Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской
технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО ТЕМЕ 2

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Санкт-Петербург
2006

Задачи 1 - 2

На языке окрестностей и на языке "$\varepsilon - \delta$" сформулировать определения предела функции в точке и одностороннего предела, соответствующие символическим равенствам:

а) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$,

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$,

в) $\lim\limits_{x \to 2+0} \log_3(x-2) = -\infty$.

Справочный материал

Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Определение 1

h - *<u>окрестностью точки</u>* x_0 называется множество

$$U_h(x_0) = (x_0 - h;\, x_0 + h),$$

где $h > 0$ (рис. 1).

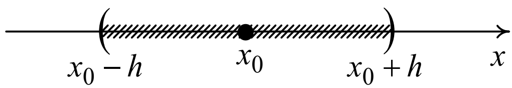

Рис. 1.

Если $x \in U_h(x_0)$, то x удовлетворяет неравенству

$$x_0 - h < x < x_0 + h \Leftrightarrow -h < x - x_0 < h \Leftrightarrow |x - x_0| < h.$$

Определение 2

<u>Проколотой</u> h - *<u>окрестностью точки</u>* x_0 называется множество

$$\overset{\circ}{U}_h(x_0) = (x_0 - h;\, x_0) \cup (x_0;\, x_0 + h),$$

где $h > 0$ (рис. 2).

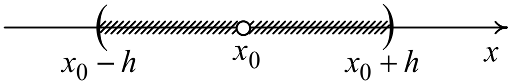

Рис. 2.

Тогда

$$x \in \overset{\circ}{U}_h(x_0) \Leftrightarrow |x - x_0| < h,\ x \neq x_0 \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < h .$$

Расширим вещественную ось, добавив два символа $-\infty$ и $+\infty$, которые назовем <u>*бесконечно – удаленными точками числовой оси.*</u>

Определение 3

h - <u>*окрестностью точки*</u> $(-\infty)$ называется множество

$$U_h(-\infty) = (-\infty; -h),$$

где $h > 0$ (рис. 3).

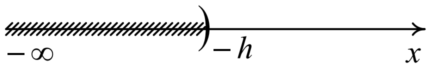

Рис. 3.

Тогда

$$x \in U_h(-\infty) \Leftrightarrow x < -h .$$

Определение 4

h - <u>*окрестностью точки*</u> $(+\infty)$ называется множество

$$U_h(+\infty) = (h; +\infty),$$

где $h > 0$ (рис. 4).

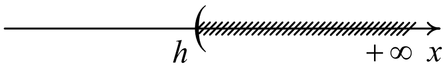

Рис. 4.

Тогда

$$x \in U_h(+\infty) \Leftrightarrow x > h .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Понятие проколотой окрестности для $-\infty$ и $+\infty$ не определено.

Определение 5

Точка x_0 называется *<u>предельной точкой множества</u>* X, если в любой ее окрестности находится хотя бы одна точка данного множества X, отличная от x_0.

Определение 6

Пусть X - область определения функции $y = f(x)$ и точка x_0 - предельная точка множества X.

Конечная или бесконечная величина A называется *<u>пределом функции</u>* $y = f(x)$ *<u>в точке</u>* x_0 (*<u>при</u>* $x \to x_0$), если для любой окрестности точки A найдется такая окрестность точки x_0, что для всех x из области определения X и найденной проколотой окрестности точки x_0 соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в заданную окрестность точки A. Обозначается:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) \underset{x \to x_0}{\to} A.$$

Теперь запишем это определение, используя символы: $\forall$ - для любой, $\exists$ - существует (найдется), : - такая что, $\Rightarrow$ - следует, $\Leftrightarrow$ - равносильно.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A) \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Это определение является определением предела на языке окрестностей. Заменив в нем записи $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ и $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ соответствующими неравенствами, получим определение предела на языке "$\varepsilon - \delta$".

Определение 7

<u>*Левосторонней окрестностью точки*</u> x_0 называется множество

$$U_h^-(x_0) = (x_0 - h;\, x_0),$$

где $h > 0$ (рис. 5).

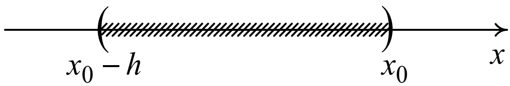

Рис. 5.

Тогда

$$x \in U_h^-(x_0) \Leftrightarrow x_0 - h < x < x_0.$$

Определение 8

<u>*Правосторонней окрестностью точки*</u> x_0 называется множество

$$U_h^+(x_0) = (x_0;\, x_0 + h),$$

где $h > 0$ (рис. 6).

Рис. 6.

Тогда

$$x \in U_h^+(x_0) \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + h.$$

Определение 9 (Левостороннего предела)

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A)\, \exists U_\delta(x_0): \forall x \in X \cap U_\delta^-(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Определение 10 (Правостороннего предела)

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(A) \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in X \cap U_\delta^+(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Решение задач 1 – 2

а) Пусть X - область определения функции $y = f(x)$ и точка $x_0 = 3$ - предельная точка множества X.

1) <u>На языке окрестностей</u>

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(+\infty) \exists U_\delta(3) : \forall x \in X \cap \overset{\circ}{U}_\delta(3) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(+\infty).$$

2) <u>На языке</u> "$\varepsilon - \delta$"

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X \text{ и } 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon .$$

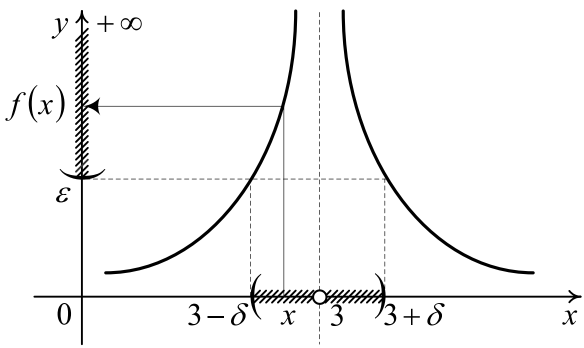

Рис. 7.

На рисунке 7 проиллюстрировано определение предела в терминах окрестностей. На осях Oy и Ox заштрихованы соответственно области $U_\varepsilon(+\infty)$ и $\overset{\circ}{U}_\delta(3)$.

б) Пусть X - область определения функции $y=f(x)$ и точка $x_0=-\infty$ - предельная точка множества X.

1) <u>На языке окрестностей</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1 \text{ (рис. 8) } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(1)\,\exists U_\delta(-\infty): \forall x\in X\cap U_\delta(-\infty) \Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(1).$$

2) <u>На языке</u> "$\varepsilon-\delta$"

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0: \forall x\in X \text{ и } x<-\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon .$$

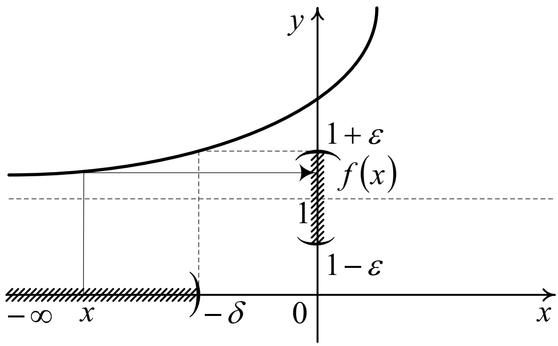

Рис. 8.

в) Так как областью определения функции $y=\log_3(x-2)$ является множество $X=(2;+\infty)$, то точка $x_0=2$ является предельной точкой этого множества, а $X\cap U_\delta^+(2)=U_\delta^+(2)$.

