

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача № 1

События A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) независимы в совокупности. События B_1 и B_2 заданы с помощью словесного описания. Используя операции алгебры событий, выразить B_1 и B_2 через A_k и найти их вероятности, если известно, что вероятности событий A_k вычисляются по формуле

$$p_k = 0,1 \cdot (k+1), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

№ варианта	n	B_1	B_2
1	3	Произойдет событие A_1 или событие A_2 .	Произойдет только событие A_1 или только событие A_2 .
2	3	Произойдет событие A_1 или одно из событий A_2, A_3 .	Не произойдет событие A_1 , но произойдет событие A_3 .
3	3	Произойдет только одно из событий A_1, A_2, A_3 .	Не произойдет событие A_1 или не произойдет событие A_2 .
4	3	Произойдет событие A_1 или не произойдет событие A_3 .	Не произойдет только одно из событий A_1, A_2, A_3 .
5	3	Произойдет событие A_2 или не произойдет событие A_3 .	Произойдет только A_2 из этих трех событий.
6	3	Не произойдет только одно из этих трех событий.	Произойдет событие A_1 или не произойдет событие A_2 .
7	3	Не произойдут события A_2 или A_3 .	Произойдут все события, кроме A_2 .
8	4	Произойдет хотя бы одно из четырех событий.	Произойдет только одно из четырех событий.
9	4	Произойдет событие A_2 или не произойдет событие A_3 .	Произойдет только событие A_3 или только событие A_4 из этих четырех событий.
10	4	Произойдет только одно из четырех событий A_1, A_2, A_3 и событие A_4 .	Не произойдет хотя бы одно из четырех событий.
11	4	Не произойдет только одно из четырех событий.	Не произойдет либо событие A_1 , либо событие A_3 .
12	4	Не произойдет ни одного из четырех событий.	Произойдет только одно из четырех событий.

13	4	Произойдут ровно два из четырех событий.	Произойдет либо только событие A_1 , либо только событие A_3 .
14	4	Одно из четырех событий не произойдет, а остальные три события произойдут.	Хотя бы одно из четырех событий не произойдет.
15	3	Произойдет только одно из трех событий.	Произойдет только событие A_3 .
16	3	Произойдет только событие A_1 или не произойдет ни одно из трех событий.	Не произойдет только событие A_3 .
17	4	Не произойдут только события A_2 и A_4 .	Не произойдут события A_2 и A_4 .
18	3	Хотя бы одно из трех событий не произойдет.	Произойдет только событие A_2 или только событие A_3 .
19	4	Произойдут только события A_2 и A_4 .	Произойдет событие A_1 или не произойдет ни одно из четырех событий.
20	4	Произойдет только событие A_2 или только событие A_3 .	Не произойдет хотя бы одно из событий A_2, A_3, A_4 .
21	3	Произойдет событие A_1 и не произойдет событие A_3 .	Произойдут все события, кроме одного из них.
22	4	Произойдет событие A_1 и одно из событий A_2, A_3, A_4 .	Произойдет событие A_1 и хотя бы одно из событий A_2, A_3, A_4 .
23	4	Не произойдет ни событие A_1 , ни событие A_2 .	Произойдет только одно из четырех событий.
24	4	Произойдет событие A_1 и не произойдет хотя бы одно из остальных событий.	Произойдет каждое из четырех событий, кроме одного.
25	5	Произойдет хотя бы одно из пяти событий.	Произойдет одно из пяти событий.
26	5	Произойдет событие A_1 и только одно из остальных пяти событий.	Не произойдет хотя бы одно из пяти событий.
27	5	Произойдет событие A_1 или события A_2 и A_3 .	Не произойдет ни одно из пяти событий.
28	3	Произойдет событие A_1 или не произойдет событие A_2 .	Произойдет только событие A_2 или только событие A_3 .
29	4	Произойдет событие A_2 или только одно из остальных событий.	Хотя бы одно из четырех событий не произойдет.
30	4	Произойдет два из четырех событий.	Произойдет событие A_1 или все остальные.

Задача № 2

Известны вероятности независимых событий A_1 и A_2 : $P(A_1) = 0,4$, $P(A_2) = 0,6$. Найти указанные условные вероятности.

