Целочисленные модели. Область применения, способы решения, примеры.

Целочисленными называются такие математические модели, в которых все или некоторые переменные должны иметь целочисленные значения (быть целыми числами). Нелинейность, вытекающая из требования целочисленности переменных, выражена достаточно слабо для того, чтобы проявиться в неожиданных изменениях других нелинейных зависимостей. Поэтому целочисленное моделирование часто рассматривается как раздел линейных моделей (в частности, линейного программирования), в которых на некоторые или все переменные наложено условие целочисленности. По аналогии с термином *линейное программирование*, под которым понимается математический аппарат улучшения параметров линейной модели, распространен термин *целочисленное программирование* (ЦП).

Простым примером задачи ЦП может служить задача о садовнике, которому для участка, занятого садом, необходимо купить 107 килограмм удобрений. Садовник может закупить удобрения или в мешках весом 35 кг стоимостью 14 руб., или в мешках весом 24 кг стоимостью 12 руб. Цель садовника — купить (не менее) 107 кг удобрений, затратив минимальную сумму денег. Обозначив количество покупаемых мешков весом 35 кг и весом 24 кг через x_1 и x_2 соответственно, можно сказать, что садовник стремится

$$\text{минимизировать } 14x_1 + 12x_2$$

при ограничениях

$35x_1 + 24x_2 \geq 107$, $x_1 + x_2 \geq 0$ и принимают целочисленные значения.

Условие целочисленности означает, что садовник не может купить половины или треть мешка удобрений, а должен либо купить целый мешок, либо не покупать его совсем. Без этого условия рассматриваемая задача представляет собой типичный пример обычной задачи ЛП.

Чтобы получить простейшее представление о том, каким образом условие целочисленности может повлиять на характер решения задачи, рассмотрим, что произойдет, если это условие будет опущено. Садовник учтет, что цена одного кг удобрений в мешках весом 35 кг равна 40 копеек, а в мешках весом 24 кг — 50 копеек. Исходя из этого, он сразу же придет к выводу, что наилучшим для него решением будет покупка 32/35 мешка весом по 35 кг. Однако при соблюдении условия целочисленности лучшим решением для него будет покупка только одного мешка весом 35 кг и трех мешков по 24 кг. Ясно видно, как резко изменился характер оптимального решения садовника, и в таком влиянии условия целочисленности нет ничего удивительного. (В частности, можно сослаться на пример транспортной задачи со специально сконструированными условиями. Эту задачу можно представить в виде квадратной матрицы затрат размера 5x5, а результаты ее решения как обычной задачи ЛП можно округлить более чем миллионом различных способов, ни один из которых не даст допустимого целочисленного решения, не говоря уже об оптимальном).

Области применения

В предыдущем примере как интерпретация, так и мотивы появления требования целочисленности были достаточно очевидными, что характерно и для тех случаев, когда речь идет об определении оптимального количества самолетов, грузовых судов или людей. Однако встречается множество моделей, на первый взгляд не имеющих ничего общего или весьма слабо связанных с оптимизацией целочисленной линейной модели, но которые тем не менее можно сформулировать как задачи ЦП. Действительно, требование дискретности переменных, если не в явном виде, то в скрытой форме, присуще многим практически важным классам задач, что обеспечивает необычайно широкую область применения ЦП во многих теоретических и прикладных дисциплинах. Составление последовательности производственных процессов, календарное планирование работы предприятия, планирование и обеспечение материально-технического снабжения, размещение предприятий, баланс сборочных линий, геологоразведка, смета капиталовложений, размещение ресурсов, планирование использования оборудования — все эти важные производственные модели представляют лишь небольшую часть широкой области применения ЦП.

Целочисленное программирование находит применение и в экономических исследованиях. Допущение о непрерывности, лежащее в основе традиционных теоретических методов исследования экономических процессов, несовместимо с наличием неделимых величин (объектов, издержек на наладочные работы и расходов, связанных с расширением предприятий). Поэтому выводы, получаемые на основе маргинального анализа, зачастую должны исправляться (или формулироваться с соответствующими оговорками), чтобы не противоречить положениям, составляющим основу методов ЦП.

