ТЕМА 11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ

Задача 6. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

1 $y=\frac{3}{x}$; $y=4e^{x}$; $y=3$; $y=4$

2 $x=\sqrt{36-y^2}$; $x=6-\sqrt{36-y^2}$.

3 $x^2+y^2=72$; $6y=-x^2$ $(y\le 0)$

4 $x=8-y^2$; $x=-2y$

5 $y=\frac{3}{x}$; $y=8e^{x}$; $y=3$; $y=8$

6 $y=\frac{\sqrt{x}}{2}$; $y=\frac{1}{2x}$; $x=16$

7 $x=5-y^2$; $x=-4y$

8 $x^2+y^2=12$; $-\sqrt{6}y=x^2$ $(y\le 0)$

9 $y=\sqrt{12-x^2}$; $y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}$; $x=0$; $x\ge 0$

10 $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; $y=\frac{3}{2x}$; $x=9$

11 $y=\sqrt{24-x^2}$; $2\sqrt{3}y=x^2$; $x=0(x\ge 0)$

12 $y=\sin x$; $y=\cos x$; $x=0(x\ge 0)$

13 $y=20-x^2$; $y=-8x$

14 $y=\sqrt{18-x^2}$; $y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$

15 $y=32-x^2$; $y=-4x$

16 $y=\frac{2}{x}$; $y=5e^{x}$; $y=2$; $y=5$

17 $x^2+y^2=36$; $3\sqrt{2}\cdot y=x^2$ $(y\ge 0)$

18 $y=3\sqrt{x}$; $y=\frac{3}{x}$; $x=4$

19 $y=6-\sqrt{36-x^2}$ $x=0(x\ge 0)$
$y=\sqrt{36-x^2}$

20 $y=\frac{25}{4}-x^2$; $y=x-\frac{5}{2}$

21 $y=\sqrt{x}$; $y=\frac{1}{x}$; $x=16$

22 $y=\frac{2}{x}$; $y=7e^{x}$; $y=2$; $y=7$

23 $x=27-y^2$; $x=-6y$

24 $x=\sqrt{72-y^2}$; $6x=y^2$; $y=0(y\ge 0)$

25 $y=\sqrt{6-x^2}$; $y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$

26 $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; $y=\frac{3}{2x}$; $x=4$

27 $y=\sin x$; $y=\cos x$; $x=0(x\le 0)$

28 $y=\frac{1}{x}$; $y=6e^{x}$; $y=1$; $y=6$

29 $y=3\sqrt{x}$; $y=\frac{3}{x}$; $x=9$

30 $y=11-x^2$; $y=-10x$

31 $x^2+y^2=12$; $x\sqrt{6}=y^2$ $(x\ge 0)$

32 $y=(x-2)^3$; $y=4x-8$

33 $y=x\sqrt{9-x^2}$; $y=0$ $(0\le x\le 3)$

34 $y=4-x^2$; $y=x^2-2x$

35 $y=\sin x\cos^2 x$; $y=0$ $(0\le x\le \frac{\pi}{2})$

36 $y=\sqrt{4-x^2}$; $y=0$; $x=0$; $x=1$

37 $y=x^2\sqrt{4-x^2}$; $y=0$; $(0\le x\le 2)$

38 $y=\cos x\sin^2 x$; $y=0$ $(0\le x\le \frac{\pi}{2})$

39 $y=\sqrt{e^x-1}$; $y=0$; $x=\ln 2$

40 $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln 2}}$; $y=0$; $x=1$; $x=e^3$

41 $y=\arccos x$; $y=0$; $x=0$

42 $y=(x+1)^2$; $y^2=x+1$

43 $y=2x-x^2+3$; $y=x^2-4x+3$

44 $y=x\sqrt{36-x^2}$; $y=0$ $(0\le x\le 6)$

45 $x=\arccos y$; $x=0$; $y=0$

46 $y=x\ arctg\ x$; $y=0$; $x=\sqrt{3}$

47 $y=x^2\sqrt{8-x^2}$; $y=0$ $(0\le x\le 2\sqrt{2})$

48 $x=\sqrt{e^y-1}$; $x=0$; $y=\ln 2$

49 $y=x\sqrt{4-x^2}$; $y=0$ $(0\le x\le 2)$

50 $y=\frac{x}{1+\sqrt{x}}$; $y=0$; $x=1$

51 $y=\frac{1}{1+\cos x}$; $y=0$; $x=\frac{\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{2}$

52 $x=(y-2)^3$; $x=4y-8$

53 $y=\cos^5 x\sin 2x$; $y=0$; $(0\le x\le \frac{\pi}{2})$

54 $y=\frac{x}{(x^2+1)^2}$; $y=0$; $x=1$

55 $x=4-y^2$; $x=y^2-2y$

56 $x=\frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$; $x=0$; $y=1$; $y=e^3$

57 $y=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $y=0$; $x=1$; $x=2$

58 $y=x^2\sqrt{16-x^2}$; $y=0$ $(0\le x\le 4)$

59 $x=\sqrt{4-y^2}$; $x=0$; $y=0$; $y=1$

60 $y=(x-1)^2$; $y^2=x-1$

Задача 7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

1 $y^2-2y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-4y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

2 $x^2-4x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-8x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$

3 $y^2-6y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-8y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

4 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=x$

5 $y^2-8y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-10y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

6 $x^2-4x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-8x+y^2=0$; $y=x$

7 $y^2-4y+x^2=0$; $y=x$; $y^2-6y+x^2=0$; $x=0$

8 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-10x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

9 $y^2-6y+x^2=0$; $y=x$; $y^2-10y+x^2=0$; $x=0$

10 $x^2-2x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

11 $y^2-2y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$; $y^2-4y+x^2=0$; $x=0$

12 $y^2-2y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-4y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

13 $y^2-4y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$; $y^2-6y+x^2=0$; $x=0$

14 $x^2-2x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-8x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

15 $y^2-2y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-6y+x^2=0$; $x=0$

16 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$

17 $y^2-2y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-10y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

18 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-6x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$

19 $y^2-4y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-10y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

