Практическая работа №2
КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

1. Краткие теоретические сведения

Критерий Рауса-Гурвица

Алгебраический критерий устойчивости в разной форме был предложен английским математиком Е. Раусом и затем швейцарским математиком А. Гурвицем в конце 19-го века, поэтому этот критерий обычно называют *критерием Рауса – Гурвица*. Критерий применяется к коэффициентам характеристического уравнения системы, которая может разомкнутой или замкнутой.

Пусть имеется характеристическое уравнение системы:

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Из коэффициентов характеристического уравнения составляют матрицу по правилу:

1. По диагонали записываются коэффициенты от a_{n-1} до a_0
2. Столбцы определителя заполняются коэффициентами от главной диагонали вниз по возрастающим, а вверх – по убывающим индексам.
3. В случае отсутствия индекса, а также, если он меньше 0 или больше n, на его место пишется 0.

Таким образом, матрица Гурвица приобретает следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Критерий устойчивости формулируется так:

Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $a_n > 0$ были положительными все n диагональных определителей, получаемых из матрицы Гурвица.

Первые три определителя матрицы Гурвица имеют следующий вид:

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, критерий Гурвица позволяет судить об абсолютной устойчивости, но не дает возможности оценивать относительную устойчивость по корням характеристического уравнения.

Критерий устойчивости Михайлова

При использовании частотного критерия Михайлова также может рассматриваться замкнутая либо разомкнутая система.

Пусть известно характеристическое уравнение системы:

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Если сделать замену $s = j\omega$, то получается уравнение комплексного вектора:

$$A(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 = U(\omega) + jV(\omega).$$

При изменении частоты ω от 0 до ∞ этот вектор описывает некоторую кривую – кривую Михайлова.

Кривая Михайлова начинается при $\omega = 0$ в точке $U(0) = a_0$ и заканчивается в n – ом квадранте при $\omega = \infty$ (если отсчет квадрантов вести против часовой стрелки), где уходит в бесконечность.

Таким образом, чтобы построить кривую Михайлова, надо в характеристическом уравнении заменить s на $j\omega$, и разделить вещественную и мнимую часть. Далее, задавая различные значения частоты, найти точки с координатами:

$$\{U(0); jV(0)\}, \{U(\omega_1); jV(\omega_1)\}, \{U(\omega_2); jV(\omega_2)\} \dots$$

По этим точкам строится кривая Михайлова.

Критерий устойчивости Михайлова: линейная система n-го порядка будет устойчива, если кривая Михайлова охватывает начало координат, последовательно проходит n квадрантов против часовой стрелки, и уходит в бесконечность в n-м квадранте.

Если кривая Михайлова проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости.

Критерий устойчивости Найквиста

В отличие от критериев Гурвица, Рауса и Михайлова, которые основаны на анализе характеристического уравнения системы (неважно – замкнутой или разомкнутой), критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости *замкнутой* системы по амплитудно-фазовой характеристике *разомкнутой* системы.

В этом заключается существенное преимущество критерия, т. к. построение *АФЧХ разомкнутого контура* для большинства реальных систем оказывается проще, чем построение годографа Михайлова. Особенно упрощается это построение для одноконтурных систем, состоящих из типовых звеньев.

Пусть имеется ПФ разомкнутой системы $W(j\omega)$.

Для нахождения вещественной и мнимой части частотной ПФ нужно освободиться от мнимости в знаменателе путем умножения числителя и знаменателя на комплексную величину, сопряженную знаменателю, а затем выполнить разделение на вещественную и мнимую части. ПФ приобретает вид:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Задаваясь различными значениями частоты, можно найти множество пар $\{P(\omega_1); jQ(\omega_1)\}$, $\{P(\omega_2); jQ(\omega_2)\}, \ldots \{P(\omega_n); jQ(\omega_n)\}$. Затем по этим парам строится АФЧХ на комплексной плоскости.

Основные свойства АФЧХ разомкнутой системы:

1. Если разомкнутая система не имеет интегрирующих звеньев, то при $\omega = 0$ ее АФЧХ начинается на вещественной оси в точке $P(\omega) = k$ (где k – коэффициент усиления разомкнутой системы). Заканчивается АФЧХ в начале координат при $\omega \to \infty$ (рис.1, *а*).

2. Если разомкнутая система имеет одно интегрирующее звено, то ее АФЧХ начинается при $\omega = 0$ в бесконечности на отрицательной мнимой полуоси, а заканчивается в начале координат при $\omega \to \infty$ (рис. 1, *б*).

Критерий устойчивости Найквиста формулируется так:

1. Если *разомкнутая система устойчива или находится на границе устойчивости*, то для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты w от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами $\{-1, j0\}$.

