

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

*Методические указания к курсовым работам
для студентов направлений подготовки бакалавриата
080100*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2013

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Кафедра информатики и компьютерных технологий

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

*Методические указания к лабораторным работам
для студентов направления подготовки бакалавриата
080100*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2013

УДК 519.86:622.3.012 (075.83)

Методы оптимальных решений. Методические указания для выполнения курсовых работ для студентов направления подготовки бакалавриата 080100/НМСУ «Горный». Сост. *В.В. Беляев, А.В. Чиргин*. СПб, 2013., 43с.

Методические указания содержат необходимые теоретические сведения по решению задач нелинейного программирования численными методами. Приведен пример решения задачи по определению оптимальных параметров стимулирующего контракта.

Предназначены для студентов направления подготовки бакалавриата 080100 «Экономика» дневной формы обучения, изучающих дисциплину «Методы оптимальных решений»

Табл. 2. Рис.23. Библиогр.: 4 назв.

Научный редактор доц. Прудинский Г.А.

© Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2013 г.

ВВЕДЕНИЕ

Целью курсовой работы является углубление знаний в математическом программировании и применение их для решения задач из предметной области, связанной с экономическими исследованиями, на примере модели агентских отношений. Выполнение расчетов способствует развитию и закреплению навыков работы с табличным процессором MS Excel. В каждом задании формулируются условия задачи, исходные данные, форма выдачи результатов, указываются основные математические методы, используемые для решения задачи. Контрольный расчет с использованием надстройки «Поиск решений» позволяет убедиться в правильности решения задач.

Основными этапами курсовой работы являются:

- 1) формализация поставленной задачи;
- 2) выбор, обоснование и изложение метода решения поставленной задачи;
- 3) решение задачи;
- 4) оформление пояснительной записки и защита отчета.

В процессе выполнения работы студент должен научиться самостоятельно работать с литературой, список которой должен быть обязательно включен в пояснительную записку.

Изучая литературу по теме курсовой работы, студент может встретить несколько подходов к решению обозначенных проблем. В этом случае необходимо обосновать наиболее приемлемое, верное, с точки зрения автора работы решение стоящей перед ним задачи.

Сроки прохождения каждого этапа контролируются руководителем. Последовательное выполнение курсовой работы способствует формированию навыков проведения научного исследования.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ АГЕНТСКИХ ОТНОШЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные понятия и методы теории контрактов рассматриваются подробно в различных учебных курсах¹. Отдельные понятия теории контрактов описаны в приложении. Один из разделов теории контрактов - теория агентства.

Одной из задач этой теории является поиск и анализ оптимальных стимулирующих схем вознаграждения.

Контракт (лат. contractus, от лат. contrahere – соединять вместе) – взаимное соглашение двух или нескольких лиц, по которому одно из них или несколько выполнить некоторую работу. Будем считать, что это письменное соглашение о найме на работу в котором оговорены права и обязанности для его участников. Как правило, в обязанности работника входит выполнение некоторой работы, а в обязанности работодателя – создание условий для её выполнения и выплата оговоренного вознаграждения.

В теории контрактов одну из сторон называют *агентом*, а другую – *принципалом*. Главные отличия сторон проявляются в отношении как к своим обязательствам, так и к риску, а также в уровне информированности:

- Принципал выполняет взятые на себя обязательства по выплате вознаграждения агенту.
- Агент может относиться к своим обязательствам оппортунистически (см. приложение).
- Принципал более склонен к риску, чем агент. Это проявляется в различном виде функций полезности (см. курсы микро и макроэкономики, а также приложение 2), которые определяют целесообразность поведения сторон
- Существует асимметрия в информированности. Агент обладает некоторой (важной для выполнения контракта) информацией, а принципал – нет.

¹ Например, в институциональной экономике - учебной дисциплине, являющейся составной частью профессиональной подготовки студентов экономических специальностей.

Простейшая модель

В рамках рассматриваемой модели работник будет агентом, а работодатель – принципалом. Объем выполняемой работы будем считать фиксированным и не вызывающим разногласий между сторонами, а качество определяется *уровнем усилий*, которые может приложить агент для её выполнения.

Агент может выполнять свои договорные обязательства с разным уровнем усилий, например, работать интенсивно или отлынивать. Важно то, что он сам выбирает уровень усилий, а принципал не может объективно проверить (верифицировать) какой уровень усилий прикладывался.