20 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-6x+y^2=0$; $y=x$

21 $y^2-2y+x^2=0$; $y=x$; $y^2-4y+x^2=0$; $x=0$

22 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

23 $y^2-6y+x^2=0$; $y=x$; $y^2-8y+x^2=0$; $x=0$

24 $x^2-4x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-8x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

25 $y^2-4y+x^2=0$; $y=x$; $y^2-8y+x^2=0$; $x=0$

26 $x^2-4x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-8x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

27 $y^2-4y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$; $y^2-8y+x^2=0$; $x=0$

28 $x^2-4x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-6x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

29 $y^2-2y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-10y+x^2=0$; $x=0$

30 $x^2-6x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-10x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

31 $y^2-4y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-8y+x^2=0$; $x=0$

32 $x^2-4x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-8x+y^2=0$; $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$

33 $y^2-6y+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-8y+x^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$

34 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=-x$

35 $y^2-8x+x^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-10y+x^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$

36 $x^2-4x+y^2=0$; $y=0$ $x^2-8x+y^2=0$; $y=-x$

37 $y^2-4y+x^2=0$; $y=-x$; $y^2-6y+x^2=0$; $x=0$

38 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-10x+y^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$

39 $y^2-6y+x^2=0$; $y=-x$; $y^2-10y+x^2=0$ $x=0$

40 $x^2-2x+y^2=0$; $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

41 $y^2-2y+x^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$; $y^2-4y+x^2=0$; $x=0$

42 $x^2-2x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-6x+y^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$

43 $y^2-4y+x^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$; $y^2-6y+x^2=0$; $x=0$

44 $x^2-2x+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-8x+y^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$

45 $y^2-2y+x^2=0$; $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-6y+x^2=0$; $x=0$

46 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$

47 $y^2-2y+x^2=0$; $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-10y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

48 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-6x+y^2=0$; $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$

49 $y^2-4y+x^2=0$; $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-10y+x^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

50 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-6x+y^2=0$; $y=-x$

51 $y^2-2y+x^2=0$; $y=-x$; $y^2-4y+x^2=0$; $x=0$

52 $x^2-2x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-4x+y^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$

53 $y^2-6y+x^2=0$; $y=-x$; $y^2-8y+x^2=0$; $x=0$

54 $x^2-4x+y^2=0$; $y=0$; $x^2-8x+y^2=0$ $y=-x\sqrt{3}$

55 $y^2-4y+x^2=0$; $y=-x$; $y^2-8y+x^2=0$; $x=0$

56 $x^2-4x+y^2=0$; $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-8x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

57 $y^2-4y+x^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$; $y^2-8y+x^2=0$; $x=0$

58 $x^2-4x+y^2=0$; $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-6y+y^2=0$; $y=-x\sqrt{3}$

59 $y^2-2y+x^2=0$; $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $y^2-10y+x^2=0$; $x=0$

60 $x^2-6x+y^2=0$; $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; $x^2-10x+y^2=0$; $y=x\sqrt{3}$

Задача 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

1 $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$; $x=2 \quad (x\ge 2)$

2 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$; $y=2 \quad (y\ge 2)$

3 $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \quad (y\ge 4) \\ y=4(1-\cos t) \quad y=4 \quad (0\le t\le 8\pi) \end{cases}$

4 $\begin{cases} x=16\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ $x=2 \ (x\ge 2)$

5 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=6\sin t \quad y=3 \ (y\ge 3) \end{cases}$

6 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \quad y=3(y\ge 3) \\ y=2(1-\cos t) \quad (0\le x\le 4\pi) \end{cases}$

7 $\begin{cases} x=16\cos^3 t \quad x=6\sqrt{3} \\ y=\sin^3 t \quad (x\ge 6\sqrt{3}) \end{cases}$

8 $\begin{cases} x=6\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$ $y=\sqrt{3}(y\ge\sqrt{3})$

9 $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \quad y=3(y\ge 3) \\ y=3(1-\cos t) \quad (0\le t\le 6\pi) \end{cases}$

10 $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t \quad x=4(x\ge 4) \end{cases}$

11 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 3$ $(y \ge 3)$

12 $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 9(y \ge 9)$ $(0 \le t \le 2\pi)$

13 $\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $x = 4(x \ge 4)$

14 $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$ $y = 4(y \ge 4)$

15 $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 6(y \ge 6)$ $(0 \le t \le 12\pi)$

16 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}(x \ge 3\sqrt{3})$

17 $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}(y \ge 2\sqrt{3})$

18 $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 15(y \ge 15)$ $(0 \le t \le 20\pi)$

19 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1(x \ge 1)$

20 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 4\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 4(y \ge 4)$

21 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $y = 1(y \ge 1)$ $(0 \le t \le 2\pi)$

22 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1(x \ge 1)$

23 $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $y = 2(y \ge 2)$

24 $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 12(y \ge 12)$ $(0 \le x \le 16\pi)$

25 $\begin{cases} x = 24\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3}(x \ge 9\sqrt{3})$

26 $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$ $y = 4\sqrt{3}(y \ge 4\sqrt{3})$

27 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 2(y \ge 2)$ $(0 \le x \le 4\pi)$

28 $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = 2(x \ge 2)$

29 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 5\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 5 (y \ge 5)$

30 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 6 (y \ge 6)$ $(0 \le x \le 8\pi)$

31 $\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ $x = 12\sqrt{3} (x \ge 12\sqrt{3})$

32 $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$ $y = 3\sqrt{3} (y \ge 3\sqrt{3})$

33 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 6$ $(0 \le x \le 8\pi; y \ge 6)$

34 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 4\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1 (x \ge 1)$

35 $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 10\sin t \end{cases}$ $y = 5 (y \ge 5)$

36 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 1$ $(0 \le x \le 4\pi; y \ge 1)$

37 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 16\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1 (x \ge 1)$

38 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ $(y \ge \frac{3}{\sqrt{2}})$

39 $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = \frac{3}{2}$ $(0 \le x \le 6\pi; y \ge \frac{3}{2})$

40 $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $x = \frac{1}{2}$ $(x \ge \frac{1}{2})$

41 $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $y = 1$ $(y \ge 1)$

42 $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 3$ $(0 \le x \le 12\pi; y \ge 3)$

