Лабораторная работа № 8

Тема: «Краевая задача (граничная задача)»

Цель - сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать краевую задачу для дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ на **отрезке** $[a, b]$ **при заданных краевых условиях** $y(x_0) = y_0$ и $y(x_k) = y_1$. **методом стрельбы, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.**

В краевой задаче требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения с дополнительными условиями, заданными при нескольких различных значениях независимой переменной.

Примером краевой задачи является двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (13)$$

с граничными условиями, заданными на концах отрезка $[x_0, x_k]$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y(x_k) &= y_1. \end{aligned} \qquad (14)$$

Следует найти такое решение $y(x)$ на этом отрезке, которое принимает на концах отрезка значения y_0, y_1. Если функция $f(x, y, y')$ линейна по аргументам y, y', то задача (13), (14) - линейная краевая задача, в противном случае – нелинейная.

Кроме граничных условий (14) называемых граничными условиями первого рода, используются еще условия на производные от решения на концах – граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= y_0 \\ y'(x_k) &= y_1 \end{aligned} \qquad (15)$$

или линейная комбинация решений и производных - граничные условия третьего рода:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \cdot y(x_0) + \beta_0 \cdot y'(x_0) = \gamma_0 \\ &\alpha_1 \cdot y(x_k) + \beta_1 \cdot y'(x_k) = \gamma_1. \end{aligned}, \qquad (16)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ - такие числа, что $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$.

Можно на разных концах отрезка использовать условия различных типов.

Метод стрельбы

Суть метода заключена в многократном решении задачи Коши для приближенного нахождения решения краевой задачи.

Пусть надо решить краевую задачу (13), (14) на отрезке $[x_0, x_k]$. Вместо исходной задачи формулируется задача Коши с уравнением (13) и с начальными условиями

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_k) = \theta \end{aligned}, \qquad (17)$$

где θ - некоторое значение тангенса угла наклона касательной к решению в точке $x = x_0$.

Положим сначала некоторое начальное значении параметру $\theta = \theta_0$, после чего решим каким либо методом задачу Коши (13), (17). Пусть $y = y_0(x, y_0, \theta_0)$ решение этой задачи на интервале $[x_0, x_k]$, тогда сравнивая значение функции $y_0(x_k, y_0, \theta_0)$ со значением y_1 в правом конце отрезка можно получить информацию для корректировки угла наклона касательной к решению в левом конце отрезка. Решая задачу для нового значения $\theta = \theta_1$, получим другое решение со значением $y_1(x_k, y_0, \theta_1)$ на правом конце. Таким образом, значение решения на правом конце $y(x_k, y_0, \theta)$ будет являться функцией одной переменной θ. Задачу можно сформулировать таким образом: требуется найти такое значение переменной θ^*, чтобы решение $y(x_k, y_0, \theta^*)$ в правом конце отрезка совпало со значением y_1 из (14). Другими словами решение исходной задачи эквивалентно нахождению корня уравнения

$$\Phi(\theta) = 0, \qquad (18)$$

где $\Phi(\theta) = y(x_k, y_0, \theta) - y_1$.

Уравнение (18) является «алгоритмическим» уравнением, так как левая часть его задается с помощью алгоритма численного решения соответствующей задачи Коши. Но методы решения уравнения (18) аналогичны методам решения нелинейных уравнений. Следует заметить, так как невозможно вычислить производную функции $\Phi(\theta)$, то вместо метода Ньютона следует использовать метод секущих, в котором производная от функции заменена ее разностным аналогом. Данный разностный аналог легко вычисляется по двум приближениям, например θ_j и θ_{j+1}. Следующее значение искомого корня определяется по соотношению

$$\theta_{j+2} = \theta_{j+1} - \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Phi\left(\theta_{j+1}\right) - \Phi\left(\theta_j\right)} \Phi\left(\theta_{j+1}\right). \qquad (19)$$

Итерации по формуле (19) выполняются до удовлетворения заданной точности.

Итак, если дана краевая задача, например, в вышеприведенной формулировке, то в методе стрельбы она заменяется задачей Коши для того же уравнения (14) но с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = k = tg\theta. \qquad (20)$$

Здесь $y(x_0)$ – точка, которая является началом кривой решения $y(x)$ дифференциального уравнения, θ – угол наклона касательной к этой кривой в начальной точке.

