Сигнальные графы и формула Мейсона

1. Краткие теоретические сведения

Для получения ПФ многоконтурной системы требуется использовать модель системы в виде сигнального графа.

Сигнальный граф позволяет графически описать линейные связи между переменными, он состоит из *узлов* (вершин) и соединяющих их направленных *ветвей*.

Ветвь соответствует блоку структурной схемы, она отражает зависимость входной и выходной переменных. Сумма всех сигналов, входящих в узел, образует соответствующую этому узлу переменную.

Последовательность ветвей между двумя узлами называется *путем*.

Контуром называется замкнутый путь, который начинается и заканчивается в одном и том же узле, причем ни один узел не встречается на этом пути дважды. *Коэффициент передачи контура* – это произведение всех входящих в него дуг.

Контуры называются н е к а с а ю щ и м и с я, если они не имеют общих узлов.

Сигнальный граф однозначно соответствует структурной схеме.

Пусть $X(s)$ и $Y(s)$ – входная и выходная переменные системы. Тогда для вычисления ПФ системы управления по ее графу можно воспользоваться формулой Мейсона:

$$W(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{N} P_i(s)\Delta_i(s)$$

где $P_i(s)$ – передаточная функция i-го отдельного прямого пути от $X(s)$ до $Y(s)$, вычисленная как произведение передаточных функций дуг, входящих в этот путь; $\Delta(s)$ – определитель графа.

$$\Delta(s) = 1 - \sum_{j} L_j(s) + \sum_{j,k} L_j(s)L_k(s) - \sum_{j,k,m} L_j(s)L_k(s)L_m(s) + \ldots$$

где $L_j(s)$ – ПФ j-го замкнутого контура, равная произведению ПФ дуг, входящих в этот контур;

$L_j(s)L_k(s)$ – произведение ПФ пары (j-го и k-го) замкнутых контуров, не касающихся ни дугами, ни вершинами, суммирование осуществляется по всем парам не касающихся контуров;

$L_j(s)L_k(s)L_m(s)$ – произведение тройки (j-го, k-го и m-го) не касающихся контуров, суммирование производится по всем тройкам не касающихся контуров.

$\Delta_i(s)$ – дополнительный множитель для i– го пути равен определителю графа, в котором приравнены нулю коэффициенты передачи контуров, касающихся этого пути.

2. Примеры

Пример 1. Получить ПФ для многоконтурной системы, представленной на рис. 1

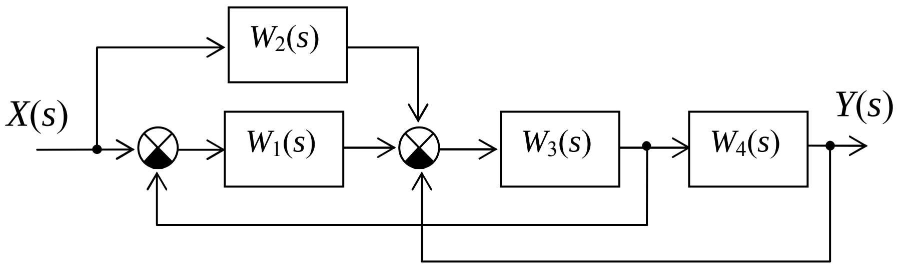


Рис.1 Пример многоконтурной структурной схемы

Этой системе соответствует сигнальный граф, показанный на рис. 2.