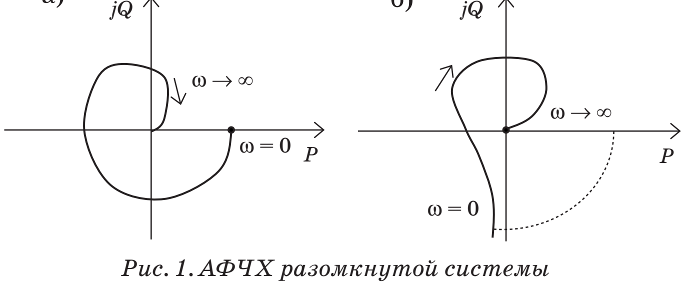

Рис. 1. АФЧХ разомкнутой системы

2. Если *разомкнутая система неустойчива*, а ее ПФ имеет m полюсов справа от мнимой оси на комплексной плоскости, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты от w от $-\infty$ до $+\infty$ охватывала m раз точку с координатами $\{-1, j0\}$.

При использовании этого критерия нужно учитывать две особенности:

1. Если разомкнутая система находится на границе устойчивости, то ее АФЧХ уходит в бесконечность. Для проверки критерия Найквиста нужно мысленно соединить конец АФЧХ дугой бесконечно большого радиуса с положительной вещественной полуосью (рис. 1, *б*).

2. На практике АФЧХ может строиться только для положительных частот (0 J $\omega < +\infty$). При применении критерия Найквиста считается, что ветвь АФЧХ для отрицательных частот симметрична относительно вещественной оси.

Физический смысл критерия устойчивости Найквиста заключается в том, что система будет неустойчива, если фаза выходного сигнала противоположна фазе входного сигнала, а коэффициент усиления >1.

Частотный критерий устойчивости Найквиста часто удобно использовать в том случае, когда рассматривается не АФЧХ, а ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы:

Замкнутая минимально-фазовая система устойчива, если, при достижении ЛФЧХ значения $-\pi$, *ЛАЧХ будет отрицательной.*

Эта формулировка следует из того, что если ЛАЧХ отрицательна, то модуль АФЧХ < 1 (т. к. числа, меньшие единицы, имеют отрицательный логарифм).

Таким образом, система устойчива, если на частоте среза значение фазы не превышает $-\pi$. Соответственно, для устойчивой системы можно рассматривать на ЛФЧХ запас устойчивости по фазе – расстояние от значения фазы на частоте среза до уровня $-\pi$, и запас устойчивости по амплитуде – расстояние от оси частот ЛАЧХ до значения усиления на частоте, где фаза становится равной $-\pi$.

В системе *MatLab* есть специальная команда *nyquist* для проверки устойчивости разомкнутой системы.

2. Примеры

Пример 1. Пусть задан характеристический полином системы

$$2s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0 \ .$$

Определить, устойчива ли эта система с помощью критерия Рауса-Гурвица.

Решение.

Здесь $n = 5$, $a_5 = 2$, $a_4 = 4$, $a_3 = 3$, $a_2 = 7$, $a_1 = 2$, $a_0 = 1$, и матрица Гурвица имеет вид:

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка в $MatLab$:

```
>> G = [4 2 1 0 0; 2 3 2 0 0;0 4 2 1 0; 0 2 3 2 0; 0 0 4 2 1];
>> G1=G(1,1);
>> det(G1)
ans =
4
>> G2=G(1:2,1:2)
G2 =
4 2
2 3
>> det(G2)
ans =
8
>> G3=G(1:3,1:3)
G3 =
4 2 1
2 3 2
0 4 2
>> det(G3)
ans =
-8
```

Система оказалась неустойчивой, т. к. 3-й диагональный определитель оказался отрицательным.

Пример 2. Пусть задан характеристический полином системы

$$s^3 + 11s^2 + 31s + 21 = 0.$$

Определим устойчивость по критерию Михайлова с помощью следующей программы

```
w=0:0.01:6;
W = 1*(w*j).^3+11*(w*j).^2+31* w*j +21;
plot(real(W),imag(W)),
title('Mikhailov curve');
xlabel( 'U=real(W)'), ylabel('jV=jimag(W)' )
grid
```

Результат представлен на рис. 2, система устойчива.

Пример 3. Определить с помощью критерия Найквиста, устойчива ли система, показанная на рис. 3

Решение

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_p(s) = \frac{10}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}.$$

Частотная ПФ:

$$W_p(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1} = \frac{10}{(1 - 3\omega^2) + j(3\omega\text{-}\omega^3)}.$$

Выделяем вещественную и мнимую часть.