Математическая формулировка линейных и целочисленных задач

Обычная формулировка задачи ЛП в матричном представлении имеет вид

$$\text{минимизировать } \mathbf{cx}$$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0,$$

где $c = (c_j)_{1\times n}$, $\mathbf{x} = (x_j)_{n\times 1}$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ и $\mathbf{b} = (b_i)_{m\times 1}$. Неравенство $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ в матричном представлении можно использовать как общую форму ограничений вида $\mathbf{Dx} \geq \mathbf{d}$ и $\mathbf{Dx} = d$, если применить хорошо известное эквивалентное преобразование соотношений

$$Dx \geq d \Leftrightarrow \quad -Dx \leq -d \text{ и}$$

$$Dx \leq d\,,$$

$$Dx = d \Leftrightarrow$$

$$-eDx \leq -ed\,,$$

где e — вектор, все компоненты которого равны 1 и интерпретируемый в зависимости от контекста как вектор-строка или вектор-столбец. (Таким образом, неравенство $-\mathbf{eDx} \leq -\mathbf{ed}$ есть итог суммирования строк-неравенств, входящих в $\mathbf{Dx} \leq \mathbf{d}$, и замены знаков их левых и правых частей на противоположные.) Итак, задачу максимизации $\mathbf{dx}$ путем замены $c = -d$ можно свести к ранее сформулированной задаче минимизации.

Полностью и частично целочисленные задачи

Задача ЛП, в которой на все компоненты вектора **x** наложено дополнительное условие целочисленности, называется *полностью* целочисленной; если это условие относится только к некоторым компонентам **x,** то задача называется *частично* целочисленной. Переменные, не связанные условием целочисленности, называют непрерывными. (Так, в обычных задачах ЛП непрерывными являются все переменные.)

Термин «целочисленное программирование» часто связывают с полностью целочисленными задачами, однако здесь в зависимости от постановки рассматриваемых задач этот термин будет распространяться и на более общий класс задач, включающий и частично целочисленные.

Примеры моделей и задач ЦП

1. Задача о ранце (или модель загрузки)

Одной из простейших задач ЦП является задача о *ранце,* названная так в силу ее интерпретации как задачи выбора наилучшего состава предметов, подлежащих укладке в походный ранец, причем каждому из предметов поставлена в соответствие оценка его важности и установлен предельный вес ранца. Получающаяся задача имеет линейную целевую функцию и линейное ограничение, выраженные через целочисленные переменные. Например,

$$\text{максимизировать } 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6\,x_4 + 3x_5$$

при ограничениях

$$54x_1 + 35x_2 + 57x_3 + 46x_4 + 19x_5 \le 100$$

и $x_j \ge 0$ и целые, $j = 1, \ldots, 5$.

В практических ситуациях на переменные модели о ранце часто накладываются ограничения вида: $x_j \le 1$; в этом случае ее иногда называют «0—1» моделью о ранце (т. е. с альтернативой «да —нет»). В более общем случае может потребоваться, чтобы значения переменных удовлетворяли условиям $x_j \le U_j$. При этих условиях рассматриваемая модель называется задачей о ранце с ограниченными сверху переменными.

Модель о ранце очень легко составить в виде обычной задачи ЛП путем простого ранжирования переменных в соответствии со значениями отношений коэффициентов целевой функции к коэффициентам ограничений (так называемый алгоритм «жадности»). Таким образом, при формулировке задачи в виде

$$\text{максимизировать } \sum d_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum d_j x_j \le b, \quad x_j \ge 0 \text{ и целые.}$$

где $d_j > 0$ и $a_j > 0$ при всех j, осуществляется ранжировка переменных в соответствии с такой штриховой индексацией, что

$$d_{1'} / a_{1'} \, d_{2'} a_{2'} \ge \ldots,$$

где последовательность 1', 2', **...** получена перестановкой прежних индексов 1,2, **...** . Затем задача решается путем приписывания переменной $x_{1'}$ максимально возможного значения, не нарушающего ограничения $\sum d_j x_j \le b$ или другого ограничения, наложенного на $x_{1'}$, как это имеет место в задаче с выбором «0—1». После этого переменной $x_{2'}$, приписывается максимально возможное значение, не нарушающее ограничения с учетом уже присвоенного значения переменной $x_{1'}$, и т. д.