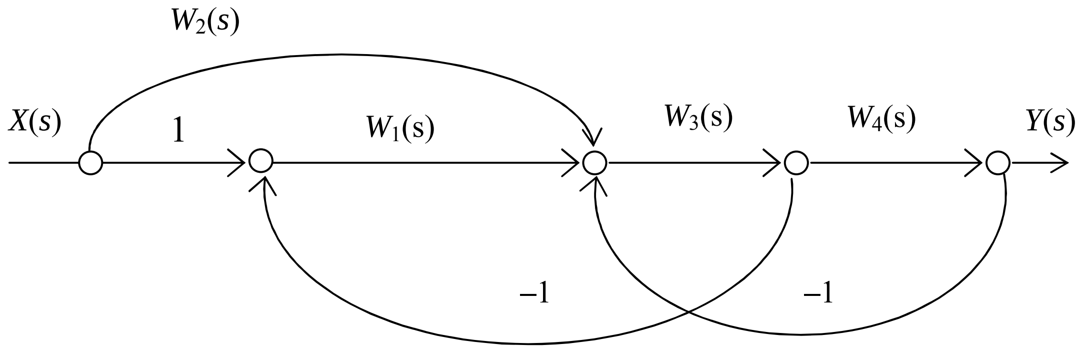


Рис. 2. Сигнальный граф многоконтурной системы

От входа к выходу ведут два пути:

$$P_1 = W_1 W_3 W_4, \qquad P_2 = W_2 W_3 W_4.$$

В графе есть два контура:

$$L_1 = -W_1 W_3, \qquad L_2 = -W_3 W_4.$$

Контур L_1 касается контура L_2, поэтому определитель графа вычисляется по формуле:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2).$$

Контуры здесь касаются всех путей, поэтому дополнительные множители путей $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$

Окончательно можно записать:

$$W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i \cdot \Delta_i}{\Delta} = \frac{W_1W_3W_4 + W_2W_3W_4}{1 + W_1W_3 + W_3W_4}.$$

Таким образом, использование сигнальных графов и применение формулы Мейсона позволяет алгоритмизировать процесс упрощения структурной схемы.

Пример 2. Рассмотрим пример системы, в которой не все контуры касаются всех путей (рис.3).

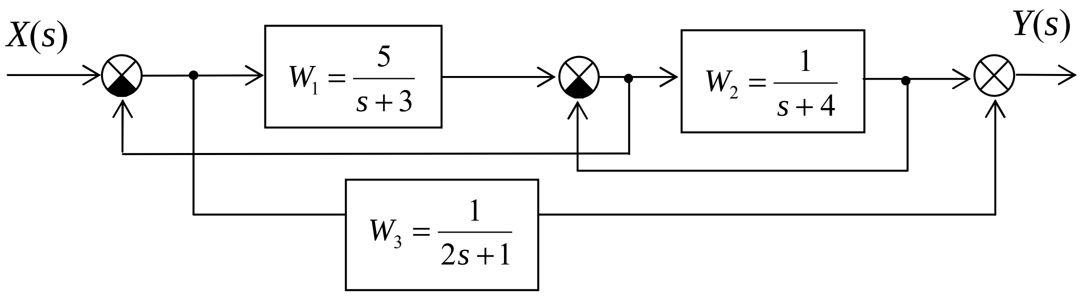


Рис. 3. Пример многоконтурной системы с заданными параметрами

Системе соответствует сигнальный граф, показанный на рис. 4.

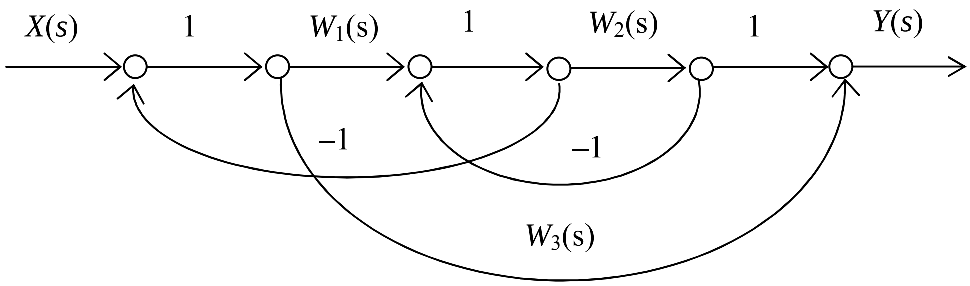


Рис. 4. Сигнальный граф динамической системы

От входа к выходу ведут два пути:

$$P_1 = W_1 W_2, \qquad P_2 = W_3.$$

В графе есть два контура:

$$L_1 = -W_1, \qquad L_2 = -W_2.$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2).$$

