

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет  
промышленных технологий и дизайна»**

Кафедра инженерного материаловедения и метрологии

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.  
МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ**

Самостоятельная работа

Методические указания к выполнению самостоятельной работы по темам  
«Осевое растяжение (сжатие). Статически неопределимые системы»;  
«Геометрические характеристики плоских сечений»  
для студентов направления подготовки бакалавриата 29.03.02 – Технологии  
и проектирование текстильных изделий, 15.03.02 – Технологические машины  
и оборудование, 29.03.01 – Технология изделий легкой промышленности

Составитель:  
Е. С. Цобкалло

Санкт-Петербург  
2017

Утверждено  
на заседании кафедры  
13.02.2017 г., протокол № 6

Рецензент А. В. Марковец

Методические указания содержат рекомендации к изучению материалов для самостоятельной работы студентов по дисциплинам «Соппротивление материалов» и «Механика материалов и конструкций». По темы «Осевое растяжение (сжатие). Статически неопределимые системы»; «Геометрические характеристики плоских сечений» студенты получают индивидуальные задания по вариантам для самостоятельной работы. В методических указаниях представлены примеры решения подобных задач, указание к выполнению и сдаче самостоятельных заданий, список необходимой для изучения литературы, даны вопросы для самоконтроля.

Методические указания разработаны для студентов-бакалавров очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 29.03.02 Технологии и проектирование текстильных изделий, 29.03.01 Технология изделий легкой промышленности, 15.03.02 Технологические машины и оборудование.

Учебное электронное издание сетевого распространения  
Издано в авторской редакции

Системные требования:

электронное устройство с программным обеспечением для воспроизведения файлов  
формата PDF

Режим доступа: [http://publish.sutd.ru/tp\\_get\\_file.php?id=2017\\_641](http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2017_641), по паролю. – Загл. с  
экрана.

Дата подписания к использованию 30.10.2017 г. Рег. № \_641/17.

ФГБОУВО «СПбГУПТД»

Юридический и почтовый адрес: 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.  
<http://sutd.ru>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Целью данных методических указаний является оказание помощи студентам в усвоении теоретического материала и методов решения задач по курсам «Сопротивление материалов» и «Механика материалов и конструкций».

В курсах «Сопротивление материалов» и «Механика материалов и конструкций» учебным планом предусмотрено выполнение студентами самостоятельной работы в форме решения задач с индивидуальными исходными данными. Задание представляет собой индивидуальные варианты задач на указанные темы. Варианты заданий, определяемые преподавателем, и числовые данные берутся студентом из расчетных схем 1 и расчетных схем 2, указанных в приложении данных методических указаний.

В данных методических указаниях приводятся примеры решения задач по темам:

1. Осевое растяжение (сжатие). Статически-неопределимые системы.
2. Геометрические характеристики плоских сечений.

### **1. Указание к выполнению самостоятельных заданий.**

При проверке преподавателем не зачитывается работа, в которой не соблюден масштаб при построении графиков, эпюр и чертежей. Также не зачитывается работа, выполненная не по своему варианту. Все вычисления выполняются в системе «СИ». Каждый этап решения приводится с пояснениями.

Прежде чем приступить к выполнению задания, необходимо ознакомиться с теоретическим материалом на заданную тему.

По теме «Осевое растяжение (сжатие). Статически-неопределимые системы» необходимо усвоить следующие понятия и положения:

- 1) как создать нагружено-деформированное состояние – осевое растяжение (сжатие);
- 2) внутренние силовые факторы, их определение;
- 3) метод сечений;
- 4) формулы для вычисления напряжений в точках нормальных сечений элементов;
- 5) условие прочности;
- 6) понятие допускаемого напряжения, как практически определяется эта величина для разных материалов;
- 7) подбор сечений элементов конструкций из условия прочности;
- 8) деформации при осевом растяжении (сжатии). Закон Гука;
- 9) какие задачи называются статически-неопределимыми.

По теме «Геометрические характеристики плоских сечений» обратить внимание на следующие понятия:

- 1) центр тяжести составной фигуры;
- 2) центральные и главные оси инерции;
- 3) осевые моменты инерции, главные моменты инерции, их вычисление;

- 4) умение применять формулы перехода к параллельно снесенным осям, к повернутым осям;
- 5) свойство главных моментов инерции;
- 6) практическое применение основных формул и понятий данной темы при расчете конструкций.

## **2. Сдача выполненной самостоятельной работы**

Сдача студентами самостоятельных работ, выполненных по вариантам, проводится в установленные преподавателем сроки.

Преподаватель, предварительно проверив правильность выполнения работы, проводит устное собеседование со студентом по соответствующего разделу курса. Преподаватель должен проверить, а студент показать глубину усвоения теоретических понятий и положений, навыки и умения самостоятельного решения задач по соответствующему разделу.

Самостоятельная работа считается выполненной успешной, если преподаватель полагает удовлетворительными знания, умения и навыки студента в соответствующем разделе курса.

### 3. «Осевое растяжение (сжатие). Статически-неопределимые системы»

#### Общие положения

В задаче по теме «Осевое растяжение (сжатие). Статически-неопределимые системы» рассматриваются статически-неопределимые задачи – шарнирно-стержневые системы.

Статически неопределимая задача не может быть решена без записи необходимого числа уравнений совместности деформаций в количестве, равном степени статической неопределимости конструкции. Степень статической неопределимости конструкции определяется как разность между числом реакций опор и числом уравнений равновесия для заданной конструкции.

Таким образом, для решения статически определимых задач требуется понимание того, как деформируются отдельные элементы конструкции и части элементов на качественном уровне представления об этом процессе, тогда как решение статически неопределимых требует умения выполнить геометрически точную деформационную схему конструкции и установить точное соотношение деформаций взаимосвязанных элементов конструкции или их частей. Поэтому здесь необходимо с самого начала решения задачи знать величины погонных жесткостей стержней -  $\frac{E_i F_i}{l_i}$  или их соотношения.

#### Контрольные вопросы

Для чего применяется метод сечения?

Какова сущность понятия продольной оси?

В чем заключается теоретический смысл нормального напряжения?

Как распределены напряжения в поперечном сечении растянутого стержня?

Как формулируется закон Гука при растяжении?

Как применяется закон Гука при решении статически неопределимых задач?

Как определяется степень статической неопределимости конструкции?

Чем отличается план решения задачи статически неопределимой от задачи статически определимой?

Какие типы задач можно решать с применением условия прочности?

#### Пример решения задачи по теме «Осевое растяжение (сжатие). Статически-неопределимые системы»

Условие задачи: подобрать сечения медного и стального стержней (рис. 1) при отношении  $\frac{F_1}{F_2} = 0,5$  из условия прочности конструкции с деформируемыми стержнями и жесткой (недеформируемой) балкой.