43 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $x = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ $(x \ge \frac{3\sqrt{3}}{4})$

44 $\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\cos t \\ y = 6\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 3\sqrt{2}$ $(y \ge 3\sqrt{2})$

45 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 2$ $(0 \le x \le 8\pi; y \ge 2)$

46 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = \sqrt{2}$ $(x \ge \sqrt{2})$

47 $\begin{cases} x = 10\cos t \\ y = 4\sqrt{3}\sin t \end{cases}$ $y = 6 \quad (y \geq 6)$

48 $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 5 \quad (0 \leq x \leq 20\pi; y \geq 5)$

49 $\begin{cases} x = 12\cos^3 t \\ y = 18\sin^3 t \end{cases}$ $x = \frac{3}{2} \quad (x \geq \frac{3}{2})$

50 $\begin{cases} x = 8\cos t \\ y = 9\sin t \end{cases}$ $y = \frac{9}{2} \quad (y \geq \frac{9}{2})$

51 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $y = \frac{3}{2} \quad (0 \leq x \leq 2\pi; y \geq \frac{3}{2})$

52 $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ $x = \frac{3}{4} \quad (x \geq \frac{3}{4})$

53 $\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = \sqrt{6} \quad (y \geq \sqrt{6})$

54 $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 4 \quad (0 \leq x \leq 16\pi; y \geq 4)$

55 $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ $x = 0 \quad (x \geq 0)$

56 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ $y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3})$

57 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 3 \quad (0 \leq x \leq 4\pi; y \geq 3)$

58 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ $x = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (x \geq \frac{3\sqrt{3}}{8})$

59 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 2\sqrt{2} \quad (y \geq 2\sqrt{2})$

60 $\begin{cases} x = 12(t - \sin t) \\ y = 12(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 18 \quad (0 \leq x \leq 24\pi; y \geq 18)$

Задача 9. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

1 $\rho = 4\cos 3\varphi$; $\rho = 2 \quad (\rho \geq 2)$

2 $\rho = \cos 2\varphi$

3 $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi$; $\rho = \sin\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$

4 $\rho = 4\sin 3\varphi$; $\rho = 2 \quad (\rho \geq 2)$

5 $\rho = 2\cos\varphi$; $\rho = 2\sqrt{3}\sin\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$

6 $\rho = \sin 3\varphi$

7 $\rho = 6\sin 3\varphi$; $\rho = 3 \ (\rho \geq 3)$

8 $\rho = \cos 3\varphi$

9 $\rho = \cos\varphi$; $\rho = \sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$ $(-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

10 $\rho = \sin\varphi$; $\rho = \sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$ $(0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{4})$

11 $\rho = 6\cos 3\varphi$; $\rho = 3\ (\rho \ge 3)$

12 $\rho = \frac{1}{2} + \sin\varphi$

13 $\rho = \cos\varphi$; $\rho = \sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

14 $\rho = \sqrt{2}\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$; $\rho = \sqrt{2}\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})$ $(\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4})$

15 $\rho = \cos\varphi$; $\rho = 2\cos\varphi$

16 $\rho = \sin\varphi$; $\rho = 2\sin\varphi$

17 $\rho = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$

18 $\rho = \frac{1}{2}\cos\varphi$

19 $\rho = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$

20 $\rho = \frac{3}{2}\sin\varphi$; $\rho = \frac{5}{2}\sin\varphi$

21 $\rho = \frac{3}{2}\cos\varphi$; $\rho = \frac{5}{2}\cos\varphi$

22 $\rho = 4\cos 4\varphi$

23 $\rho = \cos 6\varphi$

24 $\rho = 2\cos\varphi$; $\rho = 3\sin\varphi$

25 $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$

26 $\rho = 2\sin 4\varphi$

27 $\rho = 2\cos 6\varphi$

28 $\rho = \cos\varphi - \sin\varphi$

29 $\rho = 3\sin\varphi$; $\rho = 5\sin\varphi$

30 $\rho = 2\sin\varphi$; $\rho = 4\sin\varphi$

31 $\rho = 4\sin\varphi$; $\rho = 6\sin\varphi$

32 $\rho = \cos\varphi$; $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\rho \ge \frac{1}{\sqrt{2}})$

33 $\rho = \sin\varphi$; $\rho = \frac{1}{2}$ $(\rho \ge \frac{1}{2})$

34 $\rho = \cos 2\varphi$; $\rho = 3\cos 2\varphi$

35 $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\varphi$

36 $\rho = 3\cos\varphi$; $\rho = \frac{3}{2}$ $(\rho \ge \frac{3}{2})$

37 $\rho = 3\sin\varphi$; $\rho = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $(\rho \ge \frac{3\sqrt{3}}{2})$

38 $\rho=\sin 2\varphi$; $\rho=5\sin 2\varphi$

39 $\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\varphi$

40 $\rho=6\cos\varphi$; $\rho=3\sqrt{3}\quad(\rho\geq 3\sqrt{3})$

41 $\rho=4\sqrt{2}\sin\varphi$; $\rho=4\ (\rho\geq 4)$

42 $\rho=\cos 4\varphi$; $\rho=2\cos 4\varphi$

43 $\rho=1+\sin\varphi$

44 $\rho=\cos 5\varphi$; $\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(\rho\geq\frac{1}{\sqrt{2}})$

45 $\rho=\sin 4\varphi$; $\rho=3\sin 4\varphi$

46 $\rho=1+\cos\varphi$

47 $\rho=\sin 5\varphi$; $\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(\rho\geq\frac{1}{\sqrt{2}})$

48 $\rho=2\cos 3\varphi$; $\rho=4\cos 3\varphi$

49 $\rho=\frac{1}{2}+\cos 2\varphi$

50 $\rho=4\cos 5\varphi$; $\rho=2\quad(\rho\geq 2)$

51 $\rho=4\sin 3\varphi$; $\rho=6\sin 3\varphi$

52 $\rho=\frac{1}{2}+\sin 2\varphi$

53 $\rho=4\sin 5\varphi$; $\rho=2\sqrt{3}\quad(\rho\geq 2\sqrt{3})$

54 $\rho=3\cos 5\varphi$; $\rho=5\cos 5\varphi$

55 $\rho=1+\cos 2\varphi$

56 $\rho=\sqrt{6}\cos 5\varphi$; $\rho=\frac{3\sqrt{2}}{2}\quad(\rho\geq\frac{3\sqrt{2}}{2})$