Первого пути касаются оба контура, а 2-го пути не касается 2-й контур, следовательно,

$$\Delta_1 = 1; \qquad \Delta_2 = 1 - L_2.$$

Таким образом,

$$W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i \cdot \Delta_i}{\Delta} = \frac{W_1 W_2 + W_3 (1 + W_2)}{1 + W_1 + W_2}.$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i \cdot \Delta_i}{\Delta} = \frac{s^5 + 29s^4 + 258s^3 + 988s^2 + 1664s + 960}{2s^6 + 49s^5 + 460s^4 + 2124s^3 + 5001s^2 + 5384s + 1680}.$$

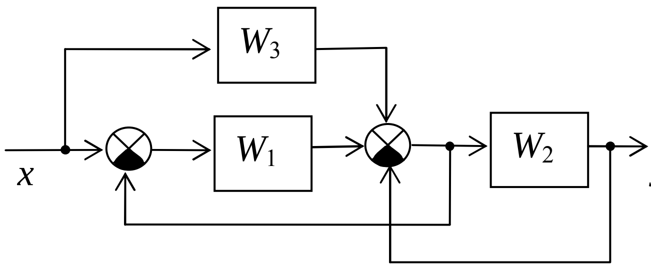
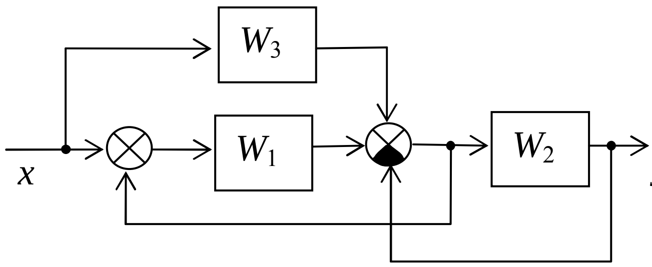
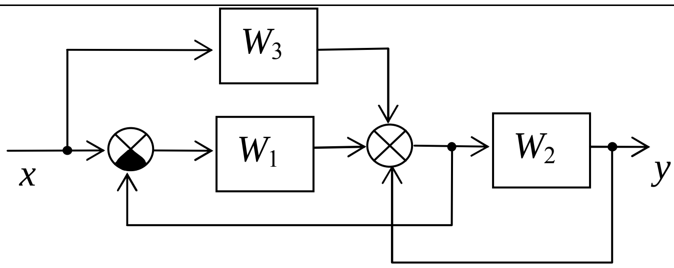
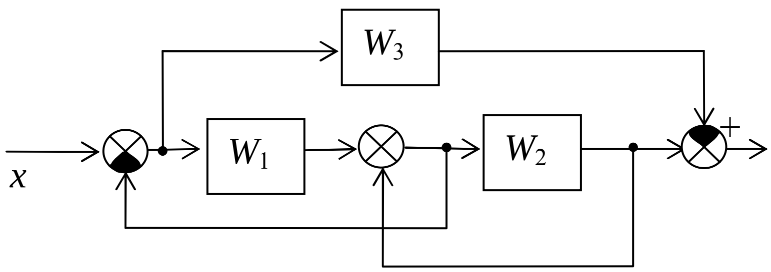
Рассматривая в *MatLab Simulink* исходную систему и полученную ПФ при подаче одинакового входного сигнала, можно убедиться в правильности преобразования.