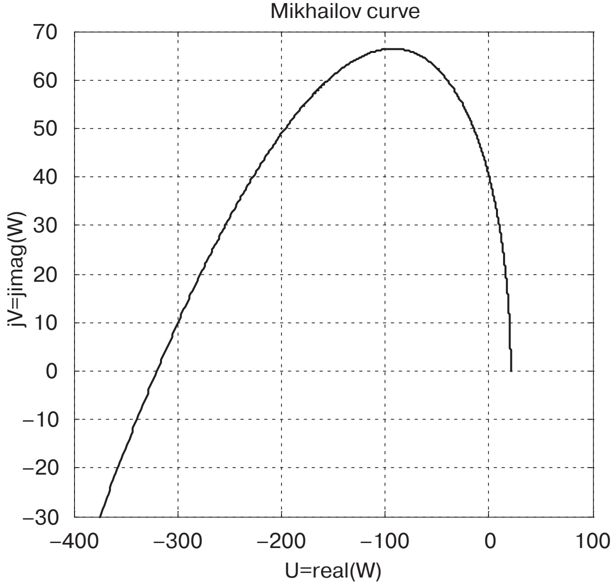

Рис. 2. Пример кривой Михайлова для объекта 3-го порядка

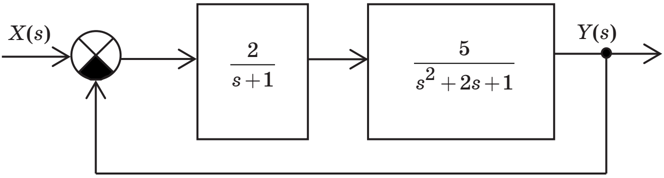

Рис. 3. Система управления

$$W_p(j\omega) = \frac{10}{(1-3\omega^2) + j(3\omega - \omega^3)} =$$

$$= \frac{10\Big((1-3\omega^2) - j(3\omega - \omega^3)\Big)}{\Big((1-3\omega^2) + j(3\omega - \omega^3)\Big)\Big((1-3\omega^2) - j(3\omega - \omega^3)\Big)} =$$

$$= \frac{10\Big((1-3\omega^2) - j(3\omega - \omega^3)\Big)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2} =$$

$$= \frac{10(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2} - j\frac{10(3\omega - \omega^3)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}.$$

Построим диаграмму Найквиста с помощью программы:

```
w=0:0.01:6;
Re1= 10*(1-3*w^2)./((1-3*w.^2).^2 +(3*w-w.^3).^2);
Im1= -10*(3*w-w.^3)./((1-3*w.^2).^2 +(3*w-w.^3).^2);
plot(Re1,Im1),
title('Nyquist plote');
xlabel( 'U=real(W)'), ylabel('jV=jimag(W)' )
```

Полученный график приведен на рис. 4.

График охватывает точку (–1, j0), поэтому замкнутая система будет неустойчива.

Пример 4. Рассмотрим устойчивую разомкнутую систему:

$$W(s) = \frac{0.2s + 1}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 1}.$$

```
w=0:0.01:6;
W = (0.2*w*j+1)./(1*(w*j).^4+1*(w*j).^3+4*(w*j).^2+2* w*j +1;
plot(real(W),imag(W)),
title('Nyquist plote');
xlabel( 'U=real(W)'), ylabel('jV=jimag(W)' )
```

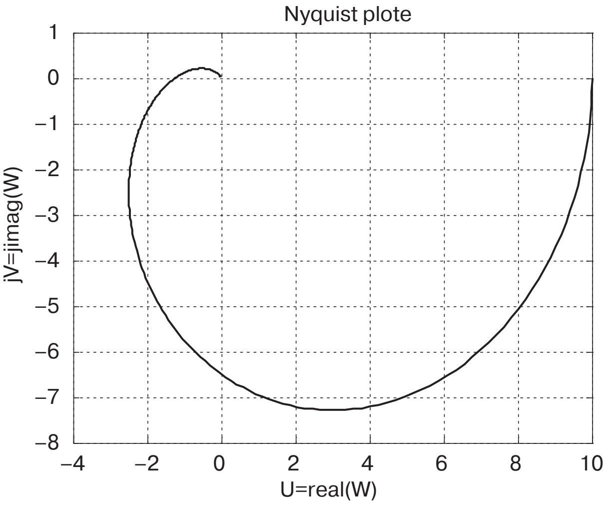

Рис. 4. Диаграмма Найквиста

На рис. 5 представлен результат, который соответствует устойчивой замкнутой системе.