57 $\rho=2\sin 5\varphi$; $\rho=4\sin 5\varphi$

58 $\rho=1+\sin 2\varphi$

59 $\rho=6\sin 5\varphi$; $\rho=3\quad(\rho\geq 3)$

60 $\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2\varphi$

Задача 10. Найти длину кривой, заданной параметрически

1 $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}\quad(0\leq t\leq\pi)$

2 $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t) \\ y=3(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}\quad(0\leq t\leq 2\pi)$

3 $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t) \\ y=4(\sin t-t\cos t) \end{cases}\quad(0\leq t\leq 2)$

4 $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \end{cases}\quad(0\leq t\leq\pi)$

5 $\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

6 $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$

7 $x = 3(t - \sin t)$

$y = 3(1 - \cos t) \quad (\pi \le t \le 2\pi)$

8 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{cases} \quad (\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3})$

9 $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{3})$

10 $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{3})$

11 $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{3})$

12 $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad (\frac{\pi}{2} \le t \le \pi)$

13 $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t) \\ y = 2{,}5(1 - \cos t) \end{cases} \quad (\frac{\pi}{2} \le t \le \pi)$

14 $\begin{cases} x = 3.5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3.5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

15 $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$

16 $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

17 $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{6})$

18 $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

19 $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} \quad (\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3})$

20 $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{3})$

21 $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{4})$

22 $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \end{cases} (0\le t\le 2\pi)$

23 $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases} (\frac{\pi}{6}\le t\le \frac{\pi}{4})$

24 $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t) \end{cases} (0\le t\le \frac{3\pi}{2})$

25 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases} (0\le t\le \frac{\pi}{2})$

26 $\begin{cases} x=4(2\cos t-\cos 2t) \\ y=4(2\sin t-\sin 2t) \end{cases} (0\le t\le \pi)$

27 $\begin{cases} x=2(\cos t+t\sin t) \\ y=2(\sin t-t\cos t) \end{cases} (0\le t\le \frac{\pi}{2})$

28 $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \end{cases} (0\le t\le 3\pi)$

29 $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases} (0\le t\le \frac{\pi}{4})$

30 $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t) \end{cases} (\frac{\pi}{6}\le t\le \frac{\pi}{4})$

31 $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \end{cases} (0\le t\le \pi)$

32 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases} (0\le t\le \frac{3\pi}{2})$

33 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases} (0\le t\le \frac{\pi}{4})$

34 $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases} (0\le t\le \frac{\pi}{3})$

35 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases} (0\le t\le \frac{\pi}{4})$

36 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases} (0\le t\le \sqrt{3})$

37 $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases} (0\le t\le \ln\pi)$

38 $\begin{cases} x=e^{2t}(\cos t+\sin t) \\ y=e^{2t}(\cos t-\sin t) \end{cases} (0\le t\le \frac{\pi}{2})$

39 $\begin{cases} x=5\cos^3 t \\ y=5\sin^3 t \end{cases} (0\le t\le \frac{\pi}{2})$

40 $\begin{cases} x = 1.5(t - \sin t) \\ y = 1.5(1 - \cos t) \end{cases} (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

41 $\begin{cases} x = 2.5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2.5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases} (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

42 $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases} (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

43 $\begin{cases} x = \sqrt{3}t^2 \\ y = t - t^3 \quad (0 \le t \le 1) \end{cases}$

44 $\begin{cases} x = e^{2t}\cos t \\ y = e^{2t}\sin t \quad (0 \le t \le \ln\sqrt{\pi}) \end{cases}$

45 $\begin{cases} x = e^{3t}(\cos t + \sin t) \\ y = e^{3t}(\cos t - \sin t) \end{cases} (0 \le t \le \frac{2\pi}{3})$

46 $\begin{cases} x = 6t^2 \\ y = 6t - 2t^3 \quad (0 \le t \le 2) \end{cases}$

47 $\begin{cases} x = e^{3t}\cos t \\ y = e^{3t}\sin t \quad (0 \le t \le \ln\sqrt[3]{\pi}) \end{cases}$

48 $\begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}t}(\cos t + \sin t) \\ y = e^{\frac{1}{2}t}(\cos t - \sin t) \quad (0 \le t \le 2\pi) \end{cases}$

49 $\begin{cases} x = 3.5(t - \sin t) \\ y = 3.5(1 - \cos t) \end{cases} (\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2})$

50 $\begin{cases} x = 4.5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4.5(2\sin t - \sin 2t) \quad (0 \le t \le \pi) \end{cases}$

51 $\begin{cases} x = 5(\cos t + t\sin t) \\ y = 5(\sin t - t\cos t) \quad (0 \le t \le \pi) \end{cases}$

52 $\begin{cases} x = 9t^2 \\ y = 9t - 3t^3 \quad (0 \le t \le \sqrt{2}) \end{cases}$

53 $\begin{cases} x = 8\cos t - 6\sin t \\ y = 6\cos t + 8\sin t \end{cases} (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

54 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \quad (0 \le t \le 3) \end{cases}$

55 $\begin{cases} x = e^{4t}\cos t \\ y = e^{4t}\sin t \quad (0 \le t \le \ln\sqrt[4]{\pi}) \end{cases}$

56 $\begin{cases} x = e^{5t}(\cos t + \sin t) \\ y = e^{5t}(\cos t - \sin t) \end{cases} (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

57 $\begin{cases} x = 12t^2 \\ y = 12t - 4t^3 \quad (0 \le t \le 1) \end{cases}$

58 $\begin{cases} x = 7(\cos t + t\sin t) \\ y = 7(\sin t - t\cos t) \ (0 \le t \le 2\pi) \end{cases}$

59 $\begin{cases} x = 4.5(t - \sin t) \\ y = 4.5(1 - \cos t) \ (\pi \le t \le 2\pi) \end{cases}$

60 $\begin{cases} x = e^{2.5t}\cos t \\ y = e^{2.5t}\sin t \quad (0 \le t \le \frac{2}{5}\ln\pi) \end{cases}$