Таким образом, в приведенном примере имеем

$$1' = 5,\ 2' = 3,\ 3' == 2,\ 4' = 4,\ 5' = 1,$$

и оптимальным решением задачи в случае неограниченных и непрерывных переменных будет

$$x_5 = 100/19, x_3 = x_2 = x_4 = x_1 = 0,$$

тогда как оптимальным решением задачи с выбором «0—I» будет

$$x_5 = 1,\ x_3 = 1,\ x_2 = 24/35, x_4 = x_1 = 0.$$

Часто встречающимся обобщением модели ранца является так называемая многомерная модель ранца, постановка которой «минимизировать **cx** при ограничениях **Ax**≤**b** и т. д.», характеризуется наличием условий **c**≤0 и **A**≥0. Очевидная и благоприятная для ряда ситуаций особенность многомерной задачи о ранце состоит в том, что дробный (т. е. «не полностью целочисленный») вектор **x,** удовлетворяющий условию **Ax**≤**b**, можно округлить до ближайшего нижнего целочисленного значения **x**, также удовлетворяющего этому условию. Практическое использование многомерной модели ранца связано с вопросами распределения капиталовложений, ведения лесного хозяйства и загрузки транспортных средств.

Подробное обсуждение модели ранца проводится не только для исторической справки, но и в связи с тем, что, несмотря на кажущуюся простоту этой задачи, при изложении вопросов ЦП неоднократно приходится обращаться в той или иной связи к различным ее формулировкам. (Задача о садовнике, приведенная в начале вопроса, представляет собой один из вариантов задачи о ранце.) Действительно, ряд методов решения задач ЦП можно рассматривать как непосредственное развитие метода укладки ранца или в связи с формулировками вспомогательных подзадач о ранце, решение которых содержит ценную информацию для решения исходной задачи.

2. Модель с постоянными элементами затрат

Рассмотрим задачу, которая характеризуется наличием в составе управляемых переменных «единовременных» затрат (или первоначальных инвестиций) и связана с процессами выбора вариантов при создании или расширении сферы деятельности какого-либо предприятия. Так, управляющий, которому необходимо выбрать один из нескольких возможных типов объектов, например, при закупке оборудования, строительстве автомобильных заводов, бурении нефтяных скважин или освоении земельных участков, должен учитывать не только текущие издержки, связанные с функционированием соответствующих объектов (в том случае, если проекты или решения реализуются), но и начальные единовременные затраты. Этот класс задач принадлежит к числу тех, которые наиболее часто встречаются в практических приложениях производственного характера. Типичная формулировка рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

минимизировать **cx + ay**

при ограничениях

Ax≤**b**, **x≥0, y≥0,**

где векторы **x** и **y** имеют одинаковую размерность, а $x_j > 0$ означает, что $y_j=1$. (Здесь, конечно, не имеется в виду соответствие векторов **c**, **A** и **b** аналогично обозначенным векторам из ранее приведенной общей формулировки задачи ЦП.) Взаимосвязь соотношений $x_j>0$ и $y_j=1$ выражает тот аспект задачи, что изготовление, покупка или обработка некоторого положительного «количества» x_j требует фиксированных затрат a_j (>0). Можно отметить, что из $x_j=0$ автоматически следует $y_j=0$ при любом минимизирующем решении, так как всякий раз, когда $x_j=0$ и $y_j=1$, полагая $y_j=0$, можно всегда получить лучшее решение (не нарушая при этом ни одного из ограничений).

Однако приведенные условия пока еще не приемлемы для окончательной формулировки задачи ЦП, поскольку ограничение «$x_j>0$ означает, что $y_j=1$» является логическим, а не линейным. Чтобы придать формулировке задачи приемлемую структуру, допустим, что существует такая предельная величина U_j, при которой условие $x_j \le U_j$ выполняется для всех значений x_j удовлетворяющих ограничениям $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$. Тогда ограничения вида

$$U_j\, y_j \ge x_j$$

всегда выполняются при $y_j=1$, и, кроме того, если y_j — целое число, то $x_j>0$ означает, что $y_j \ge 1$ и, следовательно, в минимизирующем решении $y_j=1$ (в силу тех же соображений, из которых следовало, что при $x_j = 0$ должно выполняться равенство $y_j = 0$). Таким образом, формулировка рассматриваемой задачи в виде задачи ЦП может быть дана следующим образом:

$$\text{минимизировать } \mathbf{cx}+\mathbf{ay}$$

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x}-\mathbf{Uy} \le \mathbf{0},$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{y} \text{ – целое},$$

$\mathbf{U}=(U_j)$. Чтобы в явном виде показать, что переменная y_j должна принимать значения либо 0, либо 1, можно также добавить ограничение $\mathbf{y} \le \mathbf{e}$ (т. е. $y_j \le 1$ для всех j), однако, как уже отмечалось, при допущении о том, что $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, это делать не обязательно.