Считая решение задачи Коши зависящим от начального условия $\left. {dy}/{dx} \right|_{x=x_0} = tg\theta$, будем подбирать такое значение θ, при котором кривая решения $y(x)$ в точке x даст совпадающий с (13) результат $y(x_k) = B$. Если это условие будет выполнено, то решение задачи Коши совпадет с решением краевой задачи.

Применительно к описанному подходу называние "метод стрельбы" вполне оправдано, поскольку в нем производится как бы "пристрелка" по углу наклона кривой $y(x)$ в начальной точке.

Чтобы сократить количество попыток при поиске решения $y(x)$, применяют различные стратегии подбора параметра θ. Например, при использовании метода половинного деления действуют следующим образом. Вначале выполняют два пробных расчета при значениях параметра θ равных θ_1 и θ_2. Эти значения выбирают таким образом, чтобы при $\theta = \theta_1$ решение давало в точке $x = x_k$ "перелет", то есть $y(x_k) > y_1$, а при $\theta = \theta_2$ – "недолет", то есть $y(x_k) < y_1$.

Далее, используя в начальном условии (20) значение $\theta_3 = (\theta_1 + \theta_2)/2$, вновь численно решают задачу Коши. Из трех полученных решений отбрасывают то, которое дает в точке $x = x_k$ наибольшее отклонение от y_1. Затем от двух оставшихся значений параметра θ находят среднее θ_4 и вновь выполняют с этим значением расчет.

Повторение описанного процесса прекращают, когда разность двух последовательно найденных значений θ станет меньше некоторого заданного малого числа или достаточно малым будет отклонение $y(x_k)$ от y_1. Подобный алгоритм может быть построен и с использованием метода Ньютона.

Пример 5. Методом стрельбы на отрезке $[0,1]$ с точностью $eps = 0{,}0001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = e^x + \sin(y), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 15-18.

x0 и xk - начальное и конечное значение отрезка интегрирования
a - значение y в точке x0
bk - значениеу в точке xk
b1 и b2 - два пристрелочных значений
n - число точек интегрирования
eps - погрешность вычислений
f(x,y) · −вектор_определяющий_правую_часть_уравнения

$x0 := 0 \quad xk := 1 \quad eps := 0.0001 \quad n := 10 \quad f(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ e^x + \sin(y_0) \end{pmatrix}$

$a := 1 \quad bk := 2 \quad b1 := 1 \quad b2 := 0.8$

Рис. 15. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (задание исходных данных)

$$
RK(x0,xk,n,a,b1) := \left|
\begin{array}{l}
x_0 \leftarrow x0 \\
a \leftarrow a \\
b1 \leftarrow b1 \\
y_0 \leftarrow \begin{pmatrix} a \\ b1 \end{pmatrix} \\
h \leftarrow \dfrac{xk - x0}{n} \\
\text{for } i \in 0..n-1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\
k1_i \leftarrow h \cdot f(x_i, y_i) \\
k2_i \leftarrow h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k1_i}{2}\right) \\
k3_i \leftarrow h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k2_i}{2}\right) \\
k4_i \leftarrow h \cdot f(x_i + h, y_i + k3_i) \\
y_{i+1} \leftarrow y_i + \dfrac{1}{6} \cdot (k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i)
\end{array}
\right. \\
Y^{\langle 0 \rangle} \leftarrow x \\
Y^{\langle 1 \rangle} \leftarrow y \\
Y
\end{array}
\right.
$$

Рис. 16. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (функция, возвращающая решение исходного уравнения методом Рунге-Кутта)

$$
Firing(x0,xk,n,b1,b2) := \left|
\begin{array}{l}
\theta \leftarrow \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} \\
F \leftarrow \begin{bmatrix} \left(RK(x0,xk,n,a,b1)_{n,1}\right)_0 \\ \left(RK(x0,xk,n,a,b2)_{n,1}\right)_0 \end{bmatrix} \\
\text{for } m \in 0..10 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\theta_{m+2} \leftarrow \theta_{m+1} - \dfrac{\theta_{m+1} - \theta_m}{F_{m+1} - F_m} \cdot (F_{m+1} - bk) \\
\text{break if } |F_{m+1} - bk| < eps \\
\text{otherwise} \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
F_{m+2} \leftarrow \left(RK(x0,xk,n,a,\theta_{m+2})_{n,1}\right)_0 \\
\text{for } j \in 0..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x_j \leftarrow RK(x0,xk,n,a,\theta_{m+2})_{j,0} \\
y_j \leftarrow \left(RK(x0,xk,n,a,\theta_{m+2})_{j,1}\right)_0
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
Y1^{\langle 0 \rangle} \leftarrow x \\
Y1^{\langle 1 \rangle} \leftarrow y \\
Y1
\end{array}
\right.
$$