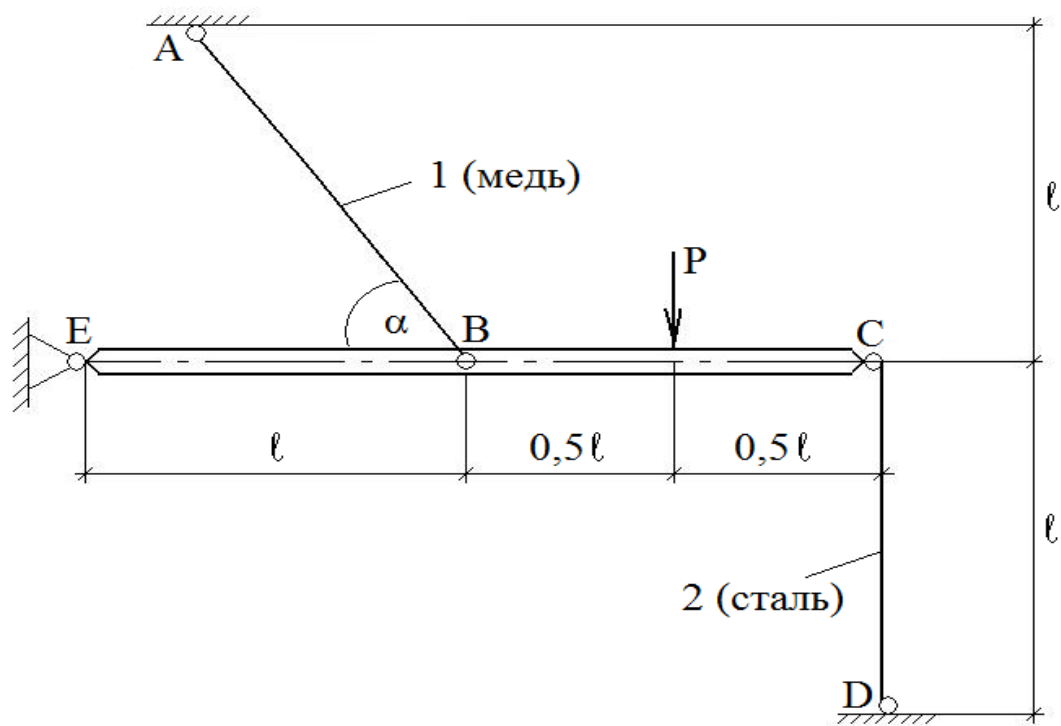


Рис. 1. Заданная схема

Дано: 1 – медь	$[\sigma_m] = 100 \text{ МПа}$	$l = 1 \text{ м}$
2 – сталь	$[\sigma_{ст}] = 160 \text{ МПа}$	$\frac{F_1}{F_2} = 0,5$
$\angle \alpha = 60^\circ$	$E_{1m} = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$	
$P = 30 \text{ кН}$	$E_{2ст} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$	

Найти:  $F_1$  и  $F_2$

### РЕШЕНИЕ

1. От заданной схемы (рис. 1) переходим к изображению плана сил (к расчетной схеме, рис. 2).

Расчетная схема (план сил) представляет собой систему с приложенными к ней активными внешними нагрузками (в нашем примере сосредоточенная сила  $P$ ) и реакциями связей, возникающими в местах закрепления элементов системы (в нашем примере – в шарнирах  $E, A, B, C, D$ ).

*Примечание.* В дальнейшем на схемах системы будем балку  $EC$  изображать осью  $EC$ .

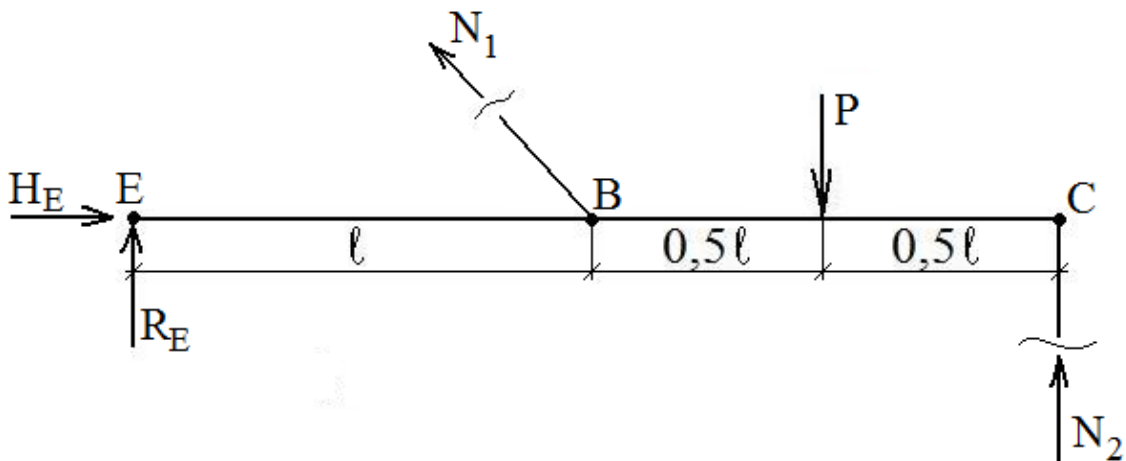


Рис. 2. План сил

Пояснения:

1. В (·) E балка закреплена на шарниро – неподвижной опоре, связывающей свободу перемещения сечения E в двух направлениях: вертикальном (связь  $R_E$ ) и горизонтальном (связь  $H_E$ ).
2. В точках A и B также шарнирно-неподвижное соединение стержня – равнодействующая вертикальной и горизонтальной связей направлена по стержню AB и представляет собой усилие  $N_1$ , возникающей в любом нормальном сечении стержня. Направление вектора  $N_1$  на рис. 2 показано «от сечения», что говорит о том, что стержень под действием силы P испытывает растяжение.
3. В шарнирах C и D стержня CD горизонтальная связь (реакция) равна нулю, вертикальная связь направлена вдоль стержня и представляет собой внутреннее усилие  $N_2$ . Вектор  $N_2$  направлен «в сечение», что говорит о том, что стержень CD под действием силы P испытывает сжатие.

2. Система (рис. 2) под действием активной нагрузки (силы P) и реакций связей ( $H_E$ ,  $R_E$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ) находится в равновесии, что позволяет составить уравнения статического равновесия. В плоских схемах наибольшее число независимых уравнений статического равновесия – 3.

Составим эти уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \sum x = 0; \quad \underline{H_E} - \underline{N_1} \cos \alpha = 0 \\ 2) \quad \sum y = 0; \quad \underline{R_E} + \underline{N_1} \sin \alpha - P + \underline{N_2} = 0 \\ 3) \quad \sum y = 0; \quad N_1 \cdot \sin \alpha \cdot l - P \cdot 1,5l + N_2 \cdot 2l = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

В системе статических уравнений (1) подчеркнуты неизвестные силовые факторы – их 4, т. е. одна неизвестная «лишняя»:  $4 - 3 = 1$ . задача один раз

статически-неопределимая. Разность между числом неизвестных, входящих в систему (1) и числом составленных уравнений статического равновесия называется степенью статической неопределимости. В данном примере степень статической неопределимости равна единице. Это указывает на то, что необходимо составить одно дополнительное уравнение к уравнениям системы 1. В статически-неопределимых задачах дополнительными уравнениями, позволяющими раскрыть статическую неопределимость, являются уравнения совместности деформаций элементов системы.