Задача 11. Найти длину кривой, заданной в полярной системе координат

1 $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}} \quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

2 $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}} \quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

3 $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi} \quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

4 $\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}} \ (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

5 $\rho = 6e^{\frac{12\varphi}{5}} \quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

6 $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}} \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3})$

7 $\rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}} \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3})$

8 $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi} \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3})$

9 $\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}} \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3})$

10 $\rho = 12e^{\frac{12\varphi}{5}} \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3})$

11 $\rho = 1 - \sin\varphi$
$(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6})$

12 $\rho = 2(1 - \cos\varphi) \ (-\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2})$

13 $\rho = 3(1 + \sin\varphi) \ (-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0)$

14 $\rho = 4(1 - \sin\varphi) \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6})$

15 $\rho = 5(1 - \cos\varphi) \ (-\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0)$

16 $\rho = 6(1 + \sin\varphi) \ (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0)$

17 $\rho = 7(1 - \sin\varphi) \ (-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6})$

18 $\rho = 8(1 - \cos\varphi)$
$(-\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le 0)$

19 $\rho = 2\varphi \quad (0 \ge \varphi \le \frac{3}{4})$

20 $\rho = 2\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{4}{3})$

21 $\rho = 2\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{5}{12})$

22 $\rho = 2\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{12}{5})$

23 $\rho = 4\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{3}{4})$

24 $\rho = 3\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{4}{3})$

25 $\rho = 5\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{12}{5})$

26 $\rho = 2\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6})$

27 $\rho = 8\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$

28 $\rho = 6\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3})$

29 $\rho = 2\sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6})$

30 $\rho = 8\sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$

31 $\rho = 6\sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3})$

32 $\rho = 2\cos^3\frac{\varphi}{3} \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

33 $\rho = 2\sin^3\frac{\varphi}{3} \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

34 $\rho = 2(1-\sin\varphi) \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

35 $\rho = 1+\sin\varphi \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

36 $\rho = 1-\cos\varphi \ (0 \le \varphi \le \pi)$

37 $\rho = 2(1+\cos\varphi) \ (0 \le \varphi \le \pi)$

38 $\rho = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} \ (0 \le \varphi \le \pi)$

39 $\rho = 4\sin^3\frac{\varphi}{3} \ (0 \le \varphi \le \pi)$

40 $\rho = 5(1-\sin\varphi) \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6})$

41 $\rho = 2\cos^4\frac{\varphi}{4} \ (0 \le \varphi \le 2\pi)$

42 $\rho = 4(1+\sin\varphi) \ (0 \le \varphi \le \pi)$

43 $\rho = 2\sin^4\frac{\varphi}{4} \ (0 \le \varphi \le 2\pi)$

44 $\rho = 6(1-\sin\varphi) \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

45 $\rho = 5(1+\sin\varphi) \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

46 $\rho = 4\cos^4\frac{\varphi}{4} \ (0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3})$

47 $\rho = 4\sin^4\frac{\varphi}{4} \ (0 \le \varphi \le \frac{4\pi}{3})$

48 $\rho = 4(1-\cos\varphi) \quad (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

49 $\rho = 4(1+\cos\varphi) \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

50 $\rho = 6\cos^3\frac{\varphi}{3} \quad (0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2})$

51 $\rho = 6\sin^3\frac{\varphi}{3} \ (0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2})$

52 $\rho = 8(1-\sin\varphi) \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6})$

53 $\rho = 6(1-\cos\varphi) \ (0 \le \varphi \le \pi)$

54 $\rho = 6(1+\cos\varphi) \ (0 \le \varphi \le \pi)$

55 $\rho = 8\cos^3\frac{\varphi}{3} \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

56 $\rho = 8\sin^3\frac{\varphi}{3} \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

57 $\rho = 6\cos^4\frac{\varphi}{4} \ (0 \le \varphi \le \pi)$

58 $\rho = 6\sin^4\frac{\varphi}{4} \ (0 \le \varphi \le \pi)$

59 $\rho = 8(1+\cos\varphi) \ (0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$

60 $\rho = 2.5\cos\varphi \ (-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$

Задача 12. Найти объем тела вращения вокруг оси OX (задачи 1-16, 33-36, 38-39, 41-44, 46-50, 53-59) или вокруг оси OY (задачи 17-31, 32, 37, 40, 45, 51-57, 60)