Рис. 17. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (функция, возвращающая решение краевой задачи)

$j := 0..n \qquad x_j := \mathrm{Firing}(x0, xk, n, b1, b2)_{j,0} \qquad y_j := \mathrm{Firing}(x0, xk, n, b1, b2)_{j,1}$

$x_j =$	$y_j =$
0	1
0.1	0.993
0.2	1.006
0.3	1.039
0.4	1.095
0.5	1.174
0.6	1.279
0.7	1.412
0.8	1.575
0.9	1.77
1	2

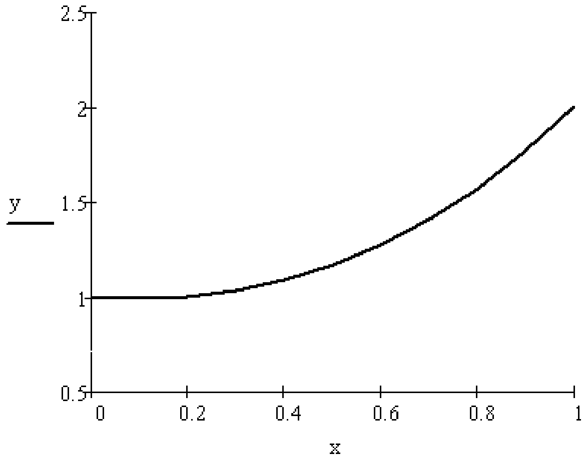

Рис. 18. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (числовое и графическое решение краевой задачи)

Задание 6. .Методом стрельбы на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0{,}001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. Построить график решения.

Варианты заданий представлены ниже.

Вариант 1.

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(y(x)) \cdot y'(x) + \ln(x+1) \cdot y(x) = x^3 \cdot \cos(y(x)),$$
$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3.$$

Вариант 2.

$$y''(x) + x^{2 \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)} \cdot y'(x) + \sin(y(x)) \cdot y(x) = \lg\left(\frac{x-1}{x+3}\right),$$
$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = -1, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 10.$$

Вариант 3.

$$y''(x) + \sqrt{x^4 + 2 \cdot x + 1} \cdot y(x) = \sin^2(2 \cdot y(x)),$$
$$y(x_0) = -1, \quad y(x_k) = -3, \quad y''(x_0) = 3 \quad x_0 = 1, \quad x_k = 5.$$

Вариант 4.

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(y(x)) \cdot y'(x) + \ln(x+1) \cdot y(x) = x^3 \cdot \cos(y(x)),$$
$$y(x_0) = 2{,}5, \quad y(x_k) = 1{,}5, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 2.$$

Вариант 5.

$$y''(x)+\frac{6\cdot x}{\sin(x)}\cdot y'(x)+tg(x)\cdot y(x)=x\cdot\cos(y(x)),$$

$$y(x_0)=4,\quad y(x_k)=2,\quad x_0=-1{,}5,\quad x_k=1{,}5.$$

Вариант 6.

$$y''(x)+Arsh(x)\cdot y'(x)+3\cdot x^2\cdot y(x)=\cos\left(\frac{x}{5}\right)+\sin(5\cdot y(x)),$$

$$y(x_0)=0,\quad y(x_k)=1,\quad x_0=-3,\quad x_k=4.$$

Вариант 7.

$$y''(x)+e^x\cdot\cos(y(x))\cdot y'(x)+\left[\lg(x+6)+\sin(y(x))\right]\cdot y(x)=$$

$$=x^2+\cos(y(x)),$$

$$y(x_0)=0,\quad y(x_k)=0{,}5,\quad x_0=0,\quad x_k=3.$$

Вариант 8.

$$y''(x)+ch(x)\cdot y'(x)+\left[\ln\left(\left|\sin(x+2\right|\right)+\sin(y(x))\right]\cdot y(x)=$$

$$=x^2\cos(y(x)),$$

$$y(x_0)=1,\quad y(x_k)=1,\quad x_0=-4,\quad x_k=0.$$

Вариант 9.