1) <u>На языке окрестностей</u>

$$\lim_{x\to 2+0} \log_3(x-2) = -\infty \text{ (рис. 9) } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(-\infty)\, \exists U_\delta(2) : \forall x \in U_\delta^+(2) \Rightarrow \log_3(x-2) \in U_\varepsilon(-\infty).$$

2) <u>На языке</u> "$\varepsilon - \delta$"

$$\lim_{x\to 2+0} \log_3(x-2) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 2 < x < 2+\delta \Rightarrow \log_3(x-2) < -\varepsilon .$$

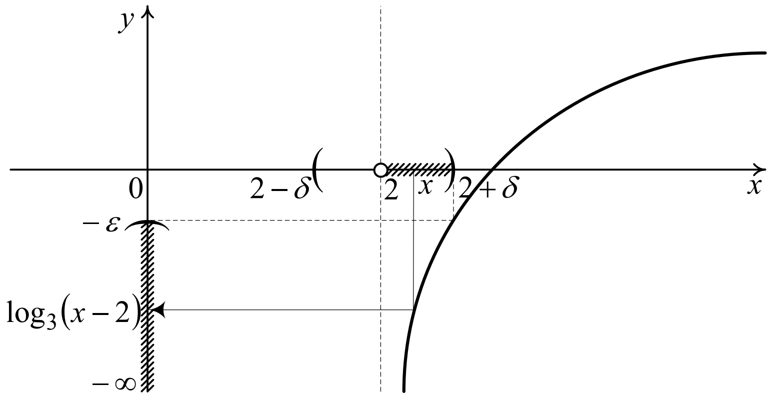

Рис. 9.

Задача 3

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(2x^2 - 3x - 2\right)^2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}.$$

Справочный материал

Теорема 1

Если $f(x) \equiv C$, где C - конечное число, то для любого x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = C.$$

Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \to x_0} f(x) = B.$$

Теорема 2

Предел суммы двух функций равен сумме их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = A + B.$$

Теорема 3

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B.$$

Следствие

Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} \left(C \cdot f(x)\right) = C \cdot A.$$

Теорема 4

Предел частного двух функций равен частному их пределов, если $B \neq 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Теоремы о пределах можно использовать и в том случае, когда пределы функций бесконечны, если это не приводит к неопределенностям вида:

$$[\infty-\infty], \quad [0\cdot\infty], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad \left[\frac{0}{0}\right].$$

Определение

Функции, предел которых не может быть найден путем непосредственного применения теорем о пределах, называются *неопределенными выражениями*.

Нахождение пределов таких выражений называют *раскрытием неопределенностей*.

Действия на расширенной числовой оси

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$.

Сложение

1) если $A=+\infty$, $B=+\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty;$$

2) если $A=-\infty$, $B=-\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty;$$

3) если $A=+\infty$, $B=-\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=(+\infty)+(-\infty)=[\infty-\infty];$$

4) если A - конечное число, $B=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=A+\infty=\infty.$$

Умножение

1) если $A\neq 0$, $B=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot\infty=\infty;$$

2) если $A=0$, $B=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=[0\cdot\infty].$$

Деление

1) если $A=\infty$, $B=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right];$$

2) если A - конечное число, $B=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0;$$

3) если $A\neq 0$, $B=0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty;$$

4) если $A=0$, $B=0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Решение задачи 3

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(2x^2-3x-2\right)^2}{x^3-2x^2-4x+8}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для раскрытия неопределенности разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

1) Чтобы разложить многочлен $2x^2-3x-2$ на множители, найдем корни уравнения $2x^2-3x-2=0$:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}=\left[\begin{array}{l}2\\-0,5\end{array}\right..$$

Следовательно,

$$\left(2x^2-3x-2\right)^2=\left(2\left(x-2\right)\left(x+0,5\right)\right)^2=\left(x-2\right)^2\left(2x+1\right)^2.$$

2) Чтобы разложить многочлен x^3-2x^2-4x+8 на множители, сгруппируем его первое слагаемое со вторым, а третье с четвертым:

$$x^3-2x^2-4x+8=x^2\left(x-2\right)-4\left(x-2\right)=\left(x-2\right)\left(x^2-4\right)=$$

$$=\left(x-2\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)=\left(x-2\right)^2\left(x+2\right).$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(2x^2-3x-2\right)^2}{x^3-2x^2-4x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)^2\left(2x+1\right)^2}{\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(2x+1\right)^2}{x+2}=\frac{25}{4}.$$

Задача 4

Вычислить предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-3x}\right)$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}$.

Решение задачи 4

а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\left[\infty-\infty\right]$.

Для раскрытия неопределенности дополним выражение, стоящее под знаком предела, до разности квадратов. Для этого домножим и разделим его на $\left(\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-3x}\right)$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-3x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-3x}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x+5-\left(x^2-3x\right)}{\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-3x}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Для раскрытия неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ вынесем в числителе и знаменателе за скобки старшие степени x:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2-3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{2|x|},$$

поскольку $\frac{5}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$, $\frac{1}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$, $\frac{5}{x^2}\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$, $\frac{3}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$.

Таким образом,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{|x|}=\left[\begin{array}{l}2,\ x\to+\infty\\-2,\ x\to-\infty\end{array}\right..$$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Для раскрытия неопределенности дополним числитель выражения, стоящего под знаком предела, до разности кубов. Для этого домножим и разделим дробь на $\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+6)-8}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}=\frac{1}{4+2\cdot 2+4}=\frac{1}{12}.$$

Задачи 5 – 6

Вычислить предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}^2 x}-1}{\ln\cos 3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sqrt{2+x+x^2}-2}$.

Справочный материал

Определение 1

Функция $\alpha(x)$ называется <u>*бесконечно малой (б. м.) в точке*</u> x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 .$$

Определение 2

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. м. в точке x_0.

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ (или $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$), то $\alpha(x)$ называется <u>*б. м. более высокого порядка, чем*</u> $\beta(x)$.

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где C - конечное число, отличное от нуля, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются <u>*б. м. одного порядка*</u>.

Определение 3

Б. м. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются <u>*эквивалентными в точке*</u> x_0, если предел их отношения равен единице, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 .$$

Обозначается: $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \beta(x)$.

Свойства эквивалентных б. м.

1) Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. м. в точке x_0 и $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \alpha_1(x)$, $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \beta_1(x)$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

т. е. предел отношения двух б. м. функций не изменится, если хотя бы одну из них заменить на эквивалентную ей б. м.

2) Сумма б. м. функций разного порядка эквивалентна б. м. меньшего порядка.

3) Сумма б. м. функций одного порядка эквивалентна сумме эквивалентных им б. м., за исключением случая разности эквивалентных б. м.

Таблица эквивалентных б. м.

$\sin\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)}-1 \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)$
$\mathrm{tg}\,\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)}-1 \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)\ln a$
$\arcsin\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)$	$\ln(1+\alpha(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)$
$\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \alpha(x)$	$\log_a(1+\alpha(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
$1-\cos\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$	$(1+\alpha(x))^p-1 \underset{x\to x_0}{\sim} p\alpha(x)$

Определение 4

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно большой (б. б.) в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0}|\alpha(x)| = +\infty .$$

Определение 5

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. б. в точке x_0.

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ (или $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$), то $\alpha(x)$ называется *б. б. более высокого порядка, чем* $\beta(x)$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, где C - конечное число, отличное от нуля, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются _б. б. одного порядка_.

Определение 6

Б. б. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются _эквивалентными в точке_ x_0, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Обозначается: $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta(x)$.

Свойства эквивалентных б. б.

1) Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. б. в точке x_0 и $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha_1(x)$, $\beta(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta_1(x)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

т. е. предел отношения двух б. б. функций не изменится, если хотя бы одну из них заменить на эквивалентную ей б. б.

2) Сумма б. б. функций разного порядка эквивалентна б. б. большего порядка.

3) Сумма б. б. функций одного порядка эквивалентна сумме эквивалентных им б. б., за исключением случая разности эквивалентных б. б.