Контракты, формируемые в рамках рассматриваемой модели, должны быть направлены на обеспечение добровольных неverified действий, которые приносили бы выгоду обеим сторонам.

Обозначим через e уровень усилий агента. Конечный результат для принципала в значительной степени определяется значением производственной функции $Y(e, q)$ ², где Y – объем производства.

В терминах производственной функции e является фактором производства. Входящая в модель переменная q – случайный параметр, отражающий случайный (стохастический) характер модели, определяющая неконтролируемые факторы рынка. В качестве примера, рассмотрим производственную функцию для ситуации, когда принципалом является владелец ресторана, а агентом официант. Очевидно, что доход ресторана зависит от многих факторов, в том числе от усилий официанта. Можно ожидать, что чем больше усилий прикладывает официант, тем больше денег оставит посетитель. Этот факт можно математически

² **Производственная функция.**— экономико-математическая количественная зависимость между величинами выпуска (количество продукции) и факторами производства (ресурсы: труд, капитал и др., уровень технологий и др.)

отразить соотношением

$$\frac{\partial Y(e, q)}{\partial e} > 0 \quad (1)$$

Введение случайной величины q в производственную функцию объясняется тем, что величина заказа в нашем примере зависит не только от усилий официанта, но и от усилий других лиц (прежде всего поваров, сомелье, хостесов и т.д.) и от состояния клиентов (их настроения, аппетита и др.). Поэтому, доход, который принесет данный клиент, есть величина случайная, но на её распределение оказывает влияние усилия (работа) официанта (в том числе). В общем случае можно утверждать, что (числовое) значение производственной функции зависит от состояния рынка.

Рассмотрим ситуацию, когда имеются нейтральный к риску принципал и избегающий риска агент. Это различие отражается в конкретном виде их функций полезности (см. приложение)

Пусть функция полезности агента $U_A(w, e)$ имеет следующий вид:

$$U_A(w, e) = \sqrt{w} - (e - 1) \quad (2)$$

где w — ставка заработной платы, e — уровень усилий агента.

Вычислим частные производные этой функции.

$$\frac{\partial U_A(w, e)}{\partial w} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{w}} > 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 U_A(w, e)}{\partial^2 w} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{w}^3} < 0 \quad (4)$$

Функция полезности агента вогнута, что является формальным признаком его рискофобии, т.е. у него есть склонность избегать риска

Допустим, что уровень усилий может принимать два значения, 1 и 2, которые далее будут обозначаться как «низкий» и «высокий» уровни усилий.

Существенным понятием в рамках этой модели является понятие *минимально приемлемой полезности для работника* U_{\min} . Полагаем, что у работника есть выбор альтернативного места труда,

где он может получать доход, обеспечивающий ему полезность, равную U_{\min} . Это позволяет рассчитать альтернативную стоимость работы, таким образом, чтобы её полезность была равна U_{\min} . Для определенности предположим, что $U_{\min} = 1$. Это означает, что при любом реальном контракте средняя полезность для агента должна быть выше этого уровня U_{\min} , в противном случае он ищет работу в другом месте. Это предположение позволяет рассчитать минимальные уровни заработной платы, при условии, что агент прилагает «низкий» или «высокий» уровень усилий, а принципал знает об этом.

Если агент прилагает «низкий» уровень усилий, то

$$U_A(w, e)_{e=1} = \sqrt{w} - (1 - 1) = \sqrt{w} = U_{\min} = 1 \Rightarrow w = 1 \quad (5)$$

Т.е. для того чтобы работник прилагал даже низкий уровень усилий, ему необходима заработная плата не ниже чем U_{\min} (единица), иначе он может уйти работать в другое место.

Если агент прилагает «высокий» уровень усилий, то

$$U_A(w, e)_{e=2} = \sqrt{w} - (2 - 1) = \sqrt{w} - 1 = U_{\min} = 1 \Rightarrow w = 4 \quad (6)$$

Т.е. для того чтобы работник прилагал высокий уровень усилий, ему необходима заработная плата не ниже чем четыре единицы (см.рис.1).

Полученную ситуацию можем проиллюстрировать следующим примером. Пусть агентом является преподаватель матметодов, принципалом – университет. Если преподаватель ведет занятия на русском языке, то он прилагает усилия на низком уровне и получает зарплату равную $w = 1$. Если преподаватель ведет занятия на английском языке, то он прилагает усилия на высоком уровне и получает зарплату равную $w = 4$. Очевидно, что во втором случае его уровень усилий существенно выше, как при подготовке занятий, так и при их проведении. Однако агент, несмотря на то, что уровень зарплаты в 4 раза выше во втором случае, он оценивает полезность (для себя) этих двух ситуаций одинаково.