3. Задание для практической работы

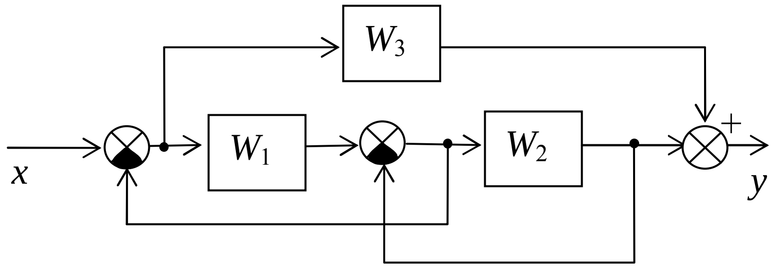
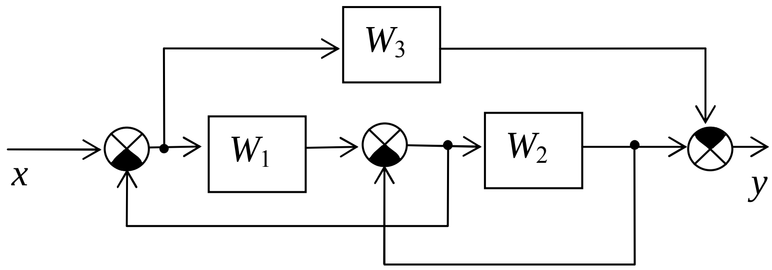
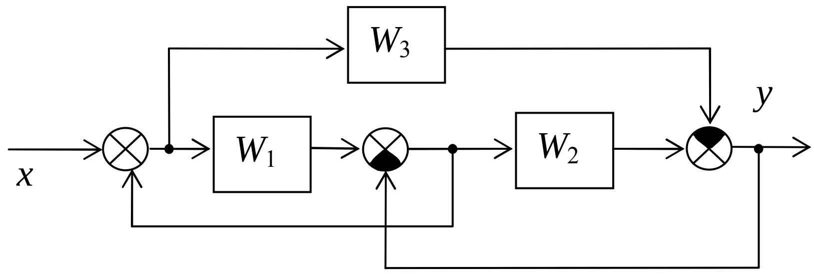
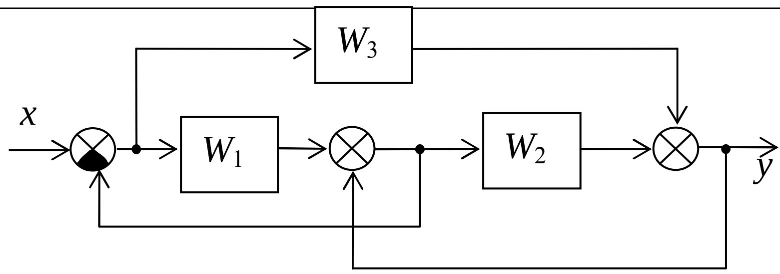
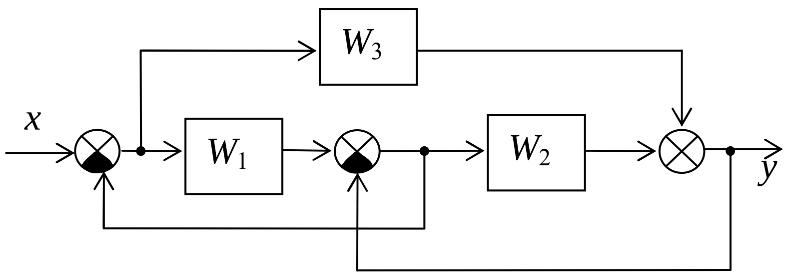
Выполнить с помощью формулы Мейсона замену структурной схемы одним динамическим звеном для указанного варианта системы из табл.1.