3. Задача о гармоничном составе экспедиции и комбинаторная задача о паросочетании

Задача о гармоничном составе экспедиции заключается в следующем. Группа исследователей намерена отправиться в экспедицию, причем желательно, чтобы количество участников экспедиции было максимальным. Однако некоторые из них не ладят друг с другом, и поэтому, если одно из лиц, входящих в конфликтующую пару, отправится в экспедицию, то другому придется остаться дома. Такую задачу можно сформулировать как «0—1» задачу ЦП, определяя переменную x_j следующим образом:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j-\text{е лицо отправляется,} \\ 0, & \text{если } j-\text{е лицо остается.} \end{cases}$$

Тогда цель заключается в том, чтобы

$$\text{максимизировать } \sum x_j$$

при ограничениях

$$x_h + x_k \le 1$$

для всех несовместимых пар лиц h и k. Формулировка задачи становится полной при условиях $1 \ge x_j \ge 0$ и целочисленности x_j при всех j.

Задача о гармоничном составе экспедиции тесно связана с задачей о паросочетании максимальной мощности, рассматриваемой в комбинаторном направлении теории графов. На рис. 1 показан типичный граф, состоящий из узлов (точек) и соединяющих их ребер (линий). Паросочетание такого графа определяется как множество ребер, не имеющих общих точек. Ребра 1 и 4 на рис. 1 образуют паросочетание, а ребра 5 и 7 — нет (так как ребра 5 и 7 имеют общую точку). Паросочетание максимальной мощности определяется как паросочетание, состоящее из максимального числа ребер. Такое определение аналогично определению гармоничного состава экспедиции при условии

$$x_j = \begin{cases} 1, & \textit{когда ребро } j \textit{ входит в паросочетание,} \\ 0, & \textit{когда ребро } j \textit{ не входит в паросочетание,} \end{cases}$$

и ограничении $x_h+x_k \leq 1$для тех пар ребер h, k. которые имеют общую точку.

Обобщенная задача о гармоничном составе экспедиции получается при введении оценок «полезности» d_j каждого лица j и построении целевой функции, максимизирующей общую

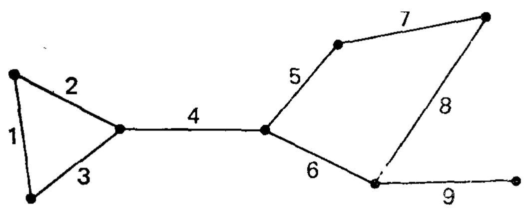

Рис. 1.

полезность $\sum d_j x_j$ экспедиции, а не количество участников экспедиции. Обобщение соответствующей задачи теории графов приводит к задаче о паросочетании максимального веса и связано с приписыванием каждому ребру некоторого веса и постановкой вопроса об отыскании такого паросочетания, общий вес ребер которого максимален. Легко усмотреть и другие обобщения рассматриваемой задачи. Например, в задаче о гармоничной экспедиции можно считать, что каждая «несовместимая» группа состоит не из двух, а из некоторого множества лиц. Если $\boldsymbol{S}$ означает такое множество, а | $\boldsymbol{S}$ | — число элементов этого множества, то ограничения задачи можно усилить за счет требования

$$\sum_{j \in S} x_j \leq |S| - 1$$

означающего, что по крайней мере одно из лиц, входящих в конфликтующую группу, должно остаться дома.

4. Задача об эффективной экспедиции и комбинаторная задача о покрытии

В задаче об эффективной экспедиции группа исследователей стремится *минимизировать* число участников экспедиции. Однако экспедиции предстоит выполнение нескольких обязательных видов работ, поэтому для ее успеха необходимо, чтобы для каждой из таких работ в составе участников было по крайней мере одно лицо, способное к ее выполнению. Определяя переменную x_j так же, как в предыдущей задаче, и обозначая через S_i множество лиц, способных к выполнению i-го вида работ, приходим к следующей формулировке задачи:

$$\text{минимизировать } \sum x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in S_i} x_j \geq 1 .$$

Как и раньше, формулировка задачи заканчивается введением неравенств $1 \geq x_j \geq 0$ и условия целочисленности x_j.