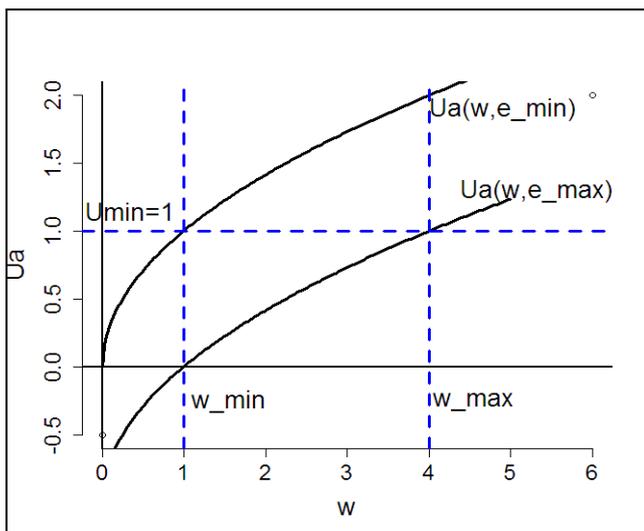


Рис. 1. Функция полезности при разном уровне усилий агента.

Будем полагать, что доход принципала зависит от уровня усилий агента и внешних обстоятельств как это показано на рис.2 и 3. Будем полагать, что состояние рынка для простоты имеет два уровня и характеризуется как «удачный» или «неудачный» период для бизнеса.

Усилия работника		e=1	
Период		неудачный	удачный
Доход фирмы	R	10	30
Вероятность	P	2/3	1/3

Рис. 2. Случайная величина, определяющая доход принципала в зависимости от состояния рынка при низком уровне усилий агента.

Усилия работника		e=2	
Период		неудачный	удачный
Доход фирмы	R	10	30
Вероятность	P	1/3	2/3

Рис. 3. Случайная величина, определяющая доход принципала в зависимости от состояния рынка при высоком уровне усилий агента.

Сравнивая рис.2 и 3, можно увидеть, что вероятность более высокого дохода возрастает при увеличении усилий агента.

Будем полагать, что ситуация многократно повторяется, т.е. сначала заключается контракт на какой-то длительный срок (год и т.п.), а внутри этого длительного срока рассматриваем множество отдельных периодов времени (день, неделя и т.д.), по итогам каждого происходит подведение промежуточных итогов. Т.е. проходит один период времени, в течение которого агент выполняет свои функции, прилагая тот или иной уровень усилий, далее по окончании этого периода подводят итоги, выяснив, чему равен доход фирмы и (заодно) удачным или неудачным был прошедший период. Если период был удачным, то R равно 30, а если период был неудачным, то R равно 10. Важно то, что при высоком уровне усилий удачный период реализуется существенно чаще, чем при низком уровне усилий. Очевидно, что благополучие фирмы определяет не отдельный период, а общий результат многократного повторения производственного процесса. Затем подводим итог деятельности фирмы, сосчитав *средний доход* за период за весь длительный срок действия контракта. При этих данных можно рассчитать ожидаемый доход принципала при многократном повторении описанного выше производственного цикла. Очевидно, что это величина будет равна математическому ожиданию соответствующей случайной величины.

Обозначим средний доход принципала при низком и при высоком уровнях усилий агента через $M(R_{e=1})$ и $M(R_{e=2})$ соответственно. Вычислим эти значения, пользуясь известными формулами:

$$\begin{aligned}
 M(R_{e=1}) &= \sum_i p_i \cdot R_i = p_1 \cdot R_1 + p_2 \cdot R_2 = \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 30 = \\
 &= \frac{50}{3} \approx 16.666
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 M(R_{e=2}) &= \sum_i p_i \cdot R_i = p_1 \cdot R_1 + p_2 \cdot R_2 = \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 30 = \\
 &= \frac{70}{3} \approx 23.333
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Разница в доходах принципала при двух уровнях усилий агента очевидна, средний доход принципала при высоком уровне усилий агента будет выше, чем при низком.

Для лучшего понимания экономических последствий морального риска, сравним два случая, в одном из которых усилия агента наблюдаемы, т. е. проблема морального риска не возникает, а в другом усилия агента не поддаются наблюдению и у него появляется возможность проявить оппортунистическое поведение, т. е. встает проблема морального риска.