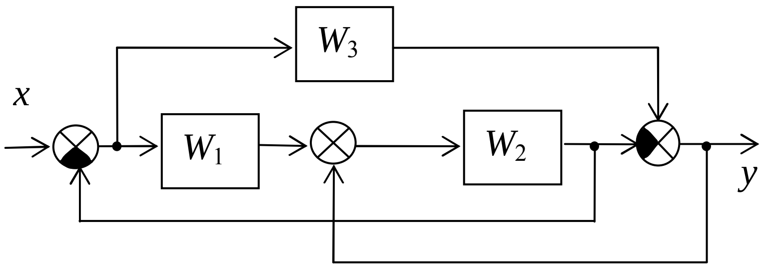
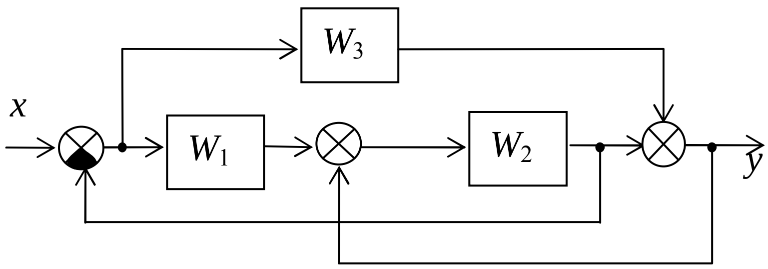
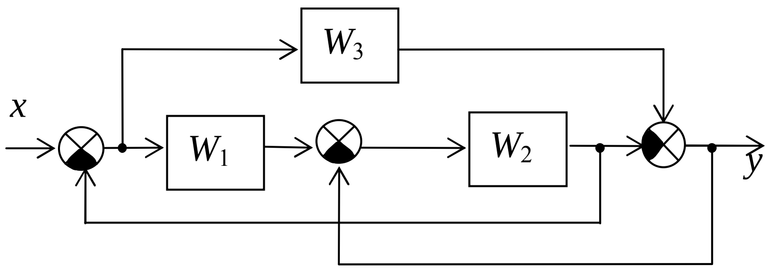
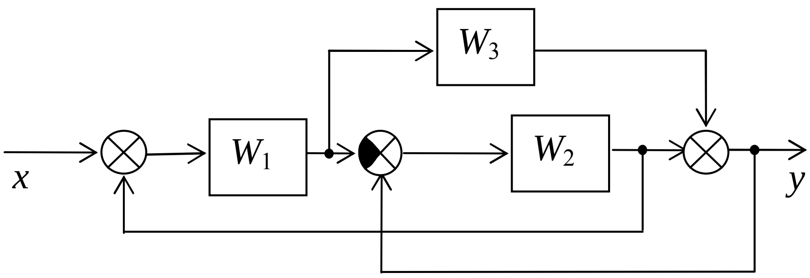
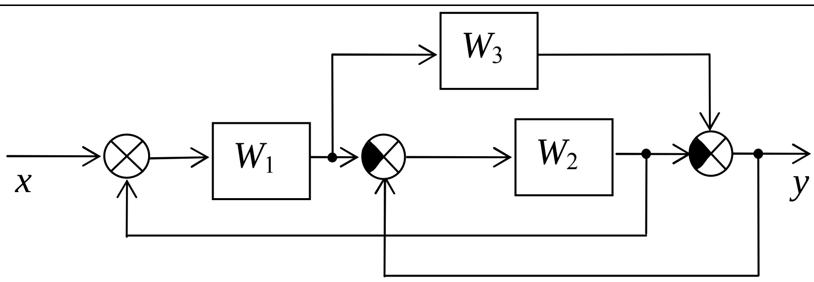
Таблица 1