3. Составим уравнение совместности деформаций элементов системы. Для этого изобразим план перемещения (деформаций) элементов системы под действием внешней нагрузки (силы  $P$ ) (рис. 3).

Сперва изображаем схему конструкции до приложения силы  $P$ , затем на этой схеме показываем положения элементов системы, учитывая их деформацию (стержень 1 – растянут, стержень 2 – сжат), недеформируемая балка  $EC$  займет положение  $EC'$ . В статически-неопределимых задачах план сил (рис. 2) и план перемещений элементов системы (рис. 3) не должны противоречить друг другу: если на плане сил усилие  $N$  растягивающее, то на плане перемещений этот стержень растянут и наоборот.

При этом  $(\cdot) B$  перейдет в положение  $B'$ ;  $(\cdot) C$  – в положение  $C'$ . Отрезок  $CC'$  – величина абсолютной деформации стержня 2, т. е.  $CC' = \Delta l_2$ . Стержень 1 – удлинился, новое положение стержня 1 покажем прямой  $B'M$ , исходящей из  $(\cdot) B'$ , параллельной  $AB$  – начальному положению стержня 1. Здесь необходимо заметить: деформации стержней малы, подчиняются закону Гука, т. е. угол  $\beta$  поворота балки  $EC$  бесконечно мал, поэтому можно считать, что прямая  $AB$  и проведенная ей параллельная прямая  $B'M$ , определяющая положение стержня 2 после удлинения, в бесконечности (в  $(\cdot) A$ ) сойдутся.



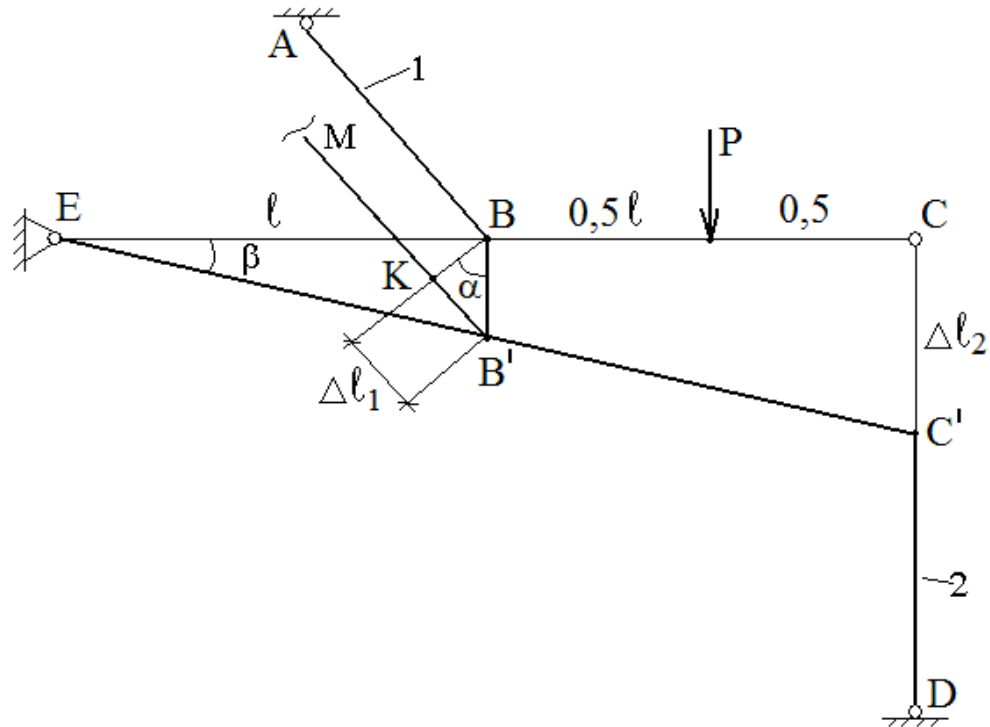


Рис. 3. План перемещений элементов системы

Опустим перпендикуляр ВК из (·) В на «новое» положение стержня 1 (В'М). Отрезок КВ' и будет определять абсолютную деформацию (удлинение) стержня 1, т. е.  $KB' = \Delta l_1$ . Теперь необходимо совместно выразить деформации  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ . С этой целью рассмотрим геометрическую сторону задачи:

Из подобия треугольников  $EBB'$  и  $ECC'$  имеем:

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}, \quad (2)$$

из  $\Delta BKB'$ :

$$BB' = \frac{KB'}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Значения  $BB'$  подставим в (2):

$$\frac{\Delta l_1}{\sin \alpha \cdot \Delta l_2} = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$$\Delta l_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \Delta l_2}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Delta l_2. \quad (5)$$

Перепишем соотношение (5) с учетом формулы закона Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (6)$$

и условий задачи:

$$\frac{F_1}{F_2} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 0,5F_2,$$

$l_1$  – длина стержня 1 из *рис. 1*:

$$l_1 = \frac{l_2}{\sin \alpha},$$

$$E_1 = 0,5E_2,$$

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot F_1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot F_2}, \quad (7)$$

$$\frac{N_1 \cdot 2l_2}{0,5E_2 \cdot 0,5F_2 \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot F_2}, \quad (8)$$

$$N_1 = \frac{0,75}{8} N_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 \approx 0,09N_2. \quad (9)$$

4. Для определения реакций опор решаем систему уравнений (1) совместно с (9):

$$1) \quad H_E - N_1 \cdot 0,5 = 0,$$

$$2) \quad R_E + N_1 \cdot 0,868 - P + N_2 = 0,$$

$$3) \quad N_1 \cdot 0,868l - 1,5lP + 2lN_2 = 0,$$

$$4) \quad N_1 - 0,09N_2 = 0,$$

$$\text{из (3):} \quad 0,09N_2 \cdot 0,87l - 1,5lP + 2lN_2 = 0,$$

$$N_2 = 0,72P = 21,6 \text{ кН},$$

$$\text{из (4):} \quad N_1 = 0,09N_2 = 1,94 \text{ кН},$$

из (2):  $R_E = P - 0,868N_1 - N_2 = 30 - 1,68 - 21,6 = 6,72 \text{ кН}$ ,

из (1):  $H_E = 0,5N_1 = 0,5 \cdot 1,94 = 0,97 \text{ кН}$ .

4. Раскрыв статическую неопределимость, делаем проверку правильности вычисления неизвестных системы уравнений (1):

$$\begin{aligned} \sum M_{(B)} = 0; \quad & -R_E \cdot l - P \cdot 0,5l + N_2 \cdot l = 0, \\ & -6,72 - 15 + 21,6 \neq 0. \end{aligned}$$

Ошибка 0,5 %. Полагаем, что невязка 0,5 % с учетом промежуточных вычислений, показывает достаточно точное определение продольных сил  $N_1$  и  $N_2$ .

5. Подбор сечений стержней.