№ варианта	A	Условная вероятность
1	$A_1 \cup A_2$	$P(A_1/A)$
2	$A_1 \cup A_2$	$P(\bar{A}_2/A)$
3	$A_1 \cup A_2$	$P(A_2/A)$
4	$A_1 \cup A_2$	$P(\bar{A}_1/A)$
5	$A_1 \cap A_2$	$P(A_1/\bar{A})$
6	$A_1 \cap A_2$	$P(\bar{A}_2/\bar{A})$
7	$A_1 \cap A_2$	$P(A_2/\bar{A})$
8	$A_1 \cap A_2$	$P(\bar{A}_1/\bar{A})$
9	$\bar{A}_1 \cup A_2$	$P(A_1/A)$
10	$A_1 \cup A_2$	$P(\bar{A}_1/A)$
11	$A_1 \cup A_2$	$P(A_2/A)$
12	$A_1 \cup A_2$	$P(\bar{A}_2/A)$
13	$A_1 \cup \bar{A}_2$	$P(A_1/A)$
14	$A_1 \cup \bar{A}_2$	$P(\bar{A}_1/A)$
15	$A_1 \cup \bar{A}_2$	$P(A_2/A)$
16	$A_1 \cup \bar{A}_2$	$P(\bar{A}_2/A)$
17	$\bar{A}_1 \cap A_2$	$P(A_1/\bar{A})$
18	$\bar{A}_1 \cap A_2$	$P(\bar{A}_1/\bar{A})$
19	$\bar{A}_1 \cap A_2$	$P(A_2/\bar{A})$
20	$\bar{A}_1 \cap A_2$	$P(\bar{A}_2/\bar{A})$
21	$A_1 \cap \bar{A}_2$	$P(A_1/\bar{A})$
22	$A_1 \cap \bar{A}_2$	$P(\bar{A}_2/\bar{A})$
23	$A_1 \cap \bar{A}_2$	$P(A_2/\bar{A})$
24	$A_1 \cap \bar{A}_2$	$P(\bar{A}_2/\bar{A})$

25	$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$	$P(A_1/A)$
26	$\bar{A}_1 \cup A_2$	$P(\bar{A}_1/A)$
27	$A_1 \cup \bar{A}_2$	$P(A_2/A)$
28	$A_1 \cup A_2$	$P(\bar{A}_2/A)$
29	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$	$P(A_1/\bar{A})$
30	$\bar{A}_1 \cap A_2$	$P(A_2/\bar{A})$

Задача № 3

Для последовательности $n=10$ испытаний по схеме Бернулли известна вероятность реализации события A в каждом испытании $P(A) = p$.
Найти вероятности следующих событий:

$\mu = M$ 1) $\mu = m$, 2) $\mu < m$, 3) $\mu \geq m$, 4) $m_1 \leq \mu \leq m_2$,

где μ — число реализаций события A в последовательности 10 испытаний.

$n=10$

№ варианта	p	m	m_1	m_2
1	0,3	6	5	7
2	0,4	6	5	7
3	0,5	6	5	7
4	0,6	6	5	7
5	0,7	6	5	7
6	0,3	5	4	6
7	0,4	5	4	6
8	0,5	5	4	6
9	0,6	5	4	6
10	0,7	5	4	6
11	0,3	4	3	4
12	0,4	4	3	4
13	0,5	4	3	4
14	0,6	4	3	4
15	0,7	4	3	5
16	0,3	3	3	5

17	0,4	3	3	5
18	0,5	3	3	5
19	0,6	3	3	5
20	0,7	3	3	5
21	0,3	7	4	7
22	0,4	7	4	7
23	0,5	7	4	7
24	0,6	7	4	7
25	0,7	7	4	7
26	0,3	4	4	6
27	0,4	4	4	6
28	0,5	4	4	6
29	0,6	4	4	6
30	0,7	4	4	6

Задача № 4

Для последовательности n испытаний по схеме Бернулли известна вероятность реализации события A в каждом испытании $P(A) = p$. Найти вероятности следующих событий:

1) $\mu = m$, 2) $\mu \leq m$, 3) $m_1 \leq \mu \leq m_2$,

где μ — число реализаций события A в последовательности n испытаний.