$$y''(x)+\left[\frac{2}{x}+y(x)\right]\cdot y'(x)+\sin(x)\cdot y^2(x)=\sqrt{x^2+4}+y(x),$$

$$y(x_0)=4,\quad y(x_k)=2,\quad x_0=4,\quad x_k=6.$$

Вариант 10.

$$y''(x)+x^4\cdot y'(x)+2\cdot x^3\cdot\sin(y(x)+1)\cdot y(x)=e^{x\cdot\cos(y(x))},$$

$$y(x_0)=2,\quad y(x_k)=3,\quad x_0=1,\quad x_k=3.$$

Вариант 11.

$$y''(x)+\left[6\cdot x^3+\cos(y(x))\right]\cdot y'(x)+cth\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot y(x)=$$

$$=\ln\left(x\ \ -2\right)+\sin(y(x)),$$

$$y(x_0)=3,\quad y(x_k)=4,\quad x_0=15,\quad x_k=2{,}5.$$

Вариант 12.

$$y''(x)+\cos\left(y(x)+\frac{4}{x+1}\right)y'(x)+e^{\cos(y(x))}\cdot y(x)=\frac{x^2}{x+1}+\sin^2\left(y(x)\right),$$

$$y(x_0)=8,\quad y(x_k)=0,\quad x_0=0,\quad x_k=8.$$

Вариант 13.

$$y''(x)+x\cdot\cos(x+y(x))\cdot y'(x)+e^{\sin(4\cdot x+y(x))}\cdot y(x)=$$
$$=\sqrt{x^3+2\cdot x^2+1}+\sin^2(y(x)),$$
$$y(x_0)=2,\quad y(x_k)=2,\quad x_0=1,\quad x_k=3.$$

Вариант 14.

$$y''(x)+\left[4\cdot x+\cos^3(y(x))\right]\cdot y'(x)+\left[1+\sqrt{\left|\sin(x+y(x))+3\right|}\right]\cdot y(x)=$$
$$=\frac{1}{x+5}\cdot\sin(y(x)),$$
$$y(x_0)=0,\quad y(x_k)=0,\quad x_0=-2,\quad x_k=2.$$

Вариант 15.

$$y''(x)+\ln(x+2)\cdot y'(x)+x^2\cdot\cos(y(x)+2)\cdot y(x)=$$
$$=\sqrt[3]{x^2+2}+\sin^3(y(x)),$$
$$y(x_0)=3,\quad y(x_k)=2,\quad x_0=8,\quad x_k=10.$$

Вариант 16.

$$y''(x)+\left[3\cdot x+\sin(y(x))\right]\cdot y'(x)+x^3\cdot\lg(3\cdot x)\cdot y(x)=$$
$$=3\cdot e^{3\cdot x}+\cos(3\cdot y(x)),$$
$$y(x_0)=1,\quad y(x_k)=6,\quad x_0=0{,}5,\quad x_k=3{,}5.$$

Вариант 17.

$$y''(x)+\frac{x+1}{y(x)+3}\cdot y'(x)+\left[tg(x)+\cos(y(x))\right]\cdot y(x)=$$
$$=e^x+\cos^3\left[y(x))+1\right],$$
$$y(x_0)=3,\quad y(x_k)=3,\quad x_0=-1{,}5,\quad x_k=1{,}5.$$

Вариант 18.

$$y''(x)+y'(x)+\left[\cos(y(x)+\cos(x))\right]\cdot y(x)=x^2\cdot e^x+\sin(2\cdot y(x)),$$
$$y(x_0)=-20,\quad y(x_k)=200,\quad x_0=1,\quad x_k=4.$$

Вариант 19.

$$y''(x)+\sqrt{x^2+4\cdot x+7}\,\sin\left[4\cdot y(x)\right]\cdot y'(x)+\left[e^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\cos\left[y(x)\right]\right]\cdot y(x)=$$
$$=\frac{x^2+1}{y(x)-3},$$
$$y(x_0)=0,\quad y(x_k)=0,\quad x_0=4,\quad x_k=8.$$

Вариант 20.

$$y''(x)+\frac{\lg(x)}{y(x)+1}\cdot y'(x)+x^3\cdot\cos\left[y(x)\right]\cdot y(x)=x^{\sin\left[x+y(x)\right]},$$
$$y(x_0)=0,\quad y(x_k)=0,\quad x_0=1,\quad x_k=5.$$