Подбор сечений стержней осуществляем из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{F} \leq [\sigma], \quad (10)$$

$$F \geq \frac{|N|}{[\sigma]}. \quad (11)$$

Предварительно определяем площади поперечных сечений каждого из стержней:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]_M} \geq \frac{1940}{100 \cdot 10^6} \geq 19,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \geq 19,4 \text{ мм}^2,$$

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]_{CT}} \geq \frac{21600}{160 \cdot 10^6} \geq 135 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \geq 135 \text{ мм}^2.$$

Применим условие соотношения площадей сечений  $\frac{F_1}{F_2} = 0,5$  (условие задачи):

$$F_1 = 0,5F_2,$$

$$F_1 = 0,5 \cdot 135 = 68 \text{ мм}^2,$$

$$F_2 = 135 \text{ мм}^2,$$

Ответ:  $F_1 = 68 \text{ мм}^2$ ;  $F_2 = 135 \text{ мм}^2$ .

## Контрольные упражнения и задачи

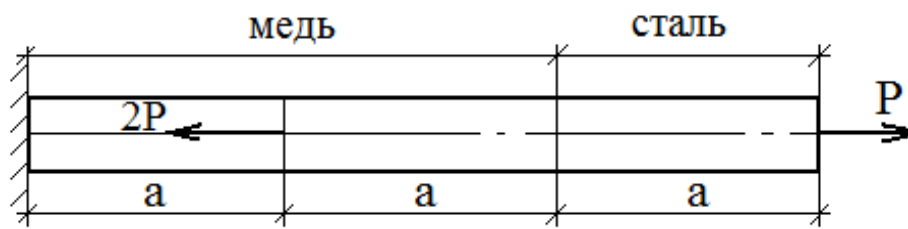


Рис. 4. Конструктивная схема

1. Для представленной конструктивной схемы (рис. 4) построить эпюры внутренних продольных сил  $N$ , абсолютных и относительных деформаций.
2. Для любого варианта РГР 1 (схема 1) выполнить план перемещений и записать уравнение совместности деформаций.

## 4. Геометрические характеристики плоских сечений

### Общие положения

Деформация и напряжение в бруске существенно зависят от размеров и формы его поперечного сечения. Во всех расчетных формулах присутствуют геометрические характеристики этих сечений. При осевом растяжении (сжатии) такой характеристикой является площадь сечения.

В теории кручения и изгиба встречаются геометрические характеристики более сложные, т.е. в этих случаях напряжения и деформации зависят не только от размеров сечения, но также от его формы. Эти величины появляются в теоретических выводах во всех случаях. Когда мы имеем дело с неравномерным распределением напряжений по сечению бруска (кручение, изгиб).

Перечислим геометрические характеристики плоских сечений.

На рис. 5 изображено сечение произвольной формы площадью  $F$ .

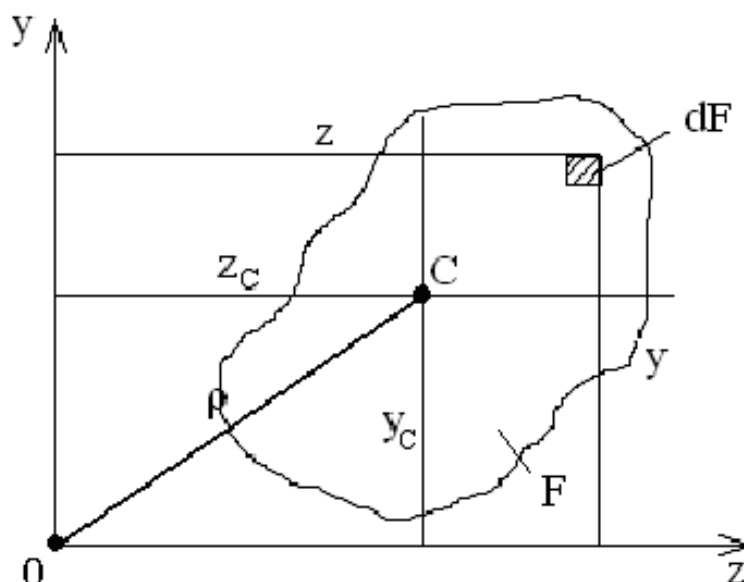


Рис. 5. Сечение произвольной формы площадью  $F$

Сечение отнесено к некоторой системе координат ( $yo z$ ). Выделенная элементарная площадка  $dF$  имеет координаты  $y$  и  $z$ ;  $c$  – центр тяжести сечения.  $\rho$  – расстояние от центра тяжести сечения до полюса.

1)  $F$  – площадь сечения,  $m^2$

$$F = \int_F dF, \quad (12)$$

2)  $S_z, S_y$  – статические моменты площади фигуры относительно осей  $z$  и  $y$ ; размерность статического момента сечения  $F$  [ $\text{м}^3$ ]. Величина статического момента может быть  $> 0, < 0$  или  $= 0$ .

$$S_y = \int_F z dF,$$

$$S_z = \int_F y dF. \quad (13)$$

Через статические моменты площади фигуры  $F$  вычисляются координаты центра тяжести составной фигуры:

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{yi}}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{zi}}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (14)$$

Если сечение имеет сложное очертание, то его можно разбить на простые фигуры, а статический момент сложной фигуры относительно какой-то оси может быть рассчитан как сумма статических моментов относительно этой оси каждой из простых фигур (рис 5).

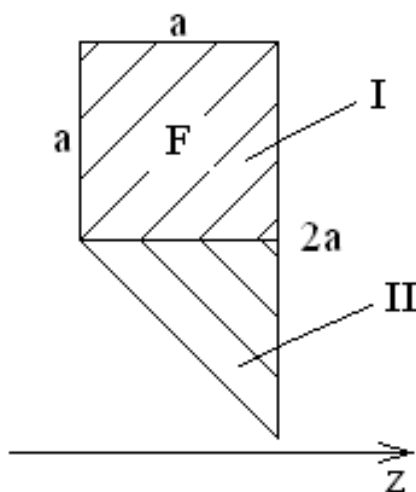


Рис. 6.

Фигуру (рис.6) разобьем на прямоугольник и треугольник. Статический момент площади этой фигуры относительно оси  $z$ :

$$S_z = S_z^I + S_z^{II}. \quad (15)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

3) Осевые моменты инерции фигуры

$$J_y = \int_F z^2 dF ; J_z = \int_F y^2 dF \quad [\text{м}^4]. \quad (16)$$

Значения  $J_y$  и  $J_z$  всегда положительные.

4) Центробежный момент инерции

$$J_{yz} = \int_F yz dF \quad [\text{м}^4]. \quad (17)$$

$J_{yz}$  может быть  $> 0$ ,  $< 0$  или  $= 0$ . Равенство нулю центробежного момента инерции указывает на то, что оси  $y$  и  $z$  – главные центральные.

5) Полярный момент инерции (относительно начала координат – полюса):

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad [\text{м}^4], \quad (18)$$

так как  $\rho^2 = y^2 + z^2$ , то

$$J_\rho = J_y + J_z, \quad (19)$$

6) Радиусы инерции сечения:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \quad [\text{м}], \quad (20)$$

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} \quad [\text{м}].$$

Указанные геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечения, а также и от расположения осей, относительно которых они рассчитываются.