№ варианта	n	p	m	m_1	m_2
1	500	0,4	203	183	220
2	500	0,5	253	233	270
3	300	0,5	152	137	166
4	300	0,6	182	167	195
5	300	0,3	92	78	104
6	400	0,4	161	144	179
7	400	0,3	121	105	135
8	400	0,6	242	224	259

9	500	0,6	302	282	321
10	500	0,3	152	134	169
11	250	0,3	73	63	87
12	250	0,4	98	87	112
13	250	0,5	123	112	138
14	250	0,6	148	137	162
15	300	0,6	177	166	194
16	350	0,3	108	92	119
17	350	0,4	143	126	155
18	350	0,5	178	161	190
19	350	0,6	213	196	225
20	350	0,7	248	232	259
21	450	0,3	157	119	153
22	450	0,4	182	163	200
23	450	0,5	227	208	245
24	450	0,6	272	253	290
25	450	0,7	317	299	333
26	700	0,3	211	194	228
27	700	0,4	281	263	299
28	700	0,5	351	333	370
29	700	0,6	421	403	439
30	700	0,7	491	474	508

Задача № 5

Для последовательности n испытаний по схеме Бернулли известна вероятность реализации события A в каждом испытании $P(A) = p$. Найти вероятности следующих событий:

1) $\mu = m$, 2) $\mu \leq m$, 3) $m_1 \leq \mu \leq m_2$,

где μ – число реализаций события A в последовательности n испытаний.

№ варианта	n	p	m	m_1	m_2
1	700	0,01	3	6	8
2	500	0,008	2	3	5
3	800	0,005	1	2	4
4	500	0,006	2	3	5
5	600	0,005	5	2	4
6	200	0,04	9	6	8
7	100	0,03	4	1	3
8	900	0,01	7	8	10
9	300	0,001	3	1	3
10	500	0,002	1	2	4
11	100	0,07	3	5	7
12	800	0,005	2	3	5
13	500	0,008	1	4	6
14	600	0,005	2	3	5
15	500	0,006	5	2	4
16	400	0,02	6	7	9
17	300	0,01	5	1	3
18	100	0,09	10	7	9
19	100	0,003	3	0	2
20	200	0,005	4	1	3
21	700	0,001	3	0	2
22	900	0,001	1	2	4
23	800	0,001	4	1	3
24	1000	0,001	1	3	5
25	600	0,001	3	0	2
26	200	0,04	6	7	9
27	100	0,04	2	4	6
28	500	0,01	3	5	7
29	300	0,02	6	9	11
30	1000	0,002	0	2	4

Задача № 6

В условиях задачи № 4 и 5 вычислить соответствующие вероятности, пользуясь

формулой Бернулли;

правилом 1, основанным на локальной теореме Лапласа;

правилом 2, основанным на интегральной теореме Лапласа;

правилом 3, основанным на теореме Пуассона.

Результаты вычислений сравнить с точным значением, вычисляемым по *формуле Бернулли*. Объяснить погрешность при вычислении с помощью приближенных формул, основываясь на *предельных теоремах для схемы Бернулли*.

Указание. Для решения задачи рекомендуем воспользоваться пакетом Excel.

Библиографический список

1. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983.
2. *Вероятностные разделы математики: учебник для бакалавров технических направлений // Под ред. Ю. Д. Максимова* – СПб.: Тип. «Иван Федоров», 2001.
3. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей: учебник. – М.: Наука, 1988.
4. *Колмаев В. А., Калинина В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. – М.: ИНФРА-М, 1997.
5. *Малошевский С. Г.* Теория вероятностей: учебное пособие. – СПб.: ПГУПС, 2000.
6. Теория вероятностей: учеб. для вузов (Сер. Математика в техническом университете, вып. XVI) / А. В. Печинкин, О. И. Тескин, Г. М. Цветкова. – М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
7. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979.
8. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей: учебник. – М.: Наука, 1987.