Решение задач 5 – 6

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}^2 x}-1}{\ln\cos 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для раскрытия неопределенности воспользуемся таблицей эквивалентных б. м. функций:

$$e^{\operatorname{tg}^2 x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\ln\cos 3x = \ln\left(1 + (\cos 3x - 1)\right) \underset{x \to 0}{\sim} \cos 3x - 1.$$

Заменив б. м. на эквивалентные, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{\ln\cos 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos 3x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Поскольку неопределенность еще не раскрыта, снова воспользуемся таблицей эквивалентных б. м.:

$$\operatorname{tg}^2 x \underset{x \to 0}{\sim} x^2,$$

$$\cos 3x - 1 = -(1 - \cos 3x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{(3x)^2}{2} = -\frac{9}{2}x^2.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{\ln\cos 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos 3x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\frac{2}{9}\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = -\frac{2}{9}.$$

б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{2 + x + x^2} - 2} = \left[\dfrac{0}{0}\right].$

Чтобы воспользоваться таблицей эквивалентных б. м. функций, сделаем замену переменной. Обозначим $x - 1 = t$. Тогда при $x \to 1$ t является б. м. Переходя к пределу при $t \to 0$, получим

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{2 + x + x^2} - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi(1 + t)}{\sqrt{2 + 1 + t + (1 + t)^2} - 2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(\pi + \pi t)}{\sqrt{4 + 3t + t^2} - 2} = -\lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi t}{\sqrt{4 + 3t + t^2} - 2} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Теперь в числителе и знаменателе перейдем к эквивалентным б. м.:

$$\sin \pi t \underset{t \to 0}{\sim} \pi t,$$

$$\sqrt{4+3t+t^2}-2=2\left(\sqrt{1+\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{4}}-1\right)=$$

$$=2\left(\left(1+\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)\underset{t \to 0}{\sim} 2\,\frac{1}{2}\left(\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{4}\right)=\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{4}.$$

Поскольку сумма б. м. функций разного порядка эквивалентна б. м. меньшего порядка, $\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{4}\underset{t \to 0}{\sim}\frac{3t}{4}$. Следовательно,

$$\sqrt{4+3t+t^2}\underset{t \to 0}{\sim}\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{4}\underset{t \to 0}{\sim}\frac{3t}{4}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to 1}\frac{\sin \pi x}{\sqrt{2+x+x^2}-2}=$$

$$=-\lim_{t \to 0}\frac{\sin \pi t}{\sqrt{4+3t+t^2}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{t \to 0}\frac{4\pi t}{3t}=-\frac{4\pi}{3}.$$

Задача 7

Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{5+x}{x}}.$$

Справочный материал

Теорема

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, тогда

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = A^B .$$

Эту теорему можно использовать и в том случае, когда $B = \pm\infty$, а $A \neq 1$:

1) если $A > 1$, $B = +\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = A^{+\infty} = +\infty;$$

2) если $0 \le A < 1$, $B = +\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = A^{+\infty} = 0;$$

3) если $A > 1$, $B = -\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = A^{-\infty} = 0;$$

4) если $0 \le A < 1$, $B = -\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = A^{-\infty} = +\infty .$$

Если $A = 1, B = \infty$, или $A = \infty, B = 0$, или $A = 0, B = 0$, то появляются неопределенности вида:

$$\left[1^{\infty}\right], \quad \left[\infty^{0}\right], \quad \left[0^{0}\right].$$

Перечисленные неопределенности связаны с <u>*показательно – степенной функцией*</u> $\left(u(x)\right)^{v(x)}$. Они могут быть раскрыты с помощью представления функции u^v в виде

$$u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}.$$

В этом случае неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$, $\left[0^{0}\right]$ сводятся к неопределенности $\left[0 \cdot \infty\right]$ для функции $v \ln u$. Если при этом $\lim\limits_{x \to x_0} v \ln u = B$, то $\lim\limits_{x \to x_0} u^v = e^B$.

Решение задачи 7

$$\lim_{x \to 0} \left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)^{\frac{5+x}{x}} = \left[1^{\infty}\right].$$

Для раскрытия неопределенности представим показательно – степенную функцию под знаком предела в виде:

$$\left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)^{\frac{5+x}{x}} = e^{\ln\left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)^{\frac{5+x}{x}}} = e^{\frac{5+x}{x} \cdot \ln\left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)}.$$

Тогда

$$\lim_{x \to 0} \left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)^{\frac{5+x}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{5+x}{x} \cdot \ln\left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{5+x}{x} \cdot \ln\left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)\right)},$$

причем

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5+x}{x} \cdot \ln\left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)\right) = \left[0 \cdot \infty\right].$$

Чтобы раскрыть неопределенность $\left[0 \cdot \infty\right]$, заменим б. м. функцию $\ln\left(2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}\right)$ на простейшую эквивалентную. Для этого воспользуемся последовательно соотношениями из таблицы эквивалентностей:

$$\ln\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)=\ln\left(1+\left(1-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)\right)\underset{x\to 0}{\sim}1-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}=$$

$$=-\left(e^{\arcsin^2\sqrt{x}}-1\right)\underset{x\to 0}{\sim}-\arcsin^2\sqrt{x}\underset{x\to 0}{\sim}-\left(\sqrt{x}\right)^2=-x\,.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{5+x}{x}\cdot\ln\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5+x}{x}\cdot(-x)\right)=-5\,.$$

Таким образом, искомый предел будет равен

$$\lim_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{5+x}{x}}=e^{-5}\,.$$

Задача 8а

Определить порядок функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ относительно x, предварительно установив, являются ли они в точке x_0 бесконечно малыми или бесконечно большими. Сравнить функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Выделить главную часть.

а) $f_1(x)=\operatorname{arctg}^2(4\sqrt[3]{x}+x^2+x^3)$,

б) $f_2(x)=\sqrt[3]{1+\sin x}-1$, $x_0=0$.

Справочный материал

Определение 1

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. м. функции в точке x_0. $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка* k ($k>0$) *относительно* $\beta(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c\,,$$

где c - конечное число, отличное от нуля.

Обозначается: $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} c\left(\beta(x)\right)^k$.

Определение 2

<u>Главной частью бесконечно малой функции</u> $f(x)$ *<u>в конечной точке</u>* x_0 называется простейшая б. м. вида $c(x-x_0)^k$ ($c\neq 0$), эквивалентная $f(x)$ при $x\to x_0$, где k - *<u>порядок б. м.</u>* $f(x)$ *<u>относительно б. м.</u>* $(x-x_0)$.

Определение 3

<u>Главной частью бесконечно малой функции</u> $f(x)$ *<u>в бесконечно удаленной точке</u>* называется простейшая б. м. вида $\dfrac{c}{x^k}$ ($c\neq 0$), эквивалентная $f(x)$ при $x\to\infty$, где k - *<u>порядок б. м.</u>* $f(x)$ *<u>относительно б. м.</u>* $\dfrac{1}{x}$.

Свойства главных частей б. м.

1) Главная часть произведения б. м. функций равна произведению главных частей сомножителей.

2) Главная часть суммы б. м. одного порядка равна сумме главных частей слагаемых, за исключением случая разности эквивалентных б. м.

3) Пусть $\alpha(x)=f(x)\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. м. в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$ ($c\neq 0$, $c\neq\infty$). Тогда

$$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} c\,\beta(x).$$

Решение задачи 8а

а) Вычислим предел $f_1(x)=\operatorname{arctg}^2(4\sqrt[3]{x}+x^2+x^3)$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}^2(4\sqrt[3]{x} + x^2 + x^3) = 0.$$

Следовательно, $f_1(x)$ является б. м. функцией в точке $x = 0$. Поэтому главную часть будем искать в виде $c\,x^k$. Для ее нахождения воспользуемся таблицей эквивалентных б. м.:

$$\operatorname{arctg}^2\left(4\sqrt[3]{x} + x^2 + x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} \left(4\sqrt[3]{x} + x^2 + x^3\right)^2.$$

Поскольку сумма б. м. функций разного порядка эквивалентна б. м. меньшего порядка, имеем соотношение

$$\left(4\sqrt[3]{x} + x^2 + x^3\right)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \left(4\sqrt[3]{x}\right)^2 = 16x^{2/3}.$$

Таким образом, главной частью б. м. $f_1(x)$ в точке $x = 0$ является б. м. $16x^{2/3}$, имеющая относительно x порядок $k_1 = \dfrac{2}{3}$.