Относительно оси, как угодно сориентированной на плоскости, величину моментов инерции удобно вычислить, следуя двум правилам:

1) переход к параллельным осям;

## 2) переход к повернутым осям.

За отправные оси удобно брать собственные центральные оси фигуры или оси, относительно которых значения моментов инерции известны.

Для плоских сечений, имеющих форму треугольника, круга, прямоугольника значения моментов инерции относительно центральных осей вычисляются через ширину ( $b$ ), высоту ( $h$ ) или радиус ( $R$ ) сечения (см. раздел «геометрические характеристики плоских сечений» [1-5], там же приведен вывод формул для вычисления моментов инерции плоских сечений при переходе к параллельно снесенным и повернутым осям).

В этом разделе необходимо обратить внимание на понятие главных центральных осей инерции плоских сечений.

Из всех пар взаимно перпендикулярных осей, проведенных через центр тяжести плоской фигуры, только одна пара осей будет являться главными центральными осями. Эти оси обладают свойством экстремальности моментов инерции, т. е. относительно одной из этих осей момент инерции  $J_{\min}$  – это ось наименьшей жесткости; относительно другой оси –  $J_{\max}$  – ось наибольшей жесткости.

Эти значения  $J_{\min}$  и  $J_{\max}$  в дальнейшем встретятся в формулах расчета балок на изгиб и при расчетах на устойчивость.

При решении задачи (РГР 2), целью которой является отыскание положения главных осей инерции и главных моментов инерции составного сечения, встретятся все перечисленные выше геометрические характеристики и формулы.

### **Контрольные вопросы**

Какие оси сечения называются центральными?

Какие оси сечения называются главными центральными?

Свойство главных центральных осей инерции, главных моментов инерции?

Какие их геометрических характеристик плоских сечений могут быть  $>0$ ,  $<0$ , равными 0?

Какие их геометрических характеристик всегда  $>0$ ?

Какова закономерность изменения величины момента инерции при изменении положения оси инерции относительно сечения при угловом или линейном смещении оси инерции?

### **Пример решения задачи**

Условие задачи: швеллер № 18а и уголок 90×90×8. Найти положение главных центральных осей инерции составного сечения и вычислить значение



главных моментов инерции сечения, составленного из указанных профилей (см. рис.1).

### РЕШЕНИЕ

1) Разобьем составную фигуру на две: швеллер (I) и уголок (II). Выпишем необходимые данные из сортамента (ГОСТ 8240 – 56 и 8509 – 57):

для швеллера № 18а:  $F_1 = 22,2\text{см}^2$ ;  $J_{z_1} = 105\text{см}^4$ ;  $J_{y_1} = 1190\text{см}^4$ ;  $y_0 = 2,13\text{см}$ ;

для уголка 90×90×8:  $F_2 = 13,9\text{см}^2$ ;  $J_{y_2} = J_{z_2} = 106\text{см}^4$ ;  $J_{\max} = 168\text{см}^4$ ;  $J_{\min} = 43,8\text{см}^4$ ;

$z_0 = 2,51\text{см}$ ;

$$\text{Площадь составного сечения } F = F_1 + F_2 = 22,2 + 13,9 = 36,1\text{см}^2. \quad (1)$$

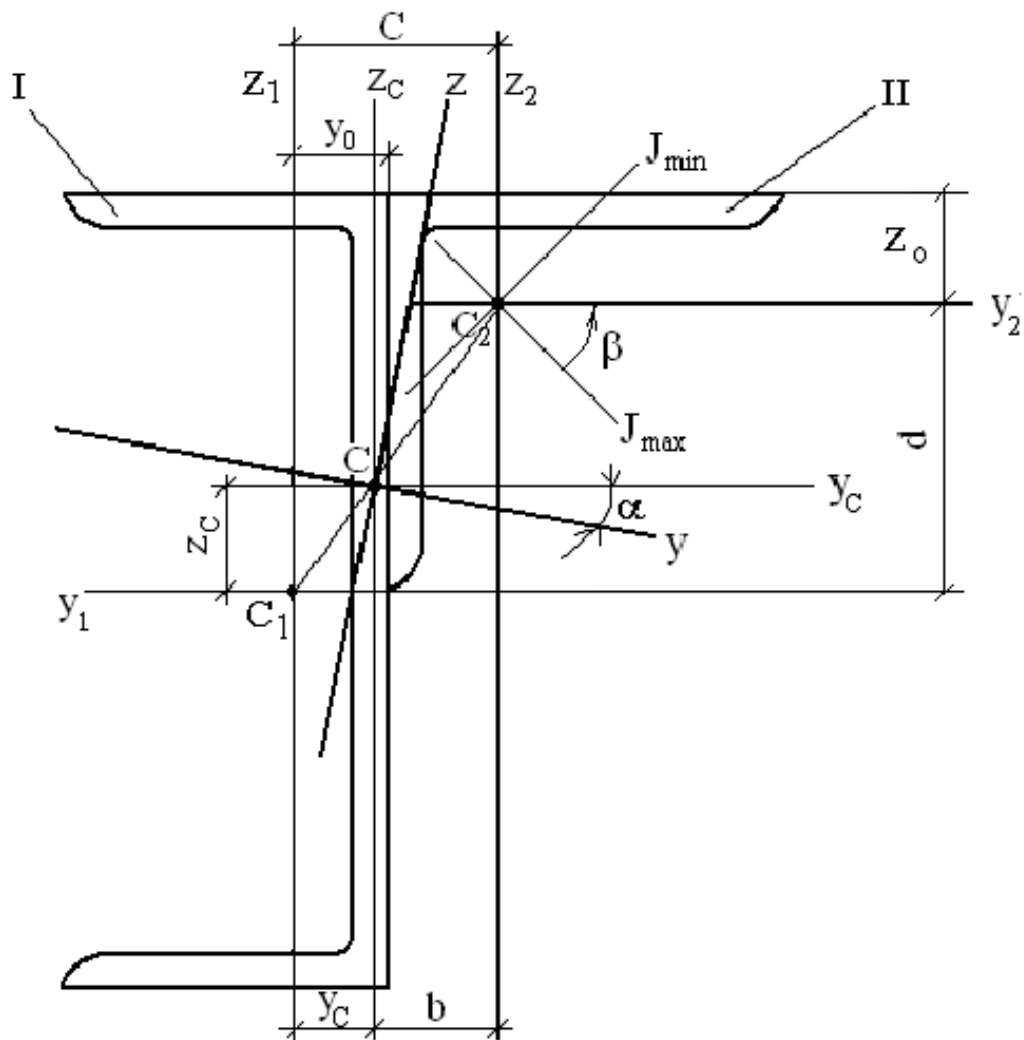


Рис.1. Составное сечение

2) Для вычисления координат центра тяжести составной фигуры необходимо выбирать вспомогательные оси. В качестве вспомогательных осей