1 $y = -x^2 + 5x - 6$; $y = 0$

2 $2x - x^2 - y = 0$; $2x^2 - 4x + y = 0$

3 $y = \sin x$; $y = 3\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$

4 $y = 5\cos x$; $y = \cos x$ $x = 0 \quad (x \ge 0)$

5 $y = \sin^2 x\,;\, x = \frac{\pi}{2}\,;\, y = 0$

6 $x = \sqrt[3]{y-2}\,;\ x = 1;\ y = 1$

7 $y = xe^x;\ y = 0;\ x = 1$

8 $y = 2x - x^2; y = -x + 2; x = 0$

9 $y = 2x - x^2; y = -x + 2$

10 $y = e^{1-x}; y = 0; x = 0; x = 1$

11 $y = x^2;\ y^2 = x$

12 $x^2 + (y-2)^2 = 1$

13 $y = 1 - x^2; x = 0; x = 1;\ x = \sqrt{y-2}$

14 $y = x^2;\quad y = 1;\quad x = 2$

15 $y = x^3;\ y = \sqrt{x}$

16 $y = \sin\frac{\pi x}{2};\ y = x^2$

17 $y = \arccos x\,;\ y = \arccos\frac{x}{3};\ y = 0$

18 $y = \arcsin\frac{x}{5};\ y = \frac{\pi}{2};\ y = \arcsin x\,;$

19 $y = x^2;\ y = 0;\ x = 2$

20 $y = x^2 + 1; y = x; x = 0; x = 1$

21 $y=\sqrt{x-1}$; $y=0$; $y=1$; $x=\frac{1}{2}$

22 $y=\ln x$; $y=0$; $x=2$

23 $y=(x-1)^2$; $y=1$

24 $y^2=x-2$; $y=x^3$; $y=0$; $y=1$

25 $y=x^3$; $y=x^2$

26 $y=\arccos\frac{x}{5}$; $y=\arccos\frac{x}{3}$; $y=0$

27 $y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=0$

28 $y=x^2-2x+1$; $y=0$; $x=2$

29 $y=x^3$; $y=x$

30 $y=\arccos x$; $y=\arcsin x$; $x=0$

31 $y=(x-1)^2$; $y=0$; $x=0$; $x=2$

32 $y=\sqrt{4-x^2}$; $y=x$; $x=0$

33 $y=\sqrt{x}e^x$; $x=1$; $y=0$

34 $x^2+y^2=1$; $y^2=\frac{3}{2}x$; $y=0$

35 $y=\sqrt{8-x^2}$; $y=x$; $y=0$

36 $y=-x^2+6x-8$; $y^2=x-2$; $x=4$

37 $x^2+y^2=2$; $y^2=x$; $x=0$; $x\geq 0$

38 $y=\sin x$; $y=\cos\frac{x}{2}$ $(0\leq x\leq\pi)$; $y=0$

39 $y=\frac{1}{x}$; $y=x$; $x=1$; $x=2$

40 $y=e^{x^2}$; $x+y-e-1=0$; $x=0$

41 $y=1+\cos 2x$; $x=0(x\geq 0)$; $y=\frac{4}{\pi}x$

42 $y=1+\sin x$; $y=\sin x$; $x=0$; $x=\pi$

43 $y=3^x$; $4y-3x-9=0$; $x=0$

44 $y=(x-2)^2$; $y=4x-2x^2$; $y=0$

45 $y=x^2+2$; $y=4-x$; $x=0$ $(x\geq 0)$

46 $y=-x^2+8x-12$; $y=0$

47 $y=(x-2)^2$; $y=4$

48 $y=\cos x$; $y=\cos 2x$; $y=0$ $(0\leq x\leq\frac{\pi}{2})$

49 $y=(x-2)^2$; $y=4-x$

50 $y=\sin 2x$; $y=\sin x$; $y=0$ $(0\leq x\leq\frac{\pi}{2})$

51 $y=\ln x$; $y=2-\ln x$; $y=0$

52 $y=\ln x$; $y=\ln(3-x)$; $y=0$

53 $y=e^x$; $y=e^{2-x}$; $x=0$ $(x\geq 0)$

54 $y=\frac{8}{x}$; $y=x^2$; $x=1$

55 $y=\frac{4}{x}$; $y^2=2x$; $x=1$

56 $y=1+\cos x$; $y=\sin x$; $x=0$ $(x\geq 0)$

57 $y=\sin\frac{x}{2}$; $y=1+\cos\frac{x}{2}$; $x=0$ $(x\geq 0)$

58 $y=tg\ x$; $y=\frac{4}{\pi}x$ $(0\leq x\leq\frac{\pi}{4})$

59 $y=tg\ x$; $y=\sqrt{2}\cos x$; $x=0$ $(x\geq 0)$

60 $y=\arccos 2x$; $y=\arcsin 2x$; $x=0$ $(x\geq 0)$

ТЕМА 11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ

Задача 6.

В этой задаче нужно вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в декартовой системе координат. Как известно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=y(x)\geq 0$, осью X и прямыми $x=a$, $X=b(a<b)$. Вычисляется по формуле $S=\int_a^b y(x)dx$. Если $y(x)\leq 0$, то $S=-\int_a^b y(x)dx$.

Для решения задачи нужно на чертеже построить заданную область после чего составить интеграл, выражающий ее площадь и вычислить его.

Пример: границы области заданы следующими уравнениями: $y=\frac{2}{x}$, $y=4e^{x}$, $y=2$, $y=4$.

Решение.

Границы фигуры представлены на рис. 1. В этой задаче за независимую переменную удобнее выбрать y. Нанесем на график границы области, площадь которой требуется вычислить (см. рис. 1).

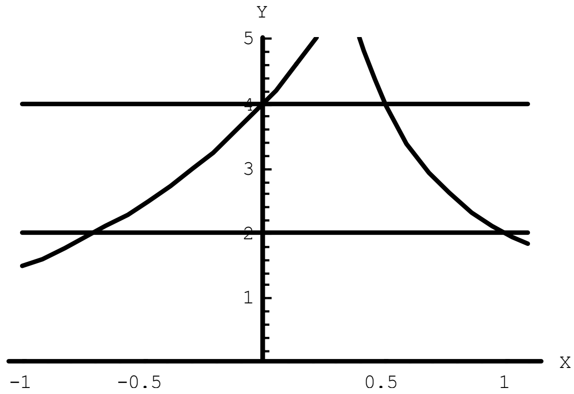

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 6.

$$S=\int_{2}^{4}\left[x_2(y)-x_1(y)\right]dy\,,$$

где функции $x_2(y)$ и $x_1(y)$ найдем, решая данные уравнения относительно x.

$$y=\frac{2}{x},\; x=\frac{2}{y}=x_2(y),$$

$$e^{x}=\frac{y}{4},\text{ или } x=\ln y-\ln 4=x_1(y),$$

$$S=\int_{2}^{4}\left(\frac{2}{y}-\ln y+\ln 4\right)dy=2\ln y\Big|_2^4-\int_{2}^{4}\ln y dy+y\ln 4\Big|_2^4=$$

$$=2(\ln 4-\ln 2)-\left[y\ln y\Big|_2^4-\int_{2}^{4}dy\right]+2\ln 4=$$

$$=2\ln 2-4\ln 4+2\ln 2+2+2\ln 4=2\,.$$

Задача 7.

Вычислить площадь фигуры, границы которой заданы уравнениями: $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=x\sqrt{3}$.

Решение.

Приведем первые два уравнения границ области к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат по переменной y. В результате получим следующие два уравнения: $(y-1)^2+x^2=1$ и $(y-2)^2+x^2=2^2$. Оба уравнения являются уравнениями окружностей - первое радиуса, равного 1, а второе радиуса, равного 2. Центр первой окружности расположен в точке с координатами $(1,0)$, а второй - в точке с координатами $(2,0)$. Остальные две границы, указанные в условии задачи представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Границы и область, расположенная внутри них представлены на рис. 1.