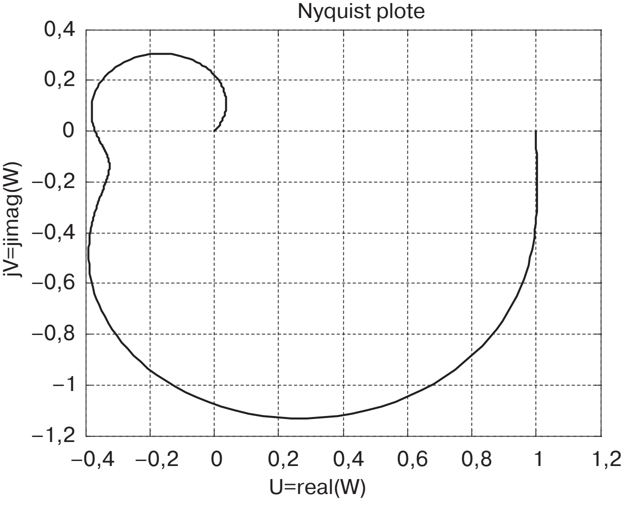

Рис. 5. Годограф Найквиста для устойчивой системы

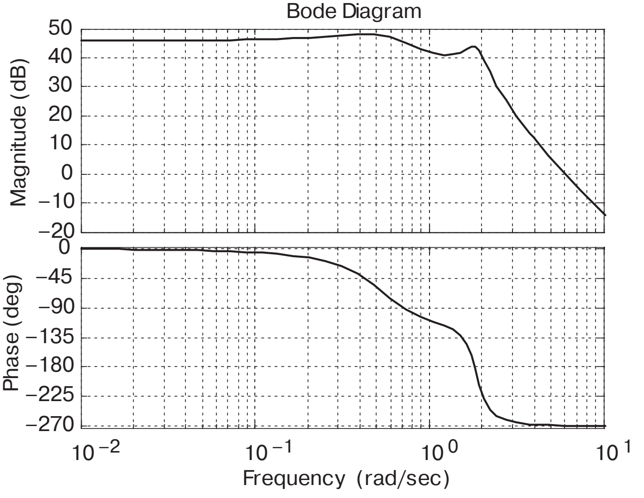

Рис. 6. ЛАЧХ и ЛФЧХ системы

Пример 5. Рассмотрим устойчивую разомкнутую систему:

$$W(s) = 200\frac{s+1}{s^4+s^3+4s^2+2s+1}.$$

Оценим устойчивость замкнутой системы по ЛАЧХ и ЛФЧХ.

```
>> w2=tf([200 200],[1 1 4 2 1])
Transfer function:
200 s + 200
--------------------------
s^4 + s^3 + 4 s^2 + 2 s + 1
>> bode(w2)
>> grid
```

Полученный график представлен на рис. 6.

При пересечении ЛАЧХ оси частот фаза превышает $-\pi$, поэтому замкнутая система будет неустойчива.

3. Задание для практической работы

Для заданного варианта системы из табл. 1. выполнить:

1. Оценку устойчивости по алгебраическому критерию.
2. Оценку устойчивости по критерию Михайлова.

3. Оценку устойчивости по критерию Найквиста.
4. Оценить запасы устойчивости системы по амплитуде и по фазе.

Варианты систем **Таблица 1**

№	Передаточная функция	№	Передаточная функция
1	$W(s)=\dfrac{s+1}{s^3+2s^2+3s+4}$	11	$W(s)=\dfrac{s+1}{2s^3+3s^2+3s+4}$
2	$W(s)=\dfrac{s+2}{2s^3+3s^2+4s+5}$	12	$W(s)=\dfrac{s+2}{2s^3+3s^2+4s+1}$
3	$W(s)=\dfrac{s+1}{3s^3+3s^2+3s+1}$	13	$W(s)=\dfrac{10s+1}{8s^3+6s^2+3s+1}$
4	$W(s)=\dfrac{10s+1}{8s^3+6s^2+4s+2}$	14	$W(s)=\dfrac{10s+1}{2s^3+6s^2+4s+2}$
5	$W(s)=\dfrac{2s+1}{2s^3+2s^2+4s+2}$	15	$W(s)=\dfrac{2s+1}{2s^3+2s^2+4s+1}$
6	$W(s)=\dfrac{s+1}{2s^3+2s^2+2s+1}$	16	$W(s)=\dfrac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$
7	$W(s)=\dfrac{10}{s^3+3s^2+6s+1}$	17	$W(s)=\dfrac{10s+1}{s^3+3s^2+6s+1}$
8	$W(s)=\dfrac{5s+1}{s^3+5s^2+s+1}$	18	$W(s)=\dfrac{5s+1}{5s^3+5s^2+5s+1}$
9	$W(s)=\dfrac{5}{2s^3+5s^2+5s+1}$	19	$W(s)=\dfrac{15s+1}{2s^3+6s^2+6s+1}$
10	$W(s)=\dfrac{2s+1}{s^3+3s^2+3s+1}$	20	$W(s)=\dfrac{100}{s^3+s^2+3s+1}$