выбираем главные оси швеллера  $y_1$  и  $z_1$ . Расстояния от этих осей до центра тяжести уголка:

$$c = y_0 + z_0 = 2,13 + 2,51 = 4,64 \text{ см}, \quad (2)$$

$$d = \frac{h}{2} - z_0 = 9 - 2,51 = 6,49 \text{ см}.$$

3) Координаты центра тяжести составного сечения вычислим через статические моменты этого сечения относительно выбранных вспомогательных осей:

$$y_c = \frac{\sum S_{z_1}}{\sum F}; \quad z_c = \frac{\sum S_{y_1}}{\sum F}, \quad (3)$$

$$\text{где } \sum S_{z_1} = S_{z_1}^I + S_{z_1}^{II}; \quad \sum S_{y_1} = S_{y_1}^I + S_{y_1}^{II}; \quad \sum F = F^I + F^{II}. \quad (4)$$

Статические моменты сечения относительно осей  $y_1$  и  $z_1$ :

$$S_{y_1}^I = 0 \quad S_{z_1}^I = 0 \quad (5)$$

так как оси  $y_1$  и  $z_1$  – центральные оси швеллера.

$$S_{y_1}^{II} = F_2 d = 13,9 \cdot 6,49 = 90 \text{ см}^3 \quad (6)$$

$$S_{z_1}^{II} = F_2 c = 13,9 \cdot 4,64 = 64,5 \text{ см}^3.$$

Расстояния от осей  $y_1$  и  $z_1$  до центра тяжести сечения С:

$$y_c = \frac{S_{z_1}^{II}}{\sum F} = \frac{64,5}{36,1} \cong 1,80 \text{ см}, \quad (7)$$

$$z_c = \frac{S_{y_1}^{II}}{\sum F} = \frac{90}{36,1} \cong 2,50 \text{ см}.$$

4) Точкой С обозначим центр тяжести составной фигуры и проведем через него взаимно перпендикулярные оси  $z_c$  и  $y_c$  – это центральные оси составного сечения. Для отыскания главных центральных осей этого сечения оси  $z_c$   $y_c$  необходимо повернуть на  $\angle \alpha$ , величина которого находится по формуле:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2J_{y_c z_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}}. \quad (8)$$

5) Пользуясь формулами перехода к параллельным осям, определим моменты инерции сечения относительно центральных осей  $y_c$  и  $z_c$ :

$$J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II}, \quad (9)$$

$$J_{y_c}^I = J_{y_1}^I + F^I \cdot z_c^2 = 1190 + 22,2 \cdot 2,5^2 = 1328,75 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c}^{II} = J_{y_2}^{II} + F^{II} \cdot f^2 = 106 + 13,9(6,49 - 2,5)^2 = 326,25 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c} = 1328,75 + 326,25 = 1655 \text{ см}^4.$$

$$J_{z_c} = J_{z_c}^I + J_{z_c}^{II} \quad (10)$$

$$J_{z_c}^I = J_{z_1}^I + F^I \cdot y_c^2 = 105 + 22,2 \cdot 1,8^2 = 176,93 \text{ см}^4,$$

$$J_{z_c}'' = J_{z_2} + F'' \cdot b^2 = 106 + 13,9 \cdot 2,84^2 = 218,11 \text{ см}^4,$$

$$J_{z_c} = 176,9 + 218,1 = 395 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_c z_c} = J_{y_c z_c}^I + J_{y_c z_c}'' , \quad (11)$$

$$J_{y_c z_c}^I = J_{y_1 z_1}^I + F_1' \cdot z_c \cdot y_c = 22,2 \cdot 2,5 \cdot 1,8 = 101,25 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1 z_1}^I = 0, \text{ т. к. оси } y_1 \text{ и } z_1 \text{ у швеллера – главные центральные.}$$

$$J_{y_c z_c}'' = J_{y_2 z_2}'' + F_2'' \cdot b \cdot f.$$

Так как оси  $y_2$  и  $z_2$  уголка – не главные, то центробежный момент инерции относительно этих осей не равен нулю, его необходимо вычислить. Вычислим  $J_{y_2 z_2}'''$ , отталкиваясь от главных центральных осей уголка  $J_{\min}$  и  $J_{\max}$ , используя формулу перехода к повернутым осям:

$$J_{y_2 z_2}'' = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \sin 2\beta, \quad \text{где } \angle \beta = 45^\circ \quad (12)$$

$$J_{y_2 z_2}'' = \frac{168 - 43,8}{2} \sin 90^\circ = 62,1 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c z_c}'' = 62,1 + 13,9 \cdot 2,84 \cdot 3,99 = 219,6 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_c z_c} = 101,25 + 219,6 = 320,8 \text{ см}^4.$$

б) Определим положение главных центральных осей инерции составного сечения.

Угол наклона главных осей инерции составного сечения к центральным осям  $y_c$  и  $z_c$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{y_c z_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}} = \frac{2 \cdot 320,8}{395 - 1655} = -0,509,$$

$$2\alpha = -27^\circ; \quad \alpha = -13^\circ 30'; \quad \sin \alpha = -0,233; \quad \cos \alpha = 0,972;$$

$$\sin 2\alpha = -0,454; \quad \cos 2\alpha = 0,891.$$

Из центра тяжести сечения проведем главные центральные оси составного сечения  $y, z$  под  $\angle \alpha$  по часовой стрелке, так как  $\angle \alpha (-)$ .

7) Вычислим главные моменты инерции сечения:

$$J_y = J_{y_c} \cos^2 \alpha + J_{z_c} \sin^2 \alpha - J_{y_c z_c} \sin 2\alpha = 1655 \cdot 0,972^2 + 395 \cdot 0,233^2 + 320,8 \cdot 0,454 = 1732 \text{ см}^4;$$

$$J_z = J_{y_c} \sin^2 \alpha + J_{z_c} \cos^2 \alpha + J_{y_c z_c} \sin 2\alpha = 1655 \cdot 0,233^2 + 395 \cdot 0,972^2 - 320,8 \cdot 0,454 = 317 \text{ см}^4.$$

Проверки:

$$1) J_y + J_z = J_{y_i} + J_{z_i};$$

$$J_y + J_z = 1732 + 317 = 2049 \text{ см}^4;$$

$$2) J_{yz} = 0;$$

$$J_{y_c} + J_{z_c} = 1655 + 395 = 2050 \text{ см}^4;$$

$$3) J_{yz} = \frac{J_{y_c} - J_{z_c}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_c z_c} \cos 2\alpha = \frac{1655 - 395}{2} \cdot (-0,454) + 320,8 \cdot 0,891 \approx 0.$$

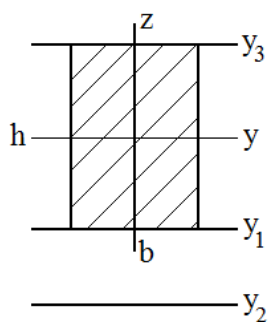
Ответ:  $J_{\max} = 1732 \text{ см}^4, J_{\min} = 317 \text{ см}^4.$

В качестве проверки могут быть использованы следующие положения:

- 1) Центр тяжести составного сечения  $C$  должен лежать на прямой, соединяющей центры тяжести уголка и швеллера, т. е. на прямой  $C_1C_2$ .
- 2) Главная центральная ось инерции, относительно которой осевой момент инерции  $J_{\min}$  (в нашем примере ось  $Z$ ) сориентирована по отношению к составному сечению таким образом, что площадь этого сечения «вытянута» вдоль этой оси. Относительно главной центральной оси  $Y$  с  $J_{\max}$  площадь сечения «удалена» по отношению к этой оси. Таким образом, можно примерно «прикинуть» направление центральных осей  $Y_cZ_c$  в положение главных центральных осей  $YCZ$ , т. е. определить знак  $\angle\alpha$ .