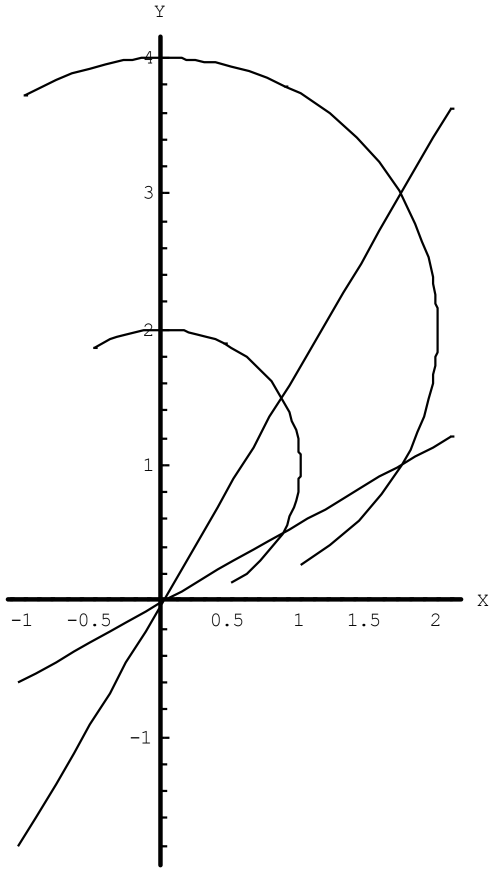

Рис. 1. Область D и ее границы.

Площадь S области D, ограниченной линиями, представленными на рис. 1, выражается соотношением

$$S = \iint_D dxdy \,. \qquad (1)$$

В двойном интеграле (1) целесообразно перейти к полярным координатам (ρ, φ), которые связаны с декартовыми координатами (x, y) соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (2)$$

Так как якобиан преобразования (2) равен ρ, то интеграл (1) в новых координатах примет вид

$$S = \iint_{D_1} \rho d\rho d\varphi \,, \qquad (3)$$

где D_1 - область на плоскости (ρ, φ), которая отражается в область D преобразованиями (2). Границы область D_1 получим путем подстановки соотношений (2) в уравнения границ области D. Особенно простую форму приобретают границы, заданные первоначально уравнениями прямых. Для прямой с меньшим угловым коэффициентом получаем, после несложных преобразований, уравнение в виде $tg\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Откуда $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$. Для прямой с большим угловым коэффициентом получаем, после несложных преобразований, уравнение в виде $tg\varphi_2 = \sqrt{3}$. Откуда $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$. Подставив формулы (2) в исходные уравнения окружностей и после очевидных преобразований получим их уравнения в полярной системе координат в виде

$$\rho = 2\sin\varphi \qquad (4)$$

и $\rho = 4\sin\varphi$. (5)

Таким образом, в полярной системе координат область D_1 и ее границы представлены как на рис. 2.

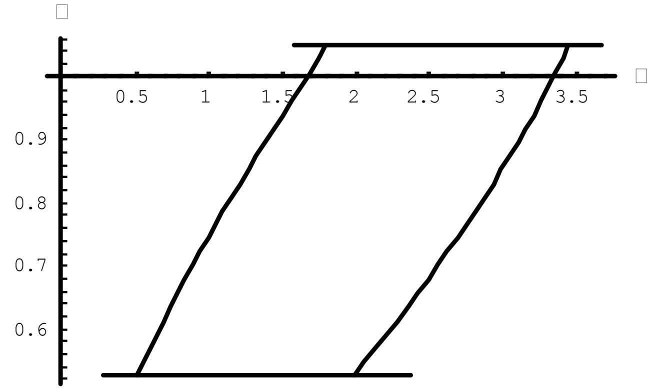

Рис. 2. Область D_1 и ее границы.

На основе анализа рис. 2 делаем вывод о вычисления двойного интеграла (3) путем сведения его к повторному, причем внешнее интегрирование целесообразно провести по переменной φ, изменяющейся в диапазоне от $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ до $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$, а внутренне интегрирование будет проводится по переменной ρ, изменяющейся в диапазоне от значения, даваемого выражением (4) до значения, даваемого выражением (5)

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho^2 \Big|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 12\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 3\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\varphi) d\varphi = 3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: площадь фигуры, границы которой заданы уравнениями: $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y = x\sqrt{3}$ определяется соотношением $S = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 8.

В этой задаче нужно найти площадь, ограниченную кривой, заданной параметрически (система координат декартова). Для решения задачи используем известную формулу: $S = \int\limits_a^b y(x)dx$, после чего выразим x и y через параметр t.

Пример: границы области заданы следующими уравнениями: $x = 16\cos^3 t$ $x = 4\sqrt{2}$, $y = 8\sin^3 t$ $(x \geq 4\sqrt{2})$.

Решение.

Кривая называется астроидой (см. рис. 1)

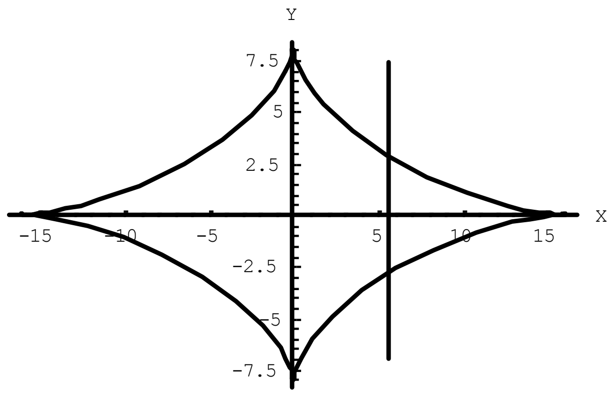

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 8. Астроида.