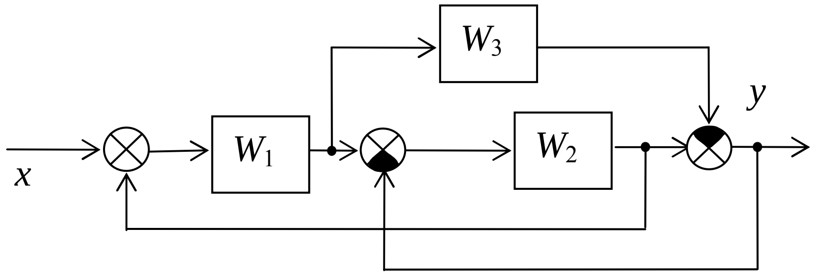
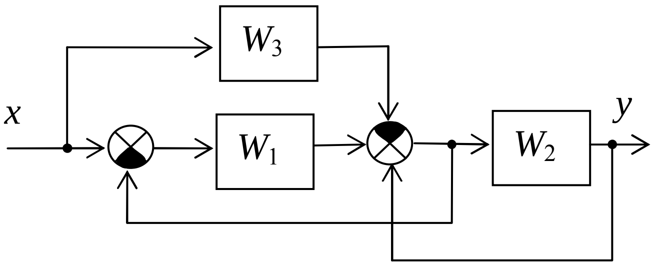
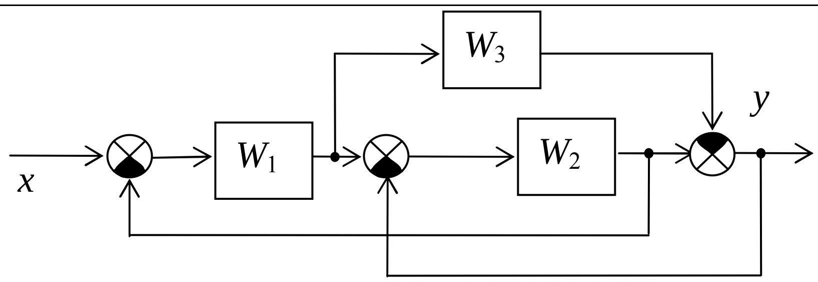
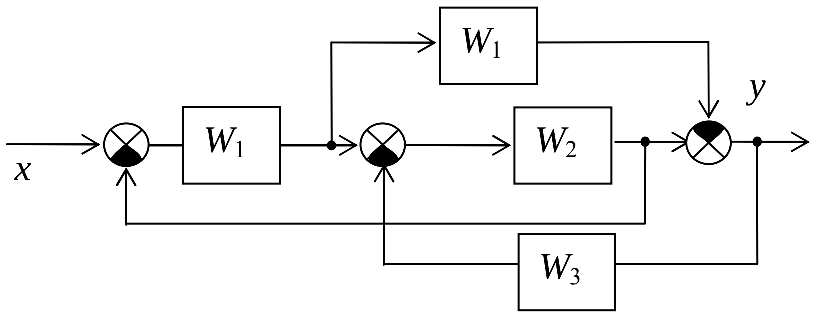
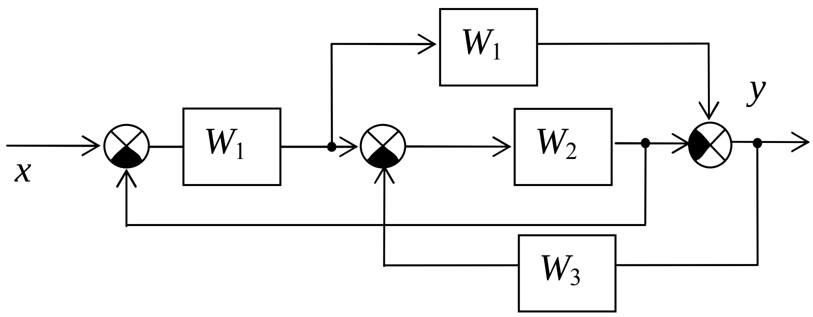
Варианты структур САУ

№ п/п	Исходная схема	
1	$W_1(s)=\dfrac{s+2}{s+3};$ $W_2(s)=\dfrac{2s+1}{s+3};$ $W_3(s)=\dfrac{8s+1}{3s+1};$	
2	$W_1(s)=\dfrac{s}{s+3};$ $W_2(s)=\dfrac{0.2s+1}{0.1s+1};$ $W_3(s)=\dfrac{0.8s+1}{3s};$	
3	$W_1(s)=\dfrac{0.5s+1}{s+3};$ $W_2(s)=\dfrac{s+1}{3s+6};$ $W_3(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.3s+1};$	
4	$W_1(s)=\dfrac{s+2}{s+3};$ $W_2(s)=\dfrac{2s+1}{s+3};$ $W_3(s)=\dfrac{2.8s+1}{1.3s+1};$	

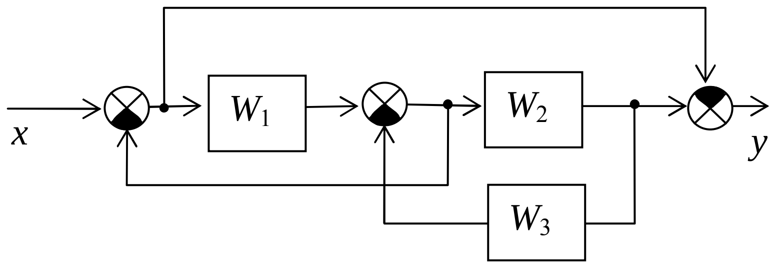
Продолжение табл. 1.