б) Вычислим предел $f_2(x) = \sqrt[3]{1+\sin x} - 1$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+\sin x} - 1\right) = 0.$$

Следовательно, $f_2(x)$ является б. м. функцией в точке $x = 0$. Поэтому главную часть также будем искать в виде $c\,x^k$:

$$\sqrt[3]{1+\sin x} - 1 = (1+\sin x)^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}x.$$

Главной частью б. м. $f_2(x)$ в точке $x = 0$ является б. м. $\dfrac{1}{3}x$, порядок которой $k_2 = 1$.

Сравнив порядки б. м. функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, видим, что $k_2 > k_1$. Отсюда следует, что $f_2(x)$ есть б. м. более высокого порядка, чем б. м. $f_1(x)$.

Задача 8б

Определить порядок функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ относительно x, предварительно установив, являются ли они в точке x_0 бесконечно малыми или бесконечно большими. Сравнить функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Выделить главную часть.

а) $f_1(x) = \dfrac{x^3 + \sqrt{x+100} + 5x}{2x+1}$,

б) $f_2(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \sqrt{x^6 + \dfrac{1}{x}}$, $x_0 = \infty$.

Справочный материал

Определение 1

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. б. функции в точке x_0. $\alpha(x)$ называется <u>*бесконечно большой порядка*</u> k ($k > 0$) <u>*относительно*</u> $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c,$$

где c - конечное число, отличное от нуля.

Обозначается: $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} c\,(\beta(x))^k$.

Определение 2

<u>*Главной частью бесконечно большой функции*</u> $f(x)$ <u>*в конечной точке*</u> x_0 называется простейшая б. б. вида $\dfrac{c}{(x - x_0)^k}$

($c \neq 0$), эквивалентная $f(x)$ при $x \to x_0$, где k - _порядок б. б. $f(x)$ относительно б. б._ $\frac{1}{x - x_0}$.

Определение 3

Главной частью бесконечно большой функции $f(x)$ _в бесконечно удаленной точке_ называется простейшая б. б. вида cx^k ($c \neq 0$), эквивалентная $f(x)$ при $x \to \infty$, где k - _порядок б. б._ $f(x)$ _относительно б. б._ x.

Свойства главных частей б. б.

1) Главная часть произведения б. б. функций равна произведению главных частей сомножителей.

2) Главная часть суммы б. б. одного порядка равна сумме главных частей слагаемых, за исключением случая разности эквивалентных б. б.

3) Пусть $\alpha(x) = f(x)\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б. б. в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ ($c \neq 0$, $c \neq \infty$). Тогда

$$\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} c\,\beta(x).$$

4) Если $\alpha(x)$ - б. м. в точке x_0, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - б. б. в точке x_0, а если $f(x)$ - б. б. в точке x_0, то $\frac{1}{f(x)}$ - б. м. в точке x_0.

Решение задачи 8б

а) Вычислим предел $f_1(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x + 100} + 5x}{2x + 1}$ при $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f_1(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + \sqrt{x + 100} + 5x}{2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2} = \infty,$$

так как $x^3 + \sqrt{x+100} + 5x \underset{x\to\infty}{\sim} x^3$ и $2x+1 \underset{x\to\infty}{\sim} 2x$.

Следовательно, $f_1(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to \infty$. Поэтому ее главную часть будем искать в виде cx^k:

$$f_1(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2}.$$

Таким образом, главная часть б. б. функции $f_1(x)$ имеет вид $\frac{1}{2}x^2$. Отсюда следует, что порядок функции $f_1(x)$ относительно x равен двум.

б) Вычислим предел $f_2(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\sqrt{x^6 + \frac{1}{x}}$ при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\sqrt{x^6 + \frac{1}{x}}\right) = [0 \cdot \infty] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} \cdot x^3\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

так как $e^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ и $\sqrt{x^6 + \frac{1}{x}} \underset{x\to\infty}{\sim} x^3$.

Следовательно, $f_2(x)$ является б. б. функцией при $x \to \infty$. Поэтому главную часть также будем искать в виде $c\,x^k$:

$$f_2(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x} \cdot x^3 = x^2.$$

Таким образом, $f_2(x)$ - б. б. второго порядка относительно x при $x \to \infty$.

Отсюда следует, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются б. б. одного и того же порядка ($k = 2$) относительно x, но не являются эквивалентными, поскольку $c_1 \neq c_2$ ($c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = 1$).

Задача 9

Определить характер функций (б. б. или б. м.) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ в точке x_0 и выделить главную часть.

а) $f_1(x) = \ln(x^2 + 4) - \ln x^2$, $x_0 = \infty$,

б) $f_2(x) = \dfrac{x+5}{2^{x^2 - x} - 4}$, $x_0 = 2$,

в) $f_3(x) = \sqrt[4]{1 - x^3} - \cos x$, $x_0 = 0$.

Решение задачи 9

а) Функция $f_1(x)$ является разностью двух б. б. $\ln(x^2 + 4)$ и $\ln(x^2)$. Выделим сначала главную часть $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \ln(x^2 + 4) - \ln x^2 = \ln\left(\frac{x^2 + 4}{x^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{4}{x^2}.$$

Тогда

$$\lim_{x \to \infty} f_1(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Следовательно, функция $f_1(x)$ при $x \to \infty$ является б. м. с главной частью $\dfrac{4}{x^2}$ ($c = 4$, $k = 2$).

б) Функция $f_2(x)$ - бесконечно большая, так как

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{2^{x^2-x}-4}=\infty .$$

Поэтому главную часть будем искать в виде $\dfrac{c}{(x-2)^k}$. Для ее нахождения сначала произведем алгебраические преобразования, чтобы выделить сомножитель вида $x-2$:

$$\frac{x+5}{2^{x^2-x}-4}=\frac{x+5}{4\left(2^{x^2-x-2}-1\right)}=\frac{x+5}{4\left(2^{(x-2)(x+1)}-1\right)}.$$

После этого выделим саму главную часть:

$$\frac{x+5}{4\left(2^{(x-2)(x+1)}-1\right)}\underset{x\to 2}{\sim}\frac{7}{4(x-2)(x+1)\ln 2}\underset{x\to 2}{\sim}\frac{7}{12\ln 2\,(x-2)}$$

($c=\dfrac{7}{12\ln 2}$, $k=1$).

в) Функция $f_3(x)$ - бесконечно малая, так как

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[4]{1-x^3}-\cos x\right)=0 .$$

Главную часть будем искать в виде cx^k. Для того чтобы воспользоваться таблицей эквивалентных б. м., преобразуем выражение к требуемому виду:

$$\sqrt[4]{1-x^3}-\cos x=\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{4}}-1+(1-\cos x)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{2} .$$

Так как сумма б. м. функций разного порядка эквивалентна б. м. меньшего порядка, $-\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^2}{2}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$.

Таким образом,

$$\sqrt[4]{1-x^3}-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

($c=\frac{1}{2}$, $k=2$).

Задача 10

Исследовать функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на непрерывность, установить тип точек разрыва, построить графики функций в окрестности точек разрыва.

а) $f_1(x)=\begin{cases} -x^2-2x, \ x<1 \\ 3x-6, \ 1<x\le 3 \\ \frac{1}{x-3}, \ x>3 \end{cases}$, б) $f_2(x)=2^{\frac{|x-1|}{x^2-3x+2}}$.