Будем полагать, что *функцией полезности* U_p для *принципала* является величина *прибыли* или чистого дохода, т.е. величина дохода минус величина вознаграждения агента w .

$$U_p[e|e=z] = M(R-w)_{e=z} \quad (9)$$

где z - уровень усилий агента.

СИММЕТРИЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ УСИЛИЯХ

Рассмотрим ситуацию, в которой принципал может четко отслеживать (анализировать) величину усилий агента, иначе говоря, усилия агента наблюдаемы принципалом. Поскольку свои усилия агент знает сам, то существует симметричная информация об усилиях.

Определим, какой уровень усилий агента в этом случае обеспечивает принципалу наибольшую полезность.

Значение функции полезности U_p для принципала – прибыль фирмы (т.е. величина чистого дохода равная величине дохода минус величина вознаграждения агента w) при низком уровне усилий агента будет равно

$$\begin{aligned} U_p[e|e=1] &= M(R-w)_{e=1} = M(R_{e=1}) - w_{e=1} = \sum_i p_i \cdot R_i - w_{e=1} = \\ &= p_1 \cdot R_1 + p_2 \cdot R_2 - 1 = \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 30 - 1 = \frac{50}{3} - 1 = \frac{47}{3} \approx 15.667 \quad (10) \end{aligned}$$

Значение функции полезности U_p для принципала при высоком уровне усилий агента будет равно

$$\begin{aligned}
 U_p[e|e=2] &= M(R-w)_{e=2} = M(R_{e=1}) - w_{e=2} = \\
 &= \sum_i p_i \cdot R_i - w_{e=2} = p_1 \cdot R_1 + p_2 \cdot R_2 - 4 = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 30 - 4 = \frac{58}{3} \approx 19.333
 \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку $\frac{47}{3} < \frac{58}{3}$ то, ожидаемая полезность принципала в

случае высокого уровня усилий агента больше, поэтому он будет стимулировать агента выбирать высокий уровень усилий. Это достигается с помощью контракта, в котором уровень усилий устанавливается равным 2 ($e=2$), а агент в обмен за эти усилия получает вознаграждение $w=4$, обеспечивающее ему полезность равную единице $U_A = U_{\min} = 1$, (т.е. величине альтернативной полезности равной единице). Назовем данный контракт *базовым*. Фактически, данный контракт предполагает наем агента только при условии определенного, а именно высокого уровня усилий, что возможно только в случае симметричной информации об усилиях.

Заметим, что если заключен контракт, в котором уровень усилий низкий (устанавливается равным 1), а агент в обмен за эти усилия получает вознаграждение $w=1$, обеспечивающее ему ту же самую полезность U_A равную единице, т.е. агент не заинтересован в высоком уровне усилий.

Несовпадение интересов принципала и агента проявляется в том, что первый заинтересован в высоком уровне усилий агента, поскольку это положительно влияет на его ожидаемый результат (для принципала в условиях базового контракта при его выполнении ожидаемый уровень полезности равен $U_p[e|e=2] = \frac{58}{3} \approx 19.333$). В

это же время для агента уровень усилий безразличен, не смотря на зарплату, т. к. усилия отрицательно влияют на его полезность.

АСИММЕТРИЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ УСИЛИЯХ

Рассмотрим ситуацию, в которой принципал не может четко отслеживать (анализировать) величину усилий агента, другими словами, усилия агента являются ненаблюдаемыми для принципала, а свои усилия агент знает сам. Т.о. существует асимметричная информация об усилиях. Проанализируем базовый контракт в новой ситуации. Значение функции полезности агента имеет следующий вид при низком уровне усилий $e = 1$ и величине вознаграждения $w = 4$.

$$U_A(w, e) \Big|_{e=1}^{w=4} = \sqrt{w} - (e - 1) \Big|_{e=1}^{w=4} = \sqrt{4} - (1 - 1) = \sqrt{4} = 2 \quad (12)$$

Т.е. полезность для агента при высокой оплате и низком уровне усилий агента выше, чем при базовом. В этом случае агент проявляет *оппортунистичность* своего поведения. Несовпадение интересов принципала и агента проявляется в том, что первый заинтересован в высоком уровне усилий агента, поскольку это положительно влияет на его ожидаемый результат, тогда как последний заинтересован в низком уровне усилий, т.к. усилия отрицательно влияют на его полезность.