Так как кривая симметрична относительно оси OX, то найдем площадь верхней половины и результат удвоим

$$S = 2\int_{4\sqrt{2}}^{16} y dx .$$

При переходе к переменной t надо изменить пределы интегрирования. Если $x = 4\sqrt{2}$, то подставляя это значение в равенство, связывающее x и t найдем $4\sqrt{2} = 16\cos^3 t$. Отсюда $\cos^3 t = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t = \frac{\pi}{4}$. Аналогично при $x = 16$ получим $t = 0$. Поэтому

$$S = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} 8\sin^3 t \cdot 16 \cdot 3\cos^3 t(-\sin t)dt = 16^2 \cdot 3\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt .$$

Применив формулы двойного угла: $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$, $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, получим:

$$S = 16 \cdot 16 \cdot 3\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= 32 \cdot 3\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t)(1-\cos^2 2t)dt = 96\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t)\sin^2 2t dt =$$

$$= 96\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - 96\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \cos 2t dt =$$

$$= 96\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt - 96\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \frac{d\sin 2t}{2} =$$

$$= 48\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - 48\frac{\sin^3 2t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 48\frac{\pi}{4} - 16 = 12\pi - 16 = 21.7$$

Задача 9.

В этой задаче нужно найти площадь, ограниченную кривой, заданной в полярной системе координат. Для решения задачи используем возможно использование как двойного, так и определенного интеграла.

Пример: вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $\rho_1 = 4\cos 3\varphi$; $\rho_2 = 2$ $(\rho \geq 2)$

Решение.

Построим сначала фигуру, площадь которой следует найти. Вид этой фигуры представлен на рис. 1.

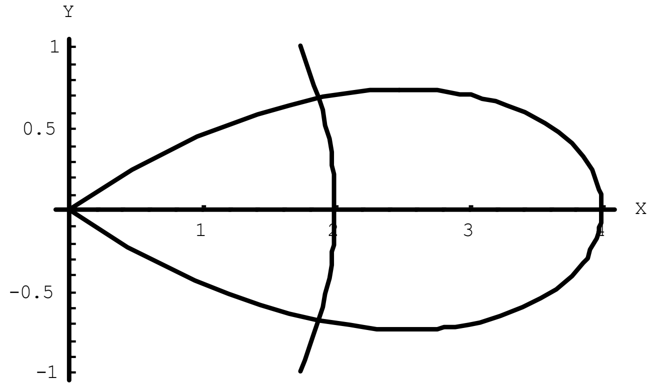

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 9.

Площадь фигуры вычисляется как – как интеграл

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2} d\varphi \,. \qquad (1)$$

Пределы интегрирования определяются как решения уравнения

$$4\cos 3\varphi = 2 \,. \qquad (2)$$

Ими являются значения

$$\varphi_{1,2} = \pm \frac{\pi}{9} \,.$$

Окончательно интеграл (1) приобретает вид

$$S = \int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{4^2\cos^2 3\varphi - 4}{2} d\varphi = 4\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} (1+\cos 6\varphi) d\varphi - \frac{4\pi}{9} =$$

$$= \frac{8\pi}{9} + \frac{2}{3}\sin 6\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} - \frac{4\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3}\left(2\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \,.$$

Задача 10.

В задаче нужно найти длину кривой, заданной параметрически. Ее вычислим по формуле: $l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 dt}$ Так как в условии задачи даны пределы интегрирования α β то чертеж делать необязательно. Дело сводится к подсчету производных x_t' и y_t', затем нахождению $\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}$ и вычислению интеграла.

Пример: границы области заданы следующими уравнениями: $\begin{cases} x = 5(\cos t + t\sin t) \\ y = 5(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 3$.

Решение.

$$x_t' = 5(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 5t\cos t \,,$$

$$y_t' = 5(\cos t - \cos t + t\sin t) = 5t\sin t \,,$$

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 5t \,,$$

$$l = \int_0^3 5t\ dt = 5\frac{t^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{45}{2} = 22.5$$

Задача 11.

В этой задаче требуется найти длину дуги кривой, заданной полярным уравнением вида

$$\rho = \rho(\varphi). \qquad (1)$$

Известно, что решение этой задачи дается выражением вида

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi, \qquad (2)$$

где φ_1, φ_2 - угловые координаты начала и конца линии соответственно.

Пример. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением

$$\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}} \quad (-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}).$$

Решение.

$$l = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{3^2}{4} e^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2 + \left(3e^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2}\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}\, 3e^{\frac{3\varphi}{4}}\, d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{4} 3e^{\frac{3\varphi}{4}}\, d\varphi = 5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} de^{\frac{3\varphi}{4}} = 10 sh \frac{3\pi}{8}.$$

Задача 12.

В этой задаче требуется определить объем тела вращения или вокруг оси абсцисс или вокруг оси ординат. Для ее решения используют следующую последовательность рассуждений. Пусть тело получается вращением криволинейной трапеции относительно оси OX (см. рис. 1). Будем считать, что криволинейная трапеция ограничена с одной стороны функцией $f(x)$, с противоположной - осью OX, а с боковых сторон – прямыми, проходящими через точки a и b. Каждое сечение такого тела плоскостью перпендикулярной оси OX, проходящей через точку x, имеет площадь

$$S = \pi f^2(x),$$

а объем вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (1)$$

Пример. Найти объем тела вращения, образованного цепной линией на участке от $x = 0$ до $x = b$

$$f(x) = a ch \frac{x}{a}.$$

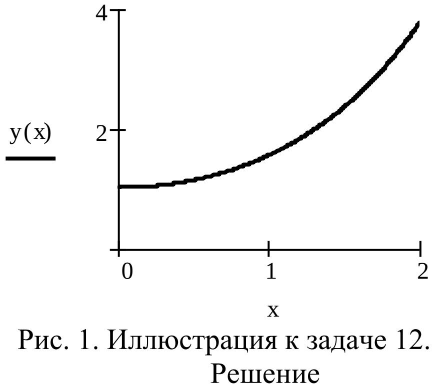

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 12.

Решение

$$V = \pi a^2 \int_0^b ch^2 \frac{x}{a} dx.$$

Воспользуемся известным тождеством

$$ch^2 x = \frac{1 + ch2x}{2},$$

подставив его в интеграл. В результате получим

$$V = \pi a^2 \int_0^b \frac{1 + ch2\frac{x}{a}}{2} dx = \frac{\pi}{2} a^2 b + \frac{\pi}{4} a^3 sh2\frac{b}{a}.$$

При вычислении интеграла использовалось соотношение

$$\int chxdx = shx + C.$$