## Контрольные упражнения и задачи

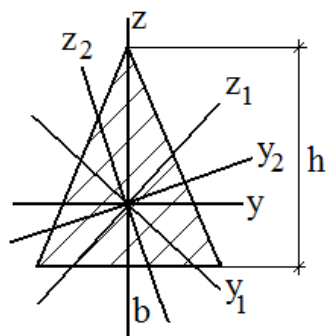
1.



Относительно какой из осей  $Y$  осевой момент инерции прямоугольника имеет:

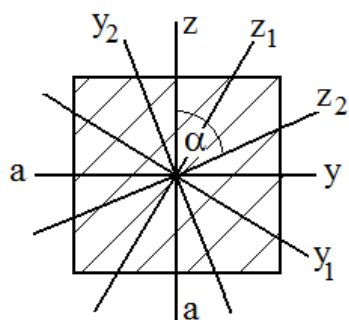
- 1) наибольшую величину?
- 2) наименьшую величину?
- 3) равную нулю?

2.



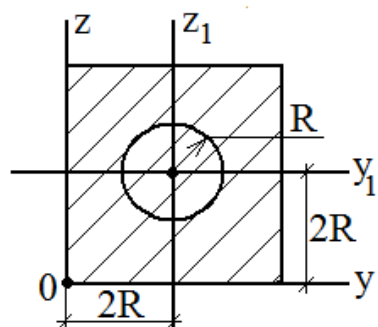
Какие из представленных взаимноперпендикулярных осей равнобедренного треугольника являются главными центральными осями?

3.



Какие из взаимноперпендикулярных осей квадрата являются его главными центральными осями?

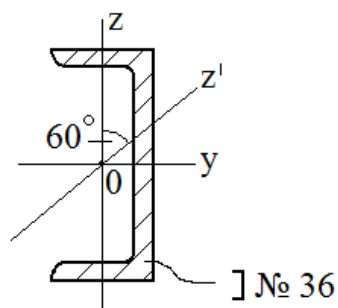
4.



$$J_{yz} - ?$$

$$J_y - ?$$

5.



$$J_{z'} - ?$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Основной

1. *Атаров, Н.М.* Сопротивление материалов. Ч. 1 [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Н.М. Атаров [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Моск. гос. строительный ун-т, ЭБС АСВ, 2009.— 64 с. гриф УМО — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/16998>.— ЭБС «IPRbooks»
2. *Астанин А.А.* Техническая механика. Кн. 2. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Астанин А.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Машиностроение, 2012.— 160 с. гриф УМО— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/18544>. — ЭБС «IPRbooks»
3. *Межецкий, Г.Д.* Сопротивление материалов (4-е изд.) [Электронный ресурс]: учебник/ Г.Д. Межецкий [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Дашков и К, 2013.— 431 с. гриф УМО — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/24812>.— ЭБС «IPRbooks».
3. *Агапов, В.П.* Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебник/ Агапов В.П.— Электрон. текстовые данные.— М.: Моск. гос. строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 336 с. гриф УМО — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26864>.— ЭБС «IPRbooks».
4. *Цобкалло, Е. С.* Сопротивление материалов : учеб. пособие. Ч.1./ Цобкалло Е. С., Петрова Л. Н., Дарвиш Д. М. — СПб.:СПГУТД, 2009. - 84 с. <http://publish.sutd.ru> (практические задания)
5. *Петрова, Л. Н.* Сопротивление материалов. Пособие по решению задач. Ч. 2.: учеб. пособие. / Л. Н Петрова и др. - СПб. : СПГУТД,-2010.- 68 с. <http://publish.sutd.ru> (практические задания)

### Дополнительный

7. Методические указания по сопротивлению материалов для студентов заочной формы обучения: метод указания / сост.: Е. С. Цобкалло, Л. Н. Петрова, Е. А. Разумовская. – СПб.: СПГУТД, 2007. – 25 с. <http://publish.sutd.ru>.
8. *Цобкалло, Е. С.* Сопротивление материалов : учеб. пособие для решения задач по курсу сопротивления материалов для студентов заочной и дневной форм обучения / Е. С. Цобкалло, Л. Н. Петрова, Д. М. Дарвиш ; Санкт- Петербургский гос. ун-т технологии и дизайна. – СПб.: СПГУТД, 2009. – 88 с. [http://publish.sutd.ru/tp\\_ext\\_inf\\_publish.php?id=356](http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=356)
9. *Петрова, Л. Н.* Сопротивление материалов. Ч. 2 : учеб. пособие для решения задач по курсу сопротивления материалов для студентов заочной и дневной форм обучения / Л. Н. Петрова и др.– СПб. : СПГУТД, 2010. –71 с. <http://publish.sutd.ru>.
10. Осевое растяжение (сжатие). Геометрические характеристики плоских сечений. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов всех форм обучения / Цобкалло Е. С., Петрова Л. Н., Большухин О. П. - СПб.: СПГУТД, 2009. –21 с. <http://publish.sutd.ru>
11. *Феодосьев, В.И.* Сопротивление материалов: учебник для вузов 10-е изд., перераб. и доп. / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 591 с.

12. *Беляев, Н.М.* Сборник задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для ВУЗов / Н.М. Беляев – СПб.: Иван Федоров, 2003 г – 432 с.
13. *Межецкий, Г. Д.* и др., Сопротивление материалов: учебник. / Г.Д. Межецкий и др. - М.: «Дашков и К<sup>о</sup>», 2008. – с. 415
14. *Ицкович, Г. М.* Сопротивление материалов: учебник для машиностроительных техникумов / Г.М. Ицкович:, 9–е изд., стер. - М.: Высшая школа, 2001. – с. 368

Расчетные схемы 1

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ  
ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