Таким образом, задача заключается в нахождении таких условий контракта, которые бы максимизировали полезность принципала, одновременно стимулируя агента выбирать нужный уровень усилий.

Чтобы добиться повышенного уровня усилий работника, необходимо изменить базовый контракт таким образом, чтобы в случае большей величины дохода фирмы зарплата работника также возрастала бы. Говоря другими словами, контракт должен быть стимулирующим, т.е. если фирме необходимо, чтобы агент постоянно работал с высоким уровнем усилий ($e = 2$), то контракт должен быть таким, чтобы ожидаемая полезность агента в этом случае была выше, чем при низком уровне усилий ($e = 1$). В этой ситуации доход работника перестает быть постоянным, а становится рискованным (подвергается случайным воздействиям, зависящим не только от усилий агента). В этом случае агент может рассчитывать на увеличение дохода в качестве премии за риск.

Обозначим через x величину заработной платы, которую

получает агент при неудачном периоде для фирмы (когда у фирмы низкий уровень дохода $R = 10$). Обозначим через y величину заработной платы, которую получает агент при удачном периоде для фирмы (когда у фирмы высокий уровень дохода $R = 30$). Вычислим ожидаемую полезность $U_A(w, e)_{e=2}$ для агента в этом случае при высоком уровне усилий ($e = 2$), (при вычислении используются соответствующие вероятности, т.е. приведенные на рис.3.)

$$\begin{aligned}
 U_A(w, e)_{e=2} &= M(\sqrt{w} - (e-1))_{e=2} = \\
 &= p_1 \cdot (\sqrt{x} - (e-1))_{e=2} + p_2 \cdot (\sqrt{y} - (e-1))_{e=2} = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{x} - (2-1)) + \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{y} - (2-1)) = \quad (13) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{x} - 1) + \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{y} - 1)
 \end{aligned}$$

Ожидаемая полезность $U_A(w, e)_{e=1}$ для агента в случае низкого уровня усилий ($e = 1$), может быть вычислена аналогично (при вычислении используются соответствующие вероятности, т.е. приведенные на рис.2.)

$$\begin{aligned}
 U_A(w, e)_{e=1} &= M(\sqrt{w} - (e-1))_{e=1} = \\
 &= p_1 \cdot (\sqrt{x} - (e-1))_{e=1} + p_2 \cdot (\sqrt{y} - (e-1))_{e=1} = \quad (14) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{x} - (1-1)) + \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{y} - (1-1)) = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{x}) + \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{y})
 \end{aligned}$$

Легко заметить, что стимулирующая оплата работника будет действенной, если полезность в случае высокого уровня усилий определяемая соотношением (13) будет не меньше полезности в случае низкого уровня усилий, определяемой соотношением (14):

$$U_A(w, e)_{e=2} \geq U_A(w, e)_{e=1} \quad (15)$$

Выражение типа (15) называется ограничением совместимости по

стимулам, которое представляет собой условие, ориентирующее агента на использование высокого уровня усилий. Важным является то, что полезность, получаемая агентом при выборе усилий, желательных для принципала, будет не меньше полезности получаемой агентом при любых других усилиях. Т.о. агенту не выгодно проявлять оппортунистичность.

Выражение (15), с учетом (13) и (14) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{3} \cdot (\sqrt{x} - 1) + \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{y} - 1) \geq \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{x}) + \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{y}) \quad (16)$$

Упростив это выражение, получаем

$$\sqrt{y} \geq \sqrt{x} + 3 \quad (17)$$

При любом контракте должно выполняться ограничение на участие (дающее возможность агенту получить альтернативную работу),

$$U_A(w, e)_{e=2} \geq U_{\min} \quad (18)$$

Соотношение (18) с учетом (13) и того что $U_{\min} = 1$

$$\begin{aligned} U_A(w, e)_{e=2} &= \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{x} - 1) + \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{y} - 1) \geq 1 \end{aligned} \quad (19)$$

Преобразуя (19) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \sqrt{x} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{y} &\geq 2 \\ \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{y} &\geq 6 \end{aligned} \quad (20)$$

Значение функции полезности U_p для принципала при высоком уровне усилий агента в условиях, когда зарплата агента не постоянна, будет вычисляться с помощью соотношения

$$\begin{aligned}
 U_{p|e=2} &= M(R - w) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (10 - x) + \frac{2}{3} \cdot (30 - y) = