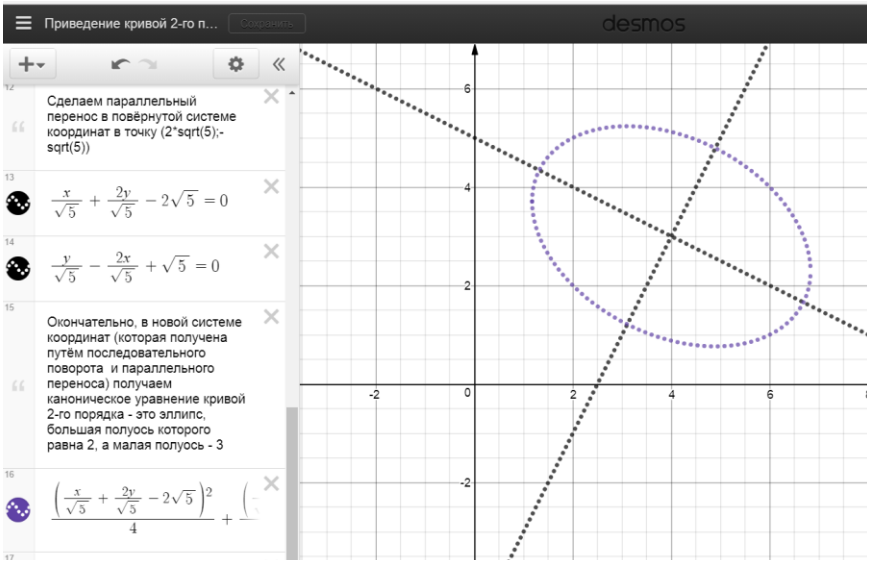

Рис.20. График $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1$ в системе координат $Ox''y''$.

Отметим, что график кривой, заданной в системе Oxy уравнением $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0$ совпадает с графиком $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1$ в системе координат $Ox''y''$ - см. https://www.desmos.com/calculator/ivmqp5dfz1 и Рис.21.

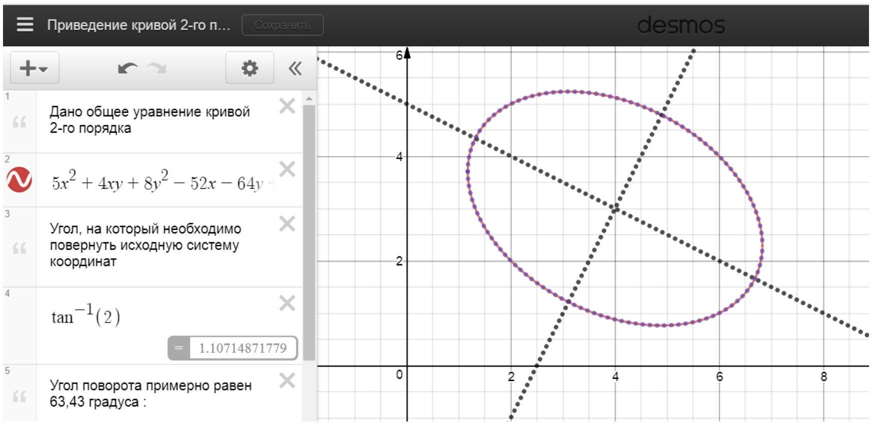

Рис. 21. График $\dfrac{x''^2}{4}+\dfrac{y''^2}{9}=1$ в системе координат $Ox''y''$ и кривой $5x^2+4xy+8y^2-52x-64y+164=0$ в системе координат Oxy

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1.Задание 1.

Исследовать каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Алгоритм выполнения задания

1.Изучить зависимость графика эллипса, заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

от значений параметров a и b. Для этого в рабочем листе DESMOS https://www.desmos.com/calculator/t0kvspiy9z (рис.22) нужно изменять значения параметров, нажимая на кнопку , находящуюся слева от соответствующего параметра или вводя их с клавиатуры.

Вычисление параметра c и эксцентриситета эллипса ε будет происходить автоматически по заранее введённой формуле при условии, что $a > b$ (рис. 23, 24).

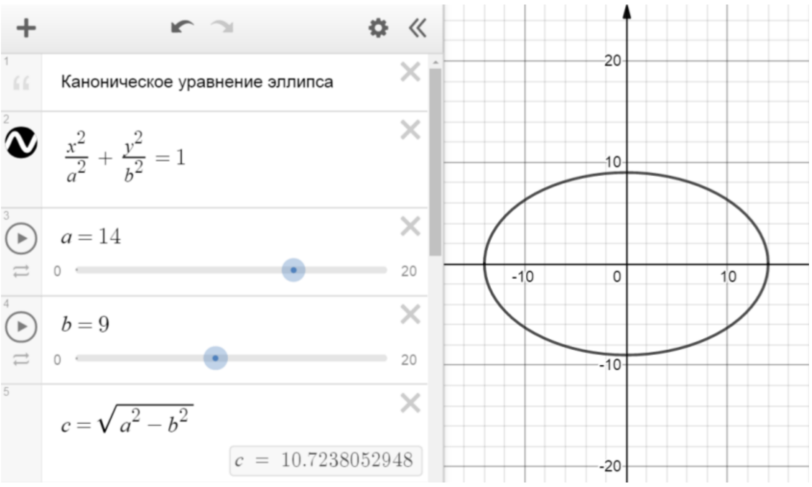

Рис.22.

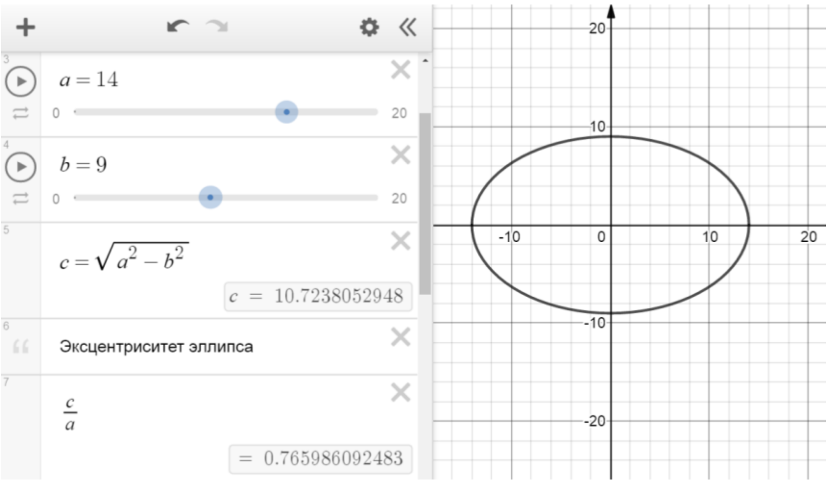

Рис.23.

2.Передвигаясь далее вниз по рабочему листу необходимо отметить фокусы и директрисы эллипса (рис.24).

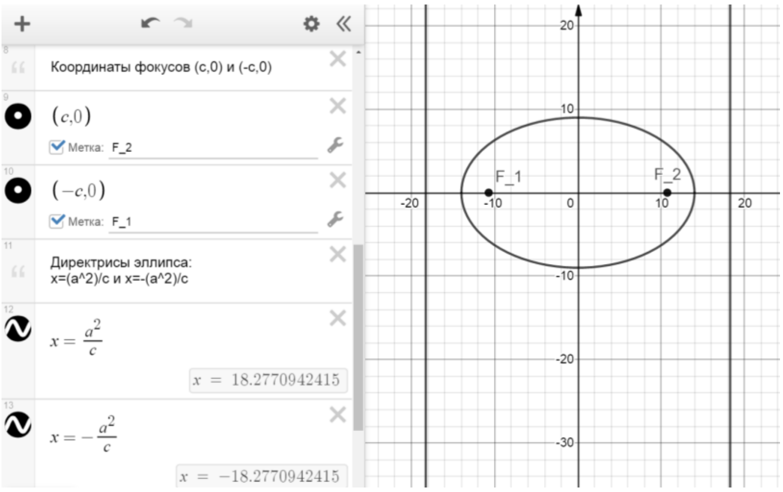

Рис.24.

3.Изменяя значения параметров a и b ($a > b$), сделать вывод об увиденной зависимости значения эксцентриситета ε, положения фокусов и директрис эллипса при изменении параметров a и b ($a > b$).

4. Для некоторых целых положительных значений параметров a и b (которые задаются или преподавателем – см. Приложение 2) поместить в отчёт следующие графики эллипса, на которых отмечены его вершины, фокусы и директрисы:

- график эллипса при $a > b$;
- график эллипса при $a = b$;
- график эллипса при $a < b$ (обратить внимание, что этот график получается из графика эллипса при $a > b$ путём поворота координатных осей на угол $\frac{\pi}{2}$).

Для каждого графика необходимо привести формулы расчёта параметра c, эксцентриситета ε, уравнения директрис (в случае получения иррациональных значений параметров округлять их значения до десятых).

5.Для любой пары выбранных ранее в п.4. значений параметров a и b ($a > b$ или $a < b$) проверить выполнение определения эллипса как геометрического места точек плоскости (см.п.2). Для этого необходимо выбрать любые три точки на эллипсе, лежащие в различных четвертях плоскости Oxy и сравнить отношение $\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{|\overrightarrow{MN}|}$ с вычисленным ранее в п.4. значением ε .

6.Записать параметрические уравнения эллипса для значений a и b, выбранных ранее в п.5., и построить график эллипса, заданного этими уравнениями (см.строка №15 рабочего листа из п.1, рис.25).

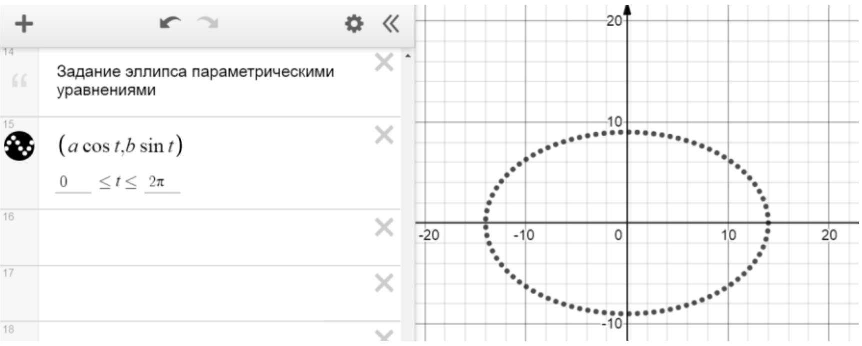

Рис.25.

Задание 2.

Исследовать каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Алгоритм выполнения задания

1.Изучить зависимость графика гиперболы, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

от значений параметров a и b. Для этого в рабочем листе DESMOS https://www.desmos.com/calculator/dbwpfmefvt (рис.26) нужно изменять значения параметров, нажимая на кнопку , находящуюся слева от соответствующего параметра или вводя их с клавиатуры. При этом подсчёт параметра c будет происходить автоматически по заранее введённой формуле. Вычисление параметра c и эксцентриситета эллипса ε будет происходить автоматически по заранее введённой формуле (рис.27).

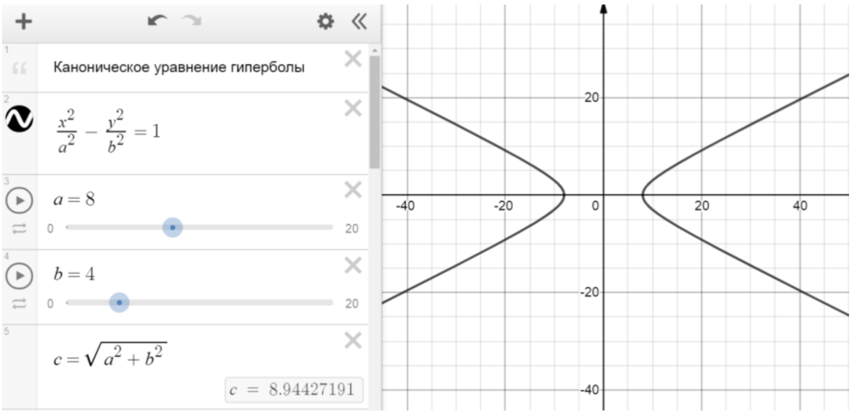

Рис.26.

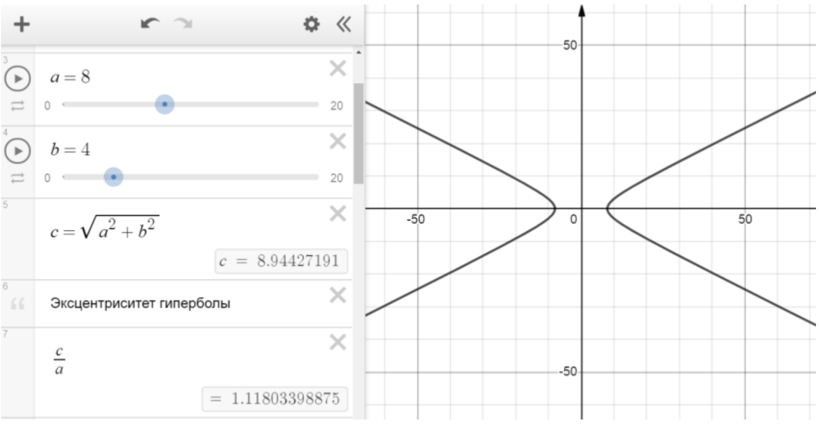

Рис.27.

2.Передвигаясь далее вниз по рабочему листу необходимо отметить фокусы и директрисы гиперболы (рис.28).

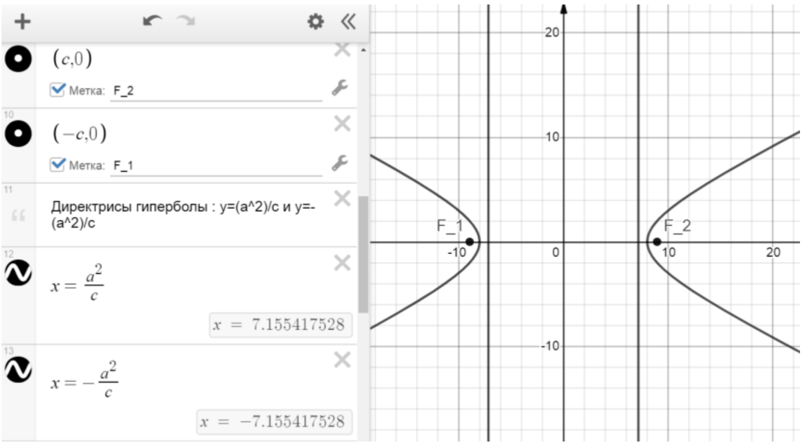

Рис.28.

3.Изменяя значения параметров a и b, сделайте вывод об увиденной зависимости значения эксцентриситета ε, положения фокусов и директрис гиперболы при изменении параметров a и b.

4.Для выбранных ранее (см. задание №1, п.4) целых положительных значений параметров a и b поместите в отчёт следующие графики гиперболы, на которых отмечены её вершины, фокусы, директрисы и асимптоты:

- график гиперболы при $a > b$;
- график гиперболы при $a = b$;
- график гиперболы при $a < b$.

Для каждого графика необходимо привести формулы расчёта параметра c, эксцентриситета ε, уравнения директрис и асимптот (в случае получения иррациональных значений параметров округлять их значения до десятых).

5.Для любой пары выбранных ранее в п.4. значений параметров a и b построить сопряжённую гиперболу. Отметить на графике её фокусы, вершины и директрисы.

6.Для любой пары выбранных ранее в п.4. значений параметров a и b проверить выполнение определения гиперболы как геометрического места точек на плоскости (п.2). Для этого необходимо выбрать любые три точки гиперболы (лежащие в различных четвертях плоскости Oxy) и сравнить отношение $\dfrac{\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$ с вычисленным ранее в п.4. значением ε.

7.Записать параметрические уравнения ветвей гиперболы для значений a и b, выбранных ранее в п.4., и построить график гиперболы, заданной этими уравнениями (см. строки №15,16 рабочего листа из п.1, рис.29).

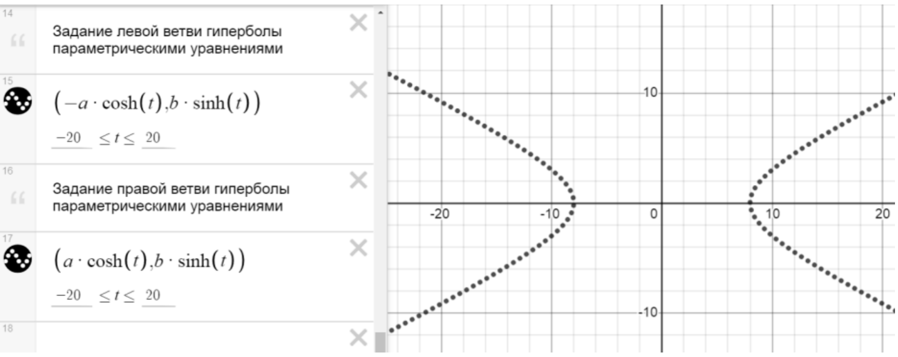

Рис.29.

Задание 3.

Исследовать каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px$$

Алгоритм выполнения задания

1.Изучить зависимость графика параболы, заданной каноническим уравнением

$$y^2 = 2px,$$

от значений параметра *p*. Для этого в рабочем листе DESMOS https://www.desmos.com/calculator/eie0yazwfl (рис.30) нужно изменять его значение, нажимая на кнопку , находящуюся слева от него или вводя его значение с клавиатуры.

2.Передвигаясь далее вниз по рабочему листу необходимо отметить фокус и директрису параболы (рис.31).

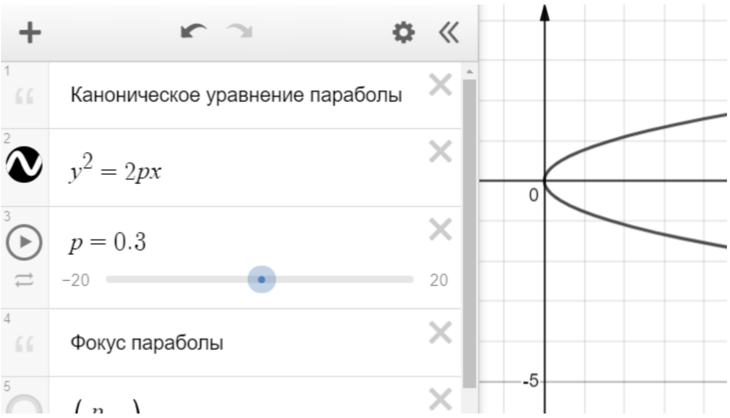

Рис.30.

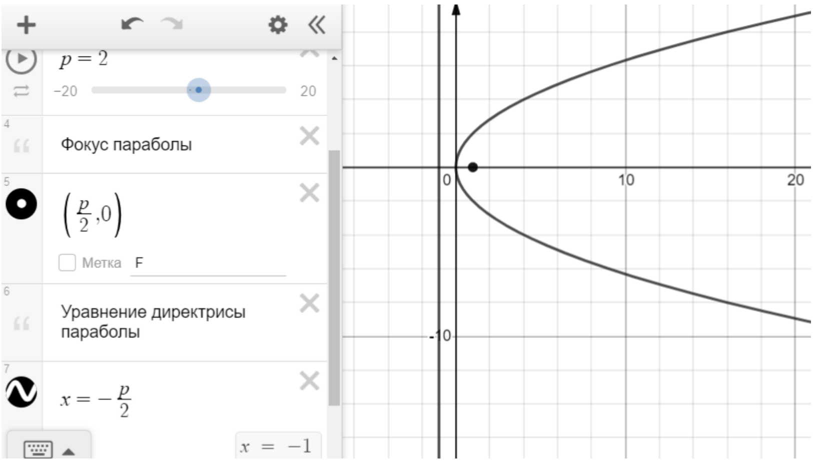

Рис.31

3. Для значения параметра $p = a + b$ (значения параметров a и b берут из п.4 задания №1) поместить в отчёт следующие графики параболы, на которых отмечены её вершина, фокус и директриса:

- график параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$;
- график параболы, заданной уравнением $y^2 = -2px$;

- график параболы, заданной уравнением $x^2 = 2py$;
- график параболы, заданной уравнением $x^2 = -2py$ (обратите внимание, что этот график параболы, заданной уравнением $x^2 = 2py$ ($x^2 = -2py$) получается из графика параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$ ($y^2 = -2px$) путём поворота координатных осей на угол $\frac{\pi}{2}$).

Для каждого графика необходимо привести формулы расчёта параметра координат фокуса и уравнения директрисы (в случае получения иррациональных значений параметров округлять их значения до десятых).

4.Для выбранного в п.3. значения параметра p проверить выполнение определения параболы как геометрического места точек плоскости (см.п.2,с.16). Для этого необходимо выбрать любые три точки параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$, лежащие в различных четвертях плоскости Oxy и сравнить отношение $\frac{|\overrightarrow{MF}|}{|\overrightarrow{MN}|}$ с $\varepsilon = 1$.

5.Записать параметрические уравнения параболы для значения параметра p, выбранного ранее в п.3, и построить график параболы, заданной этими уравнениями (см.строку №9 рабочего листа из п.1 - см. рис. 32).

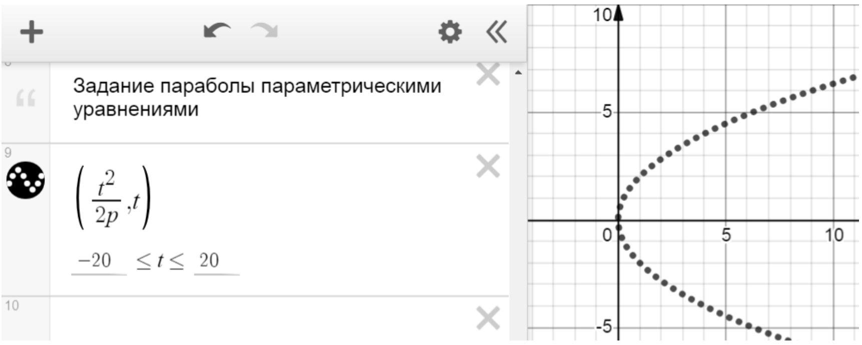

Рис.32.

Задание 4. Привести к каноническому виду уравнения линий второго порядка и построить их графики – см. Приложение 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Титульный лист отчёта по РГЗ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет
императрицы Екатерины II

Кафедра высшей математики

Расчетно-графическое задание
По дисциплине___Высшая математика_______________________________
(Наименование учебной дисциплины согласно учебному плану)

Тема работы:__________Кривые 2-го порядка____________________

Выполнил студент гр. ______________ __________ ___________
(шифр группы) (Ф.И.О.) (подпись)

Оценка:______________ Дата:____________

Проверил:

Санкт-Петербург
2023

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Задача 1, Задача 2

(в случае, когда необходимо построить график при $a > b$ - меняем заданные параметры местами, т.е. для первого варианта в задаче 1 строим кривые $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$ и $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$. Для случая $a = b$ строим или $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$ или $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{49} = 1$. Для задачи 2 – аналогично.)

1. $a = 3, b = 7$
2. $a = 2, b = 6$
3. $a = 5, b = 9$
4. $a = 4, b = 8$
5. $a = 7, b = 9$
6. $a = 6, b = 10$
7. $a = 9, b = 11$
8. $a = 8, b = 12$
9. $a = 3, b = 6$
10. $a = 4, b = 7$
11. $a = 5, b = 8$
12. $a = 4, b = 7$

13. $a=3, b=6$
14. $a=6, b=9$
15. $a=5, b=12$
16. $a=8, b=14$
17. $a=7, b=10$
18. $a=10, b=15$
19. $a=9, b=14$
20. $a=4, b=10$
21. $a=5, b=10$
22. $a=6, b=11$
23. $a=4, b=9$
24. $a=3, b=8$
25. $a=6, b=12$
26. $a=5, b=13$
27. $a=8, b=15$
28. $a=7, b=12$
29. $a=10, b=16$
30. $a=9, b=15$
31. $a=4, b=12$
32. $a=5, b=13$

Задача 3, 4

Значение параметра $p=a+b$, где значения a и b - параметры из задачи 1, 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вариант 1.

1. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$
2. $x^2 + 6y^2 + 2x + 12y - 2 = 0$
3. $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$
4. $y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

Вариант 2.

1. $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$
2. $6x^2 + y^2 + 12x + 2y - 2 = 0$
3. $9x^2 - 25y^2 + 18x - 100y - 316 = 0$
4. $y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

Вариант 3.

1. $23x^2 + 16xy - 7y^2 - 16x - 14y - 218 = 0$
2. $6x^2 + y^2 - 12x + 2y - 2 = 0$
3. $9x^2 - 25y^2 + 18x + 100y - 316 = 0$
4. $y^2 + 6x + 4y + 12 = 0$

Вариант 4.

1. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$
2. $6x^2 + y^2 - 12x - 2y - 2 = 0$
3. $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$
4. $-y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

Вариант 5.

1. $x^2 + 2xy + y^2 - 8y + 4 = 0$
2. $6x^2 + y^2 + 12x + 2y - 2 = 0$
3. $25x^2 - 9y^2 - 100x - 18y - 316 = 0$
4. $3x^2 + 18x + 6y - 10 = 0$

Вариант 6.

1. $4x^2 - 2xy + y^2 - 4y - 4x + 7 = 0$
2. $6x^2 + y^2 - 12x - 2y - 2 = 0$
3. $25x^2 - 9y^2 + 100x - 18y - 316 = 0$
4. $3x^2 + 18x - 6y - 10 = 0$

Вариант 7.

1. $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 + 24x - 18y + 29 = 0$
3. $25x^2 - 9y^2 - 100x + 18y - 316 = 0$
4. $5x^2 - 10x - 10y - 2 = 0$

Вариант 8.

1. $2x^2 + 6xy + 2y^2 - 2x - 6y - 16 = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 + 24x + 18y + 29 = 0$
3. $25x^2 - 9y^2 + 100x + 18y - 316 = 0$
4. $5x^2 - 10x + 10y - 2 = 0$

Вариант 9.

1. $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 8x - 11y = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 29 = 0$
3. $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$
4. $x^2 - 4x - y - 5 = 0$

Вариант 10.

1. $4x^2 + 2xy + 4y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 29 = 0$
3. $5x^2 - 6y^2 + 10x + 12y - 31 = 0$
4. $x^2 - 4x + 2y - 5 = 0$

Вариант 11.

1. $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$
2. $3x^2 + y^2 + 12x + 2y - 3 = 0$

3. $5x^2 - 6y^2 - 10x - 12y - 31 = 0$
4. $x^2 - 4y - 4x + 6 = 0$

Вариант 12.

1. $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$
2. $3x^2 + y^2 - 12x + 2y - 3 = 0$
3. $5x^2 - 6y^2 - 10x + 12y - 31 = 0$
4. $3x^2 - y + 12x - 5 = 0$

Вариант 13.

1. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$
2. $3x^2 + 2y^2 + 12x + 4y - 3 = 0$
3. $6x^2 - 5y^2 - 12x + 10y - 31 = 0$
4. $-x^2 + y - 4x - 4 = 0$

Вариант 14.

1. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$
2. $3x^2 + 2y^2 - 12x - 4y - 3 = 0$
3. $6x^2 - 5y^2 - 12x - 10y - 31 = 0$
4. $x^2 + y + 4x - 4 = 0$

Вариант 15.

1. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$
2. $3x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 3 = 0$
3. $6x^2 - 5y^2 + 12x + 10y - 31 = 0$
4. $-x^2 + 9y - 4x - 4 = 0$

Вариант 16.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
2. $3x^2 + 2y^2 - 12x + 4y + 6 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$
4. $-x^2 + y - 4x - 8 = 0$

Вариант 17.

1. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$
2. $4x^2 + y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y + 1 = 0$
4. $2x^2 - 12x + 3y + 4 = 0$

Вариант 18.

1. $x^2 + 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$
2. $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 6x + 16y + 1 = 0$
4. $9x^2 + 4x + 3y + 4 = 0$

Вариант 19.

1. $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y + 1 = 0$
4. $4x^2 - 6x - 16y + 1 = 0$

Вариант 20.

1. $2x^2 - 3xy - 2y^2 - x + 3y + 4 = 0$
2. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$
3. $x^2 - 4y^2 + 6x - 16y + 1 = 0$
4. $x^2 - 6x - 6y + 10 = 0$

Вариант 21.

1. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$
2. $x^2 + 6y^2 + 2x + 12y - 2 = 0$
3. $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$
4. $y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

Вариант 22.

1. $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$

2. $6x^2 + y^2 + 12x + 2y - 2 = 0$

3. $9x^2 - 25y^2 + 18x - 100y - 316 = 0$

4. $y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

Вариант 23.

1. $23x^2 + 16xy - 7y^2 - 16x - 14y - 218 = 0$

2. $6x^2 + y^2 - 12x + 2y - 2 = 0$

3. $9x^2 - 25y^2 + 18x + 100y - 316 = 0$

4. $y^2 + 6x + 4y + 12 = 0$

Вариант 24.

1. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$

2. $6x^2 + y^2 - 12x - 2y - 2 = 0$

3. $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$

4. $-y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

Вариант 25.

1. $x^2 + 2xy + y^2 - 8y + 4 = 0$

2. $6x^2 + y^2 + 12x + 2y - 2 = 0$

3. $25x^2 - 9y^2 - 100x - 18y - 316 = 0$

4. $3x^2 + 18x + 6y - 10 = 0$

Вариант 26.

1. $4x^2 - 2xy + y^2 - 4y - 4x + 7 = 0$

2. $6x^2 + y^2 - 12x - 2y - 2 = 0$

3. $25x^2 - 9y^2 + 100x - 18y - 316 = 0$

4. $3x^2 + 18x - 6y - 10 = 0$

Вариант 27.

1. $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$

2. $4x^2 + 9y^2 + 24x - 18y + 29 = 0$

3. $25x^2 - 9y^2 - 100x + 18y - 316 = 0$

4. $5x^2 - 10x - 10y - 2 = 0$

Вариант 28.

1. $2x^2 + 6xy + 2y^2 - 2x - 6y - 16 = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 + 24x + 18y + 29 = 0$
3. $25x^2 - 9y^2 + 100x + 18y - 316 = 0$
4. $5x^2 - 10x + 10y - 2 = 0$

Вариант 29.

1. $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 8x - 11y = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 29 = 0$
3. $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$
4. $x^2 - 4x - y - 5 = 0$

Вариант 30.

1. $4x^2 + 2xy + 4y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 29 = 0$
3. $5x^2 - 6y^2 + 10x + 12y - 31 = 0$
4. $x^2 - 4x + 2y - 5 = 0$

Вариант 31.

1. $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$
2. $3x^2 + y^2 + 12x + 2y - 3 = 0$
3. $5x^2 - 6y^2 - 10x - 12y - 31 = 0$
4. $x^2 - 4y - 4x + 6 = 0$

Вариант 32.

1. $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$
2. $3x^2 + y^2 - 12x + 2y - 3 = 0$
3. $5x^2 - 6y^2 - 10x + 12y - 31 = 0$
4. $3x^2 - y + 12x - 5 = 0$

Рекомендательный библиографический список

1. Высшая математика. Том 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: Учебник/ А.П. Господариков [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский горный университет, 2015. – 105 с.
http://www.bibliocomplectator.ru/book/?id=71687
2. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с.
http://znanium.com/catalog/product/851522
3. Краткий курс аналитической геометрии: Учебник/ Ефимов Н. В., 14-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 240 с.
http://znanium.com/catalog/product/537806
4. Моденов П.С. Аналитическая геометрия - М.: Изд-во МГУ, 1964. - 699 с.
5. DESMOS Graphing Calculator: сайт. - URL: https://www.desmos.com/calculator (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.
6.Математические этюды / : сайт.-URL: http://www.etudes.ru/ru/etudes/ellipse/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.
7. Математические этюды / Построение параболы. Геометрическое определение: сайт.-URL: http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-parabola-geometric-definition/, (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.
8. Математические этюды / Параболограф Кавальери: сайт.-URL: http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-cavalieri-parabolograf/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.
9. Математические этюды / Конические сечения. Конус с водой: сайт.-URL: http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-water/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.
10. Оптическое свойство эллипса, гиперболы, параболы: сайт.-URL: http://dev.mccme.ru/~merzon/mirror/mp-optical/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.
11. Математические этюды / Параболическая антенна: сайт.-URL:

http://www.etudes.ru/ru/etudes/parabolic-antenna/ (дата обращения: 20.01.2020). - Текст электронный.