Существует тесная связь рассмотренной задачи (и это можно было бы предположить) с соответствующей задачей комбинаторного направления теории графов, которая в данном случае называется *задачей о покрытии наименьшей мощности. По-*

крытием называется множество ребер, узлы которых включают все узлы графа. Так, в графе, представленном на рис. 1. ребра 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 образуют покрытие, а ребра 1, 3. 5 и 9 — нет (так как не хватает ребра, покрывающего узел, общий для ребер 7 и 8). Покрытием наименьшей мощности называется покрытие, которое содержит наименьшее число ребер; его определение аналогично формулировке задачи об эффективной экспедиции: x_j определяется так же, как и в задаче о паросочетании, а через S_i обозначается множество ребер, пересекающихся в узле i (для каждого узла графа это дает одно ограничение).

Непосредственное обобщение этих задач состоит в приписывании ребрам определенных весов и требовании многократного покрытия узлов.

5. Задача о доставке.

Некоторая фирма каждый день доставляет своим клиентам товары на грузовых машинах (или по железной дороге, воздушным путем, на баржах и т. д.). Существует множество допустимых маршрутов доставки, каждый из которых позволяет обслужить определенное подмножество клиентов и требует использования в течение дня одного транспортного средства. Каждый маршрут характеризуется определенными расходами, которые могут соответствовать его длине, или стоимости расходуемого топлива и т. д. Цель состоит в том, чтобы выбрать такое множество маршрутов, при котором обеспечивается обслуживание каждого из клиентов и, кроме того, суммарные расходы минимальны.

Введем переменную

$$x_j = \begin{cases} 1, & \textit{если маршрут } j \textit{ выбран}, \\ 0 & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

и сформируем матрицу **A**, j-й столбец которой имеет (постоянные) элементы

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если клиент обслуживается по маршруту } j, \\ 0 & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

Если обозначить стоимость доставки по маршруту j через c_j, то задача о доставке приобретает вид

минимизировать **cx**

при ограничениях

$$\mathbf{Ax} = \boldsymbol{e},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ и целое},$$

где, как и раньше, **e** — единичный вектор (в данном случае вектор-столбец). Задача о доставке может также содержать и ограничение вида

$$\sum x_j \leq k\,,$$

которое определяет максимально возможное число выбираемых маршрутов (если, например, фирма ежедневно может выпускать на линию не более k грузовиков).

Отметим, что в силу специфичной формы матрицы **A** из ограничений «$\mathbf{Ax}=\boldsymbol{e},\ \mathbf{x}\geq \mathbf{0}$ и целые» автоматически следует x_j=0 или 1 для каждого j (это будет справедливо и в том случае, если условие **Ax**=**e** заменить на **Ax≤e**). В рассматриваемой задаче, конечно, сделано допущение об отсутствии в матрице **A** полностью нулевых столбцов (наличие нулевых столбцов соответствовало бы маршруту, на котором нет ни одного клиента). Уравнение в матричной форме **Ax**=**e** устанавливает, что каждый из клиентов обслуживается один раз в день.

<u>Вопросы для самопроверки.</u>

1. Дайте определение детерминированной модели. Укажите ее основные отличия от моделей других типов.
2. Можно ли исследовать с помощью детерминированной модели затраты транспортного предприятия? Можно ли представить детерминированной моделью число заявок на обслуживание клиентов в день? А в месяц?
3. Чем отличается гармонический процесс от полигармонического?
4. Чему равно значение фундаментальной частоты повторения полигармонического процесса?
5. В каком случае сумма двух гармонических периодических процессов будет процессом непериодическим?
6. Приведите пример экономического или хозяйственного явления, которое можно представить полигармонической моделью.
7. Приведите примеры переходных процессов в экономике.
8. Запишите типовую формулировку *линейной модели* и *задачи линейного программирования*. Какова ее экономическая интерпретация?
9. Каковы основные допущения, принимаемые при построении линейной модели?
10. Дайте формулировку *транспортной задаче* линейного программирования. Что при этом выступает в роли *целевой функции*, а что – в роли *ограничений*?
11. В чем заключается суть *симплекс-метода* (метода последовательного улучшения плана?).
12. Дайте геометрическую интерпретацию оптимального решения задачи линейного программирования.
13. Назовите известные вам методы решения транспортной задачи.
14. Что такое *система независимых нулей?*
15. Что включает в себя подготовительный этап решения транспортной задачи венгерским методом?
16. Что такое *целочисленное программирование*?
17. Назовите известные вам виды целочисленных задач.