Приложение 1

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

<i>t</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>t</i>
0	0,399	0,399	0,399	0,399	0,399	0,398	0,398	0,398	0,398	0,397	0
0,1	0,397	0,397	0,396	0,396	0,395	0,394	0,394	0,393	0,393	0,392	0,1
0,2	0,391	0,390	0,389	0,389	0,388	0,387	0,386	0,385	0,384	0,383	0,2
0,3	0,381	0,380	0,379	0,378	0,377	0,375	0,374	0,373	0,371	0,370	0,3
0,4	0,368	0,367	0,365	0,364	0,362	0,361	0,359	0,357	0,356	0,354	0,4
0,5	0,352	0,350	0,348	0,347	0,345	0,343	0,341	0,339	0,337	0,335	0,5
0,6	0,333	0,331	0,329	0,327	0,325	0,323	0,321	0,319	0,317	0,314	0,6
0,7	0,312	0,310	0,308	0,306	0,303	0,301	0,299	0,297	0,294	0,292	0,7
0,8	0,290	0,287	0,285	0,283	0,280	0,278	0,276	0,273	0,271	0,268	0,8
0,9	0,266	0,264	0,261	0,259	0,256	0,254	0,252	0,249	0,247	0,244	0,9
1	0,242	0,240	0,237	0,235	0,232	0,230	0,227	0,225	0,223	0,220	1
1,1	0,218	0,215	0,213	0,211	0,208	0,206	0,204	0,201	0,199	0,197	1,1
1,2	0,194	0,192	0,190	0,187	0,185	0,183	0,180	0,178	0,176	0,174	1,2
1,3	0,171	0,169	0,167	0,165	0,163	0,160	0,158	0,156	0,154	0,152	1,3
1,4	0,150	0,148	0,146	0,144	0,141	0,139	0,137	0,135	0,133	0,131	1,4
1,5	0,130	0,128	0,126	0,124	0,122	0,120	0,118	0,116	0,115	0,113	1,5
1,6	0,111	0,109	0,107	0,106	0,104	0,102	0,101	0,099	0,097	0,096	1,6
1,7	0,094	0,092	0,091	0,089	0,088	0,086	0,085	0,083	0,082	0,080	1,7
1,8	0,079	0,078	0,076	0,075	0,073	0,072	0,071	0,069	0,068	0,067	1,8
1,9	0,066	0,064	0,063	0,062	0,061	0,060	0,058	0,057	0,056	0,055	1,9
2	0,054	0,053	0,052	0,051	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	2
2,1	0,044	0,043	0,042	0,041	0,040	0,040	0,039	0,038	0,037	0,036	2,1
2,2	0,035	0,035	0,034	0,033	0,032	0,032	0,031	0,030	0,030	0,029	2,2
2,3	0,028	0,028	0,027	0,026	0,026	0,025	0,025	0,024	0,023	0,023	2,3
2,4	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020	0,019	0,019	0,018	0,018	2,4
2,5	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,015	0,015	0,015	0,014	0,014	2,5
2,6	0,014	0,013	0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,011	0,011	0,011	2,6
2,7	0,010	0,010	0,010	0,010	0,009	0,009	0,009	0,009	0,008	0,008	2,7
2,8	0,008	0,008	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,006	0,006	0,006	2,8
2,9	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	2,9
3	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	3,0
3,1	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,002	3,1
3,2	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	3,2
3,3	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	3,3
3,4	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	3,4
3,5	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	3,5
3,6	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	3,6
<i>t</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>t</i>

Приложение 3

Значения функции Пуассона $P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

$m \backslash \lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

$m \backslash \lambda$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0988	0,1216	0,1433	0,1647	0,1839
3	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

Свойства алгебры событий

- C1. $A \cup A = A, A \cap A = A;$
- C2. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$
- C3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
- C4. $A(B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$
- C5. $A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset;$
- C6. $A \cup \Omega = \Omega, A \cap \Omega = A;$
- C7. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset;$
- C8. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A, A \cup B = B;$
- C9. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$
- C10. $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$

Аксиомы вероятностной меры

- A1. $P(A) \geq 0.$
- A2. $P(\Omega) = 1.$
- A3. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$
- A4. Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и при этом $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = 0.$$

Свойства вероятностей

- C1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A);$
- C2. $P(\emptyset) = 0;$
- C3. $0 \leq P(A) \leq 1;$
- C4. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B).$

Теорема сложения

1. Два несовместных события

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2. Общий случай для двух событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

3. Два независимых события

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

4. Произвольное число попарно несовместных событий

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{k=n} P(A_k).$$

5. Произвольное число независимых в совокупности событий

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{k=n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{k=n} (1 - P(A_k)).$$

Теорема умножения

1. Два независимых события

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

2. Общий случай для двух событий, $P(A) \neq 0$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A).$$

3. Произвольное число независимых в совокупности событий

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{k=n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{k=n} P(A_k).$$

4. Общий случай для произвольного числа событий, если существуют соответствующие условные вероятности

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{k=n} A_k\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$