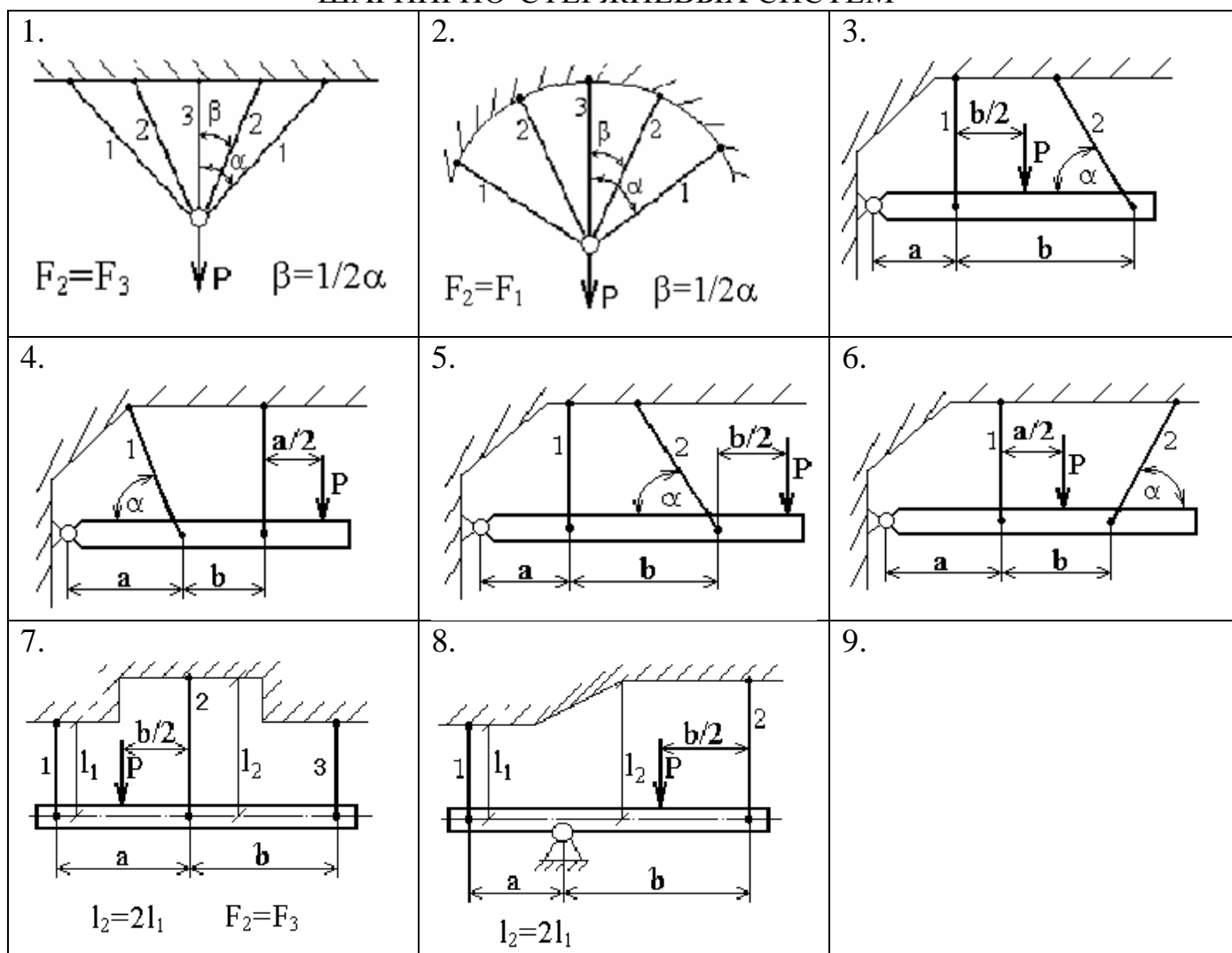


Таблица величин

1. Подобрать круглые сечения стержней, поддерживающих жесткую балку, при допусках напряжений:  
для меди [100] МПа  
для стали [160] МПа
2. Модули нормальной упругости принять:  
для меди  $1 \cdot 10^5$  МПа  
для стали  $2 \cdot 10^5$  МПа
3. В таблице величин "М" обозначает медь, "С" – сталь.

№	размеры, м		P, кН	$\alpha^\circ$	$F_1/F_2$	материал	
	a	b				1	2 и 3
I	1	2	50	45°	0,5	М	С
II	2	1	60	60°	0,6	С	М
III	2	2	70	45°	0,8	М	С
IV	1	1	80	60°	0,5	С	М
V	2	1	90	45°	0,6	М	С
VI	1	2	50	60°	0,8	С	М
VII	2	2	60	45°	0,5	М	С
VIII	1	1	70	60°	0,6	С	М
IX	2	2	80	45°	0,8	М	С
X	1	2	90	60°	0,5	С	М



Расчетные схемы 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ

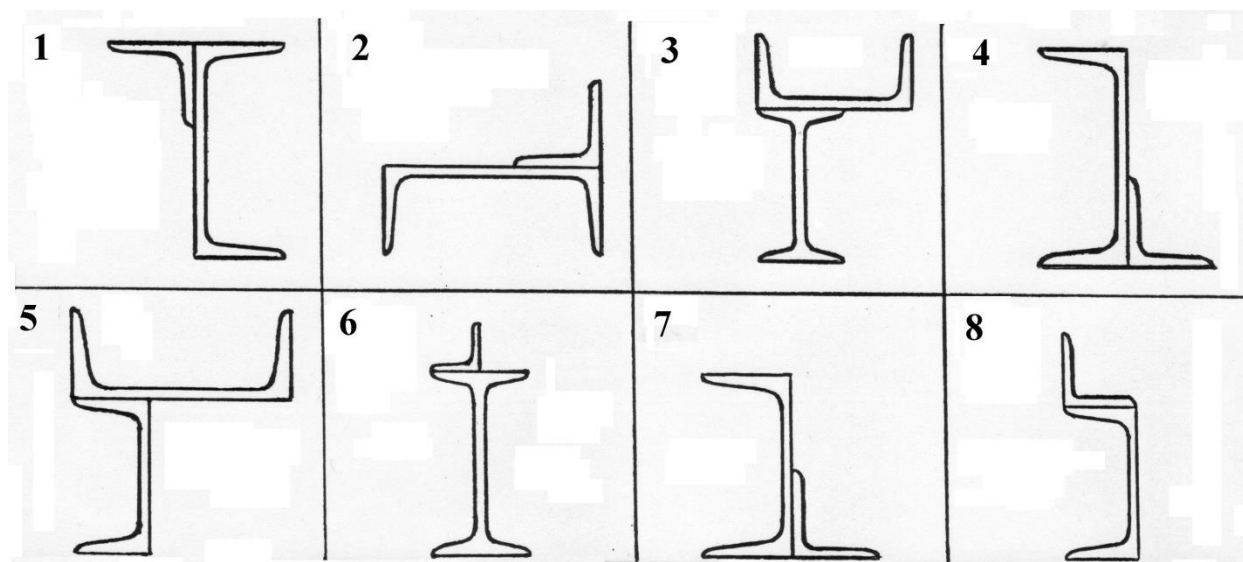


Таблица величин

№ схемы	Номер швеллера или двутавра	Сечение уголка, мм	№ схемы	Номер швеллера или двутавра	Сечение уголка, мм
I	20	80 × 8	I	40	180 × 12
II	22	90 × 8	II	20а	70 × 8
III	24	100 × 10	III	22а	90 × 60
IV	30	140 × 12	IV	24а	100 × 12
V	36	160 × 14	V	30	160 × 10