5	$W_1(s)=\dfrac{2s+1}{s+1};$ $W_2(s)=\dfrac{s}{s+3};$ $W_3(s)=\dfrac{8s+1}{3s};$	
6	$W_1(s)=\dfrac{s+1}{3s+6};$ $W_2(s)=\dfrac{5s+1}{s+3};$ $W_3(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.3s+1};$	
7	$W_1(s)=\dfrac{2s+1}{s+3};$ $W_2(s)=\dfrac{8s+1}{3s+1};$ $W_3(s)=\dfrac{s+2}{s+3};$	
8	$W_1(s)=\dfrac{0.8s+1}{3s};$ $W_2(s)=\dfrac{0.2s+1}{0.1s+1};$ $W_3(s)=\dfrac{0.8s+1}{3s};$	
9	$W_1(s)=\dfrac{s+1}{3s+6};$ $W_2(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.3s+1};$ $W_3(s)=\dfrac{0.5s+1}{s+3};$	

10	$W_1(s)=\dfrac{2s+1}{3s+1};$ $W_2(s)=\dfrac{0.6s+1}{0.8s+1};$ $W_3(s)=\dfrac{s+1}{4s+3};$	
11	$W_1(s)=\dfrac{0.8s+1}{3s};$ $W_2(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.3s+1};$ $W_3(s)=\dfrac{0.6s+1}{0.8s+1};$	
12	$W_1(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.4s+1};$ $W_2(s)=\dfrac{0.2s+1}{3s+1};$ $W_3(s)=\dfrac{s+1}{3s};$	
13	$W_2(s)=\dfrac{0.2s+1}{3s+1};$ $W_3(s)=\dfrac{s+1}{3s};$ $W_1(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.4s+1};$	
14	$W_3(s)=\dfrac{0.6s+1}{0.8s+1};$ $W_2(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.3s+1};$ $W_1(s)=\dfrac{0.8s+1}{3s};$	

15	$W_3(s)=\dfrac{0.6s+1}{0.8s+1};$ $W_1(s)=\dfrac{0.8s+1}{3s};$ $W_2(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.3s+1};$	
16	$W_1(s)=\dfrac{0.1s+2}{s+3};$ $W_2(s)=\dfrac{0.2s+1}{s+3};$ $W_3(s)=\dfrac{0.8s+1}{3s+1};$	
17	$W_3(s)=\dfrac{0.6s+1}{0.8s+1};$ $W_1(s)=\dfrac{0.8s+1}{3s};$ $W_2(s)=\dfrac{0.1s+1}{0.3s+1};$	
17	$W_3(s)=\dfrac{s+1}{8s+1};$ $W_1(s)=\dfrac{s+1}{3s};$ $W_2(s)=\dfrac{0.1s+1}{13s+1};$	
18	$W_3(s)=\dfrac{s+2}{2s+1};$ $W_1(s)=\dfrac{0.1s+1}{3s+3};$ $W_2(s)=\dfrac{0.1s+1}{4s+1};$	

Продолжение табл. 1.

19	$W_1(s) = \dfrac{s+0.1}{s+6};$ $W_2(s) = \dfrac{0.5s+1}{5s+3};$ $W_3(s) = \dfrac{0.3s+3}{0.6s+5};$ 
20	$W_1(s) = \dfrac{s+0.1}{s+6};$ $W_2(s) = \dfrac{0.5s+1}{5s+3};$ $W_3(s) = \dfrac{0.3s+3}{0.6s+5};$