Справочный материал

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение 1

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Определение 2

Функция $y=f(x)$ называется *<u>непрерывной слева (справа) в точке</u>* x_0, если она определена в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ (или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$).

Для исследования функции на непрерывность удобнее пользоваться следующим определением.

Определение 3

Функция $y = f(x)$ называется <u>*непрерывной в точке*</u> x_0, если

1. она определена в некоторой окрестности этой точки;
2. существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0),$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0);$$

3. эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Определение 4

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала $(a; b)$, то функция называется <u>*непрерывной на этом интервале*</u>.

Определение 5

Функция $y = f(x)$ называется <u>*непрерывной на замкнутом интервале*</u> $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, и непрерывна справа в точке a и слева в точке b.

Теорема

Все основные элементарные функции непрерывны в области их определения.

Свойства непрерывных функций

1) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой же точке их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0) \neq 0$).

2) Если функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Следствие

Элементарные функции, полученные из основных элементарных функций с помощью рассмотренных выше операций, также непрерывны в области их определения.

Классификация точек разрыва

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются <u>*точками разрыва этой функции*</u>. Если $x = x_0$ - точка разрыва функции $y = f(x)$, то в ней нарушается хотя бы одно из условий непрерывности функции.

Определение 6

Точка разрыва x_0 называется <u>*точкой разрыва первого рода*</u> функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ и } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

При этом:

1) Если они равны между собой, но не равны значению функции в этой точке $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, или значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ не определено, то точка x_0 называется <u>*точкой устранимого разрыва первого рода*</u>.

2) Если $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точка x_0 называется <u>*точкой неустранимого разрыва первого рода*</u>. Величина $\delta = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ называется <u>*скачком функции*</u> $f(x)$ <u>*в точке*</u> x_0.

Определение 7

Точка разрыва x_0 называется *<u>точкой разрыва второго рода</u>* функции $y=f(x)$, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Решение задачи 10

а) Каждая составляющая функции $f_1(x)$ является элементарной и, следовательно, непрерывной функцией. Поэтому разрывы возможны лишь в точках «соединения» этих составляющих.

<u>$x=1$</u>:

Значение $f_1(1)$ не определено.

$$\lim_{x\to 1-0} f_1(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(-x^2-2x\right)=-3,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f_1(x)=\lim_{x\to 1+0}(3x-6)=-3.$$

Следовательно, точка $x=1$ - точка устранимого разрыва первого рода.

<u>$x=3$</u>:

Значение $f_1(3)=3\cdot 3-6=3$.

$$\lim_{x\to 3-0} f_1(x)=\lim_{x\to 3-0}(3x-6)=3,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f_1(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}=+\infty.$$

Следовательно, точка $x=3$ является точкой разрыва второго рода.

График функции $y=f_1(x)$ изображен на рис. 10.

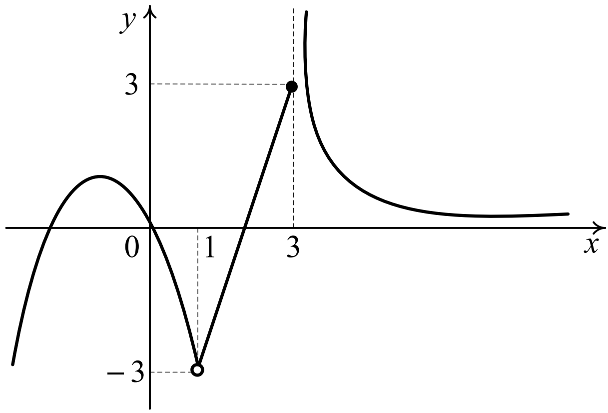

Рис. 10.

Разрыв в точке $x=1$ можно устранить, доопределив $f_1(x)$ следующим образом:

$$\tilde{f}_1(x)=\begin{cases} f_1(x), & если\, x\neq 1 \\ -3, & если\, x=1 \end{cases}.$$

б) Областью определения функции $f_2(x)$ является вся числовая ось за исключением точек $x=1$ и $x=2$, в которых обращается в ноль знаменатель. В этих точках функция разрывна. Вычислим односторонние пределы и установим тип разрывов.

$\underline{x=1}$:

Значение $f_2(1)$ не определено.

$$\lim_{x\to 1-0} f_2(x)=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{|x-1|}{x^2-3x+2}}=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{|x-1|}{(x-1)(x-2)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{-(x-1)}{(x-1)(x-2)}}=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{-1}{(x-2)}}=2,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f_2(x) = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{|x-1|}{x^2-3x+2}} = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{|x-1|}{(x-1)(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{(x-1)}{(x-1)(x-2)}} = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{(x-2)}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, точка $x = 1$ - точка неустранимого разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен $\delta = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

$\underline{x = 2}$:

Значение $f_2(2)$ не определено.

$$\lim_{x\to 2-0} f_2(x) = \lim_{x\to 2-0} 2^{\frac{|x-1|}{x^2-3x+2}} = \lim_{x\to 2-0} 2^{\frac{|x-1|}{(x-1)(x-2)}} = 2^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f_2(x) = \lim_{x\to 2+0} 2^{\frac{|x-1|}{x^2-3x+2}} = \lim_{x\to 2+0} 2^{\frac{|x-1|}{(x-1)(x-2)}} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

Следовательно, точка $x = 2$ является точкой разрыва второго рода.

График функции $y = f_2(x)$ см. на рис. 11.

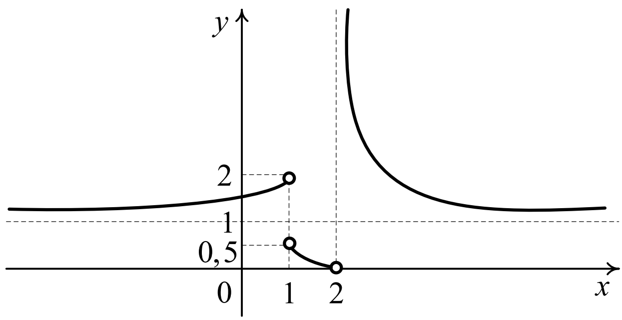

Рис. 11.

Задание к типовому расчету

Задачи 1-2

На языке окрестностей и на языке "$\varepsilon - \delta$" сформулировать определения предела функции в точке и одностороннего предела, соответствующие символическим равенствам.

Задачи 3-7

Вычислить пределы функций (не пользуясь правилом Лопиталя).

Задача 8

Определить порядок функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ относительно x, предварительно установив, являются ли они в точке x_0 бесконечно малыми или бесконечно большими. Сравнить функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Выделить главную часть.

Задача 9

Определить характер функций (б. б. или б. м.) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ в точке x_0 и выделить главную часть.

Задача 10

Исследовать функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на непрерывность, установить тип точек разрыва, построить графики функций в окрестности точек разрыва.

Вариант 1

1. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -3$.

2. $\lim\limits_{x\to 2+0} \log_4(x-2) = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}$.

4. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{2\sin x-1}{\sin 6x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos \pi x}-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

8. а) $f_1(x) = 3\arcsin(2x^2+x^4)$,

   б) $f_2(x) = \operatorname{tg}^2\sqrt{x}(1-\cos 2\sqrt{x})$, $\quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \dfrac{3\cos 4x}{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}$, $\quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = (3x^2+1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5x}$, $\; x_0 = \infty$,

   в) $f_3(x) = \operatorname{tg} 3\pi x$, $\quad x_0 = 2$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} \sin x, \; x < 0, \\ x^3, \; 0 < x \le 2, \\ \dfrac{1}{2-x}, \; x > 2 \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2} + x$.

Вариант 2

1. $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 7x^2 + 6x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}$.

5. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1 - \sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$.

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x^2 + 2x) - \ln(x^2 + 3)}{e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} (2 - \cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

8. а) $f_1(x) = \sin \pi(x+5)$,

   б) $f_2(x) = (e^{3x} - 1)^2$, $\quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}$, $\quad x_0 = 1$,

   б) $f_2(x) = (2x+3)(x + \sqrt[3]{x})$, $\quad x_0 = \infty$,

   в) $f_3(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}$, $\quad x_0 = 0$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} 4 - x^2, x < 0 \\ 4e^x,\ 0 < x \le 4 \\ \dfrac{1}{x-4},\ x > 4 \end{cases}$, б) $f_2(x) = x + 2\dfrac{|x-2|}{x-2}$.

Вариант 3

1. $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^3-3x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$.

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}(3^{\frac{\pi}{x}}-3)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin3x}}$.

8. а) $f_1(x) = \sin(x\sqrt{x}+e^{2x}-1)$,

   б) $f_2(x) = \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}$, $\quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \ln(13-3x^2)$, $x_0 = -2$,

   б) $f_2(x) = (x^2-3x)\operatorname{tg}2x^2$, $x_0 = 0$,

   в) $f_3(x) = x\sqrt{x}(x+\sqrt{x^2+1})$, $x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3}, & x<-3 \\ x+3, & -3\le x\le 0, \\ x^2, & x>0 \end{cases}$ $\qquad$ б) $f_2(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$.

Вариант 4

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. $\lim\limits_{x\to-0} e^{x}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^{2x}})}$.

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\frac{x^2}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-x\right)^{\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}}$.

8. а) $f_1(x)=5x^3+3x^2\operatorname{arctg}x$,

   б) $f_2(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)\sin\pi x}$, $\quad x_0=1$.

9. а) $f_1(x)=\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x$, $\quad x_0=0$,

   б) $f_2(x)=(x^2-3x)\operatorname{tg}2x^2$, $\quad x_0=0$,

   в) $f_3(x)=\ln(x+2)-\ln x$, $\quad x_0=\infty$.

10. а) $f_1(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x<0 \\ -x^3, & 0<x<2, \\ x+3, & x\ge 2 \end{cases}$ $\qquad$ б) $f_2(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$.

Вариант 5

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2. $\lim\limits_{x\to-4+0} \dfrac{1}{x+4}=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}$.

4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\alpha+x)-\sin(\alpha-x)}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\mathrm{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$.

7. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

8. а) $f_1(x)=\ln(1+x^2+x^5)$,

   б) $f_2(x)=3x+x\sqrt{x}$, $\quad x_0=0$

9. а) $f_1(x)=1-\cos^3 x$, $\quad x_0=0$,

   б) $f_2(x)=\dfrac{3x+7}{x^2-x-12}$, $\quad x_0=-3$,

   в) $f_3(x)=\sqrt[4]{x^4+x^2}+x^3$, $\quad x_0=\infty$.

10. а) $f_1(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ x+1, & 0<x\le 2, \\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2 \end{cases}$ $\quad$ б) $f_2(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}$.

Вариант 6

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-1+0} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x+3}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x - \sin 2x}{\ln(1+2\,\mathrm{tg}\,3x)}$.

6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin \pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to2} \left(2e^{x-2}-1\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$.

8. а) $f_1(x) = (3x+1)\,\mathrm{arctg}\,4x^2$,

   б) $f_2(x) = x\sqrt{x^2+1}, \qquad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \sin\sqrt{x}\,(e^{2\sqrt{x}}-1), \qquad x_0 = 0,$

   б) $f_2(x) = \dfrac{x+3}{(x^3-1)^2}, \qquad x_0 = 1,$

   в) $f_3(x) = \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\arcsin\dfrac{2x}{5x^2+3}, \qquad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ |x|, & |x| \le 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$, б) $f_2(x) = \dfrac{1}{5+2^{\frac{1}{x}}}$.

Вариант 7

1. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$.

2. $\lim\limits_{x\to +0} \log_{0,5} x = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-1)-\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x-1}-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

8. а) $f_1(x)=\ln(1+\sqrt{x}\sin x)$,

   б) $f_2(x)=e^{2x}-1, \qquad x_0=0$.

9. а) $f_1(x)=e^{2x}+e^{-x}-2, \quad x_0=0$,

   б) $f_2(x)=\dfrac{x-3}{\sin^2 \pi x}, \quad x_0=2$,

   в) $f_3(x)=(2x^2+3x)\,\mathrm{arctg}\,3x^2, \quad x_0=\infty$.

10. а) $f_1(x)=\begin{cases} 3, & x<-3 \\ |x|, & -3\le x\le 3, \\ 6-x, & x>3 \end{cases}$ б) $f_2(x)=\dfrac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}$.

Вариант 8

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4 - x^3 + x - 1}{2x^2 - x - 1}$.

4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} 3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\ln(x+2) - \ln(2x-1)}{\sin \pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0} \left[1 - \ln\left(1 + x^3\right)\right]^{\frac{3}{x^2 \arcsin x}}$.

8. а) $f_1(x) = x^2 + 3\sqrt{x} + 4x^3$,

   б) $f_2(x) = x^2 - 2x + 3$, $\quad x_0 = \infty$.

9. а) $f_1(x) = \ln(1 + 2\sin\sqrt{x} + \operatorname{tg}^2 x)$, $\quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$, $\quad x_0 = 5$,

   в) $f_3(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}\sin\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$, $\quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x^2}, & 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ 4, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$, $\quad$ б) $f_2(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Вариант 9

1. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 4$.

2. $\lim\limits_{x\to +0} \log_2 x = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x + \frac{5\pi}{2}) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x} - 2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

8. а) $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 3\sqrt{x+1}}$,

   б) $f_2(x) = x^2 + 5x + 1, \quad x_0 = \infty$.

9. а) $f_1(x) = \operatorname{tg} x - 2\sin\sqrt{x}, \quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{2x+3}{\sin 3x}, \quad x_0 = \pi$,

   в) $f_3(x) = \ln(x^2 + x) - \ln(x^2 + 1), \quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ \cos x, & 0 < x \le \pi, \\ \dfrac{1}{x-\pi}, & x > \pi \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{x^2 - x^3}{|x-1|}$.

Вариант 10

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-1)-\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x-1}-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$.

8. а) $f_1(x) = x^2+6x,$

   б) $f_2(x) = \ln(1+2\operatorname{tg} x), \quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \arcsin 3x - \sin 4x, \quad x_0 = 0,$

   б) $f_2(x) = \dfrac{2x-1}{\ln(4+x)}, \quad x_0 = -3,$

   в) $f_3(x) = \dfrac{2x^2-3x^3+4\sqrt{x+5}}{x^2+4x}, \quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 2 \\ x^2-6x+11, & 2 < x < 4, \\ 2x-5, & x > 4 \end{cases}$ б) $f_2(x) = 2^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Вариант 11

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x=1$.

3. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2-2x}{\operatorname{tg}\left[2\pi\left(x+0{,}5\right)\right]}$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

8. а) $f_1(x)=6x^3+\sqrt{x^6+1}$,

   б) $f_2(x)=\sqrt[3]{x^9+1}+x^2$, $x_0=\infty$.

9. а) $f_1(x)=\left(e^{x^2}-1\right)\sin 2x$, $x_0=0$,

   б) $f_2(x)=\dfrac{1}{\ln^2(x^2-8)}$, $x_0=-3$,

   в) $f_3(x)=\dfrac{2}{x^2+x}\operatorname{tg}\dfrac{3}{\sqrt{x}}$, $x_0=\infty$.

10. а) $f_1(x)=\begin{cases}-x, & x\le-1\\ \dfrac{1}{x}, & -1<x<0\\ -2x^2+x, & x\ge0\end{cases}$, б) $f_2(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$.

Вариант 12

1. $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_{\frac{1}{3}} x = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\sin^2 3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\ln(5x^2 - 4x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(5 - \dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

8. а) $f_1(x) = \left(e^{2x} - 1\right)^2$,

   б) $f_2(x) = 1 - \cos^3 x$, $\quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$, $\quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{2x+1}{x^3 + 2x^2 + x)}$, $\quad x_0 = -1$,

   в) $f_3(x) = \operatorname{arctg} 4x \left(e^{\frac{1}{2x}} - 1\right)$, $\quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x < -2 \\ 0, & -2 \le x < 0, \\ \sin x, & 0 < x < \infty \end{cases}$ б) $f_2(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$.

Вариант 13

1. $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$.

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\operatorname{tg} 8\pi x}$.

6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^{x^2 - a^2} - 1}{\operatorname{tg} \ln \frac{x}{a}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^2]{2 - \cos x}$.

8. а) $f_1(x) = \sin \sqrt[3]{x}(1 - \cos\sqrt{x})$,

   б) $f_2(x) = \operatorname{tg}(\pi(x-5))$, $\quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \dfrac{x+6}{2^x - 8}$, $x_0 = 3$,

   б) $f_2(x) = x^{-1}(\ln(x+1) - \ln x)$, $\quad x_0 = \infty$,

   в) $f_3(x) = x^2 + 2x + 3\sin^2 x - 4\operatorname{tg} x$, $\quad x_0 = 0$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ x, & x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ $\qquad$ б) $f_2(x) = \dfrac{e^{4x} - 1}{x}$.

Вариант 14

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

2. $\lim\limits_{x \to 1+0} \log_2(x-1) = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right)$.

5. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{2\sin x - \sqrt{3}}{\cos \frac{3x}{2}}$.

6. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\arcsin \frac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} (2 - e^{x^2})^{\frac{1}{1-\cos \pi x}}$.

8. а) $f_1(x) = 4^{-3x^2} - 1$

   б) $f_2(x) = \sin 5x - 3\sin 2x$, $\quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \dfrac{1}{x \sin 3x}$, $\quad x_0 = \pi$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{(2x+3)^3 (3x-2)^3}{x^4 + 1}$, $\quad x_0 = \infty$,

   в) $f_3(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{4 + x^2} - 2)$, $\quad x_0 = 0$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 1 \\ 2x+2, & 1 < x \le 3, \\ \lg(x-3), & x > 3 \end{cases}$ б) $f_2(x) = 2^{x - \frac{1}{x}}$.

Вариант 15

1. $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

4. $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$.

6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} [1 - \ln(1 + \sqrt[3]{x})]^{\frac{x}{\sin^4 \sqrt[3]{x}}}$.

8. а) $f_1(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 3x)$,

   б) $f_2(x) = 1 - \sqrt{3x + 1}$, $x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \sqrt{1 + x^2 + 3x} - 1$, $x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = 2^{\frac{5x}{\cos^2 x - 1}} - 2^{-5x}$, $x_0 = \pi/2$,

   в) $f_3(x) = x^2 + \sqrt{x} \sin \dfrac{1}{x}$, $x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} 3, & x < -3 \\ |x|, & -3 < x \le 3, \\ \ln(x - 3), & x > 3 \end{cases}$ б) $f_2(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x + 3}$.

Вариант 16

1. $\lim\limits_{x\to 10} f(x) = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^x = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^3+2x^2-4x-8}$.

4. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$.

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_3 \cos 6x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} (3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2 x}$.

8. а) $f_1(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{3x+1}}$,

б) $f_2(x) = \dfrac{1}{3x^2+2x}$, $x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \sqrt[3]{x+2} - 2$, $x_0 = 6$,

б) $f_2(x) = \dfrac{3\cos 2x}{1-4^{-\sin 2x^2}}$, $x_0 = 0$,

в) $f_3(x) = 2x^2 - 3\sqrt{x^8 - 5x^2 + 1}$, $x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi}{x}, & x \ge \pi \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

Вариант 17

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$.

2. $\lim\limits_{x\to-5-0} \dfrac{1}{x+5}=-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{\left(x^4+2x+1\right)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin^2\sqrt{x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

8. а) $f_1(x)=1-\cos 10x^2$,

   б) $f_2(x)=\sqrt{1+x}-1, \quad x_0=0$.

9. а) $f_1(x)=\ln(1+2x\sqrt{x}+3x^2), \quad x_0=0$,

   б) $f_2(x)=\dfrac{1}{2^x-8}, \quad x_0=3$,

   в) $f_3(x)=\operatorname{arctg}3\mathrm{x}\sin\dfrac{1}{x+2x^2}, \quad x_0=\infty$.

10. а) $f_1(x)=\begin{cases} x^3, & -\infty<x<0 \\ x^2+1, & 0\le x<4, \\ \lg(x-4), & x>4 \end{cases}$ б) $f_2(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Вариант 18

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. $\lim\limits_{x\to-3-0} \dfrac{1}{x+3}=-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x+1}{x^2-x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[5]{x}-1}}$.

8. а) $f_1(x)=x\sqrt[3]{5x^3}+\sqrt[4]{x^{12}+1}$,

   б) $f_2(x)=(x^2-1)^2-x^4$, $\quad x_0=\infty$.

9. а) $f_1(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}$, $\quad x_0=1$,

   б) $f_2(x)=x\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $\quad x_0=\infty$,

   в) $f_3(x)=\sin^2\sqrt{x}\cdot(\operatorname{tg}3x-2\operatorname{tg}5x)$, $\quad x_0=0$.

10. а) $f_1(x)=\begin{cases}2, & x<-2\\ |x|, & |x|<2\\ (x-2)^{-1}, & x>2\end{cases}$, б) $f_2(x)=\dfrac{2x}{\sin x}$.

Вариант 19

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin^2 3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1} \left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

8. а) $f_1(x) = \arcsin(3x+5x^3)$,

   б) $f_2(x) = 2^{x^2}-1, \quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = e^{3x}-\cos 6x, \quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}, \quad x_0 = 1$,

   в) $f_3(x) = \left(x^2+4\right)^2\sqrt{16x^4+1}, \quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x < -1 \\ |x|, & -1 \le x \le 1, \\ 1-x^2, & x > 1 \end{cases}$ б) $f_2(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Вариант 20

1. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to -1} x^3 = -1$.

3. $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{8}{16-x^2}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4} - \sqrt{x^2+x}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\left(e^{x+2} - e^{x^2-4}\right)}{\ln(3x+7)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left[1 - x\sin^2 x\right]^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^3)}}$.

8. а) $f_1(x) = x^2 + 6x + 3\sqrt{x}$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{1}{(2x+1)\sin^2\dfrac{1}{x}}$, $\quad x_0 = \infty$.

9. а) $f_1(x) = 2x + 3\arcsin^2 x - 3\operatorname{arctg} 4x$, $\quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x \operatorname{tg} 3\pi x}$, $\quad x_0 = 1$,

   в) $f_3(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3})$, $\quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} |x|, & x \le 2 \\ \lg(x-2), & x > 2 \end{cases}$, б) $f_2(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Вариант 21

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3})$.

5. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{1 - 2\cos x}{\sin(\pi - 3x)}$.

6. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln \frac{2x}{\pi}}$.

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \right)^{4x^2}$.

8. а) $f_1(x) = \left(5^{-x^2} - 1 \right) x$,

   б) $f_2(x) = (1 - \cos 6x) \operatorname{tg} 2x, \quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1, \quad x_0 = 1$,

   б) $f_2(x) = (x^2 + 5x)^2 \operatorname{tg} \dfrac{1}{x+1}, \quad x_0 = \infty$,

   в) $f_3(x) = e^{x^2} + e^{-3x\sqrt{x}} + 2\sin^2 x - 2, \quad x_0 = 0$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} 4^x, & x < 1 \\ 5 - x^2, & 1 < x \le 4, \\ \lg(x - 4), & x > 4 \end{cases}$ б) $f_2(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x+2}$.

Вариант 22

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

2. $\lim\limits_{x \to -5+0} \dfrac{1}{x+5} = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 5x - 6}{3x^3 - 7x^2 + 2x}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos 4x} - 1}{\sin^2 8x}$.

6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2^{\sin \pi x} - 1}{\ln(x^2 - 2x + 1)}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

8. а) $f_1(x) = \left(1 - e^{-6x}\right) \cdot \cos 2x$,

   б) $f_2(x) = \ln\left(1 + 2\sin\sqrt{x} + x\right), \quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = \dfrac{3\cos^2 x}{e^{2x} - \cos x}, \quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 9} - 1, \quad x_0 = 2,$

   в) $f_3(x) = \sqrt{x(x^3 + 2)} + 2x^2, \quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} e^x, x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, 0 < x < 5, \\ 3x + 4, x \ge 5 \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(x-1)}{|x-1|} + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$

Вариант 23

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5$.

2. $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4+2x^3+x^2}{x^4+2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}{\sqrt{\cos x}-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\sin 2x}}$.

8. а) $f_1(x) = (2-x)^4 - (3+x)^4$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{\left(x^3+3x^2\right)}{\sin\frac{1}{x}}$, $\quad x_0 = \infty$.

9. а) $f_1(x) = \sqrt[4]{x^4+x^2} + x^3$, $\quad x_0 = \infty$,

   б) $f_2(x) = \ln(1+2\sin 2x + \operatorname{tg}^2\sqrt{x})$, $\quad x_0 = 0$,

   в) $f_3(x) = (x^3-1)^2 \cdot \sqrt[3]{x-1}$, $\quad x_0 = 1$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} -1, & x \le -\pi/2 \\ \operatorname{tg} x, & -\pi/2 < x < 0, \\ x, & x > 0 \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{\sin 4x}{|x|}$.

Вариант 24

1. $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x = -1$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^3-3x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$.

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos^2 x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3\pi x)^{\frac{1}{x\sin 2\pi x}}$.

8. а) $f_1(x) = \left(x^2-3x+2\right)(x^2-2)$,

   б) $f_2(x) = 3x^3-1+(x-2)^3$, $\quad x_0 = \infty$.

9. а) $f_1(x) = (x^2+2x)(1-\sqrt{\cos x})$, $\quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \operatorname{ctg} 8\pi x$, $\quad x_0 = 2$,

   в) $f_3(x) = \dfrac{3}{x^3} - 2\arcsin\dfrac{1}{x^2}$, $\quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x<0 \\ x+1, & 0<x\le 3 \\ \lg(x-3), & x>3 \end{cases}$, б) $f_2(x) = \dfrac{1}{1+6^{\frac{1}{x}}}$.

Вариант 25

1. $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} 4^{-x} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-2\sin 2x}{x\ln\cos 6x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2}}{\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}})^{\frac{2}{\sin x}}$.

8. а) $f_1(x) = \sin 10x - 4\sin x^2$,

   б) $f_2(x) = e^{6x^2}-1, \quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = (x+2)(e^{x^2-5}-e^{-1}), \quad x_0 = -2$,

   б) $f_2(x) = 1-\sin\dfrac{\pi x}{2}, \quad x_0 = 1$,

   в) $f_3(x) = 2x^2-4\cdot\sqrt[3]{x^{12}-5x^3+1}, \quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} x-x^2, & -\infty < x \le 1 \\ \lg(x-1), & x > 1 \end{cases}$, б) $f_2(x) = x+\dfrac{|x|}{x}$.

Вариант 26

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^3-7x^2+2x}{4x^2-5x-6}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg}(3^{\frac{\pi}{x}}-3)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2+3x}-\sqrt{2x}}{\ln(x+2)-2\ln x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}$.

8. а) $f_1(x)=\frac{1}{3x^2+2x\operatorname{arctg} x}$,

   б) $f_2(x)=x\sin\frac{x+1}{5x^3+3x}$, $\quad x_0=\infty$.

9. а) $f_1(x)=\ln(x^2+4)-\ln(x+10)$, $\quad x_0=3$,

   б) $f_2(x)=e^{-x^2}+\cos x-2$, $\quad x_0=0$,

   в) $f_3(x)=\sqrt[4]{9x^8+1}+3x^2$, $\quad x_0=\infty$.

10. а) $f_1(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x<0 \\ \cos x, & 0<x\le \pi/2, \\ \frac{1}{x-\pi/2}, & x>\pi/2 \end{cases}$ б) $f_2(x)=\dfrac{1}{2+3^{-1/x}}$.

Вариант 27

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -10$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x\ln(1-x\sin x)}$.

6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2-5x+5}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0} (2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}})^{\frac{3}{x}}$.

8. а) $f_1(x) = \sqrt{1+3x^2}-1$,

   б) $f_2(x) = x\operatorname{tg}\left(2\pi(x+\dfrac{1}{2})\right)$, $\quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = 2\sqrt{x}\cdot(1-\cos^3 2x)$, $\quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{x^2+5}{x^3-4x}$, $\quad x_0 = 2$,

   в) $f_3(x) = (2x^3+4x)\operatorname{tg}\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$, $\quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x<-2 \\ |x|, & |x|<2 \\ x, & x>2 \end{cases}$, б) $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$.

Вариант 28

1. $\lim\limits_{x \to 4+0} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x = 0$.

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x - 1}{(x^2 - x - 2)^2}$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

5. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$.

6. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln 2x - \ln \pi}{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{-\sin 2x}}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \left(4 - \dfrac{3}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}}$.

8. а) $f_1(x) = \sin \frac{2}{x + x^2}$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{2x + 1}{3x^2 \sqrt{x} + 5x}$, $\quad x_0 = \infty$.

9. а) $f_1(x) = \operatorname{tg} \pi x \sin 5\pi x$, $\quad x_0 = 1$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{1}{2\sin 3x - x + 5 \operatorname{tg} x^2}$, $\quad x_0 = 0$,

   в) $f_3(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \operatorname{tg} \frac{2}{x^2}$, $\quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 4, \\ \frac{1}{x-4}, & x > 4 \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}$.

Вариант 29

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to 3\pi/2} \cos x = 0$.

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 (e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$.

5. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}$.

6. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{\ln \cos x}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{x \sin \pi x}}$.

8. а) $f_1(x) = x + \sqrt{x}(1 + 5x^2)$,

   б) $f_2(x) = (x^2 - 1)^2$, $\quad x_0 = \infty$.

9. а) $f_1(x) = \sin^2 x \left(\operatorname{tg} 3x - 2 \operatorname{tg} 5x \right)$, $\quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \dfrac{x}{\ln x^2 - \ln 4}$, $\quad x_0 = 2$,

   в) $f_3(x) = 2x^2 \operatorname{arctg} x + 3x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $\quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \le 3 \\ 8x - x^2 - 15, & 3 < x \le 5, \\ 2x - 12, & x > 5 \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Вариант 30

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2} - 2}{x + x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x^2 + \sin^3 x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg} \ln(3x - 5)}{e^{x+3} - e^{x^2+1}}$.

7. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\operatorname{tg} \dfrac{x}{2})^{\frac{1}{x-\pi/2}}$.

8. а) $f_1(x) = 1 - \sqrt{1 + 3x^2}$,

   б) $f_2(x) = x \operatorname{tg} 3x, \quad x_0 = 0$.

9. а) $f_1(x) = 2^x - 2^{-x} + 3x, \quad x_0 = 0$,

   б) $f_2(x) = \operatorname{ctg}^2 \pi x, \quad x_0 = 1$,

   в) $f_3(x) = \sqrt[3]{x^2} \operatorname{tg} \dfrac{1}{x^5 + 2x^2}, \quad x_0 = \infty$.

10. а) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 3x + 1, & 0 \le x < 2, \\ 4 - x^2, & x \ge 2 \end{cases}$ б) $f_2(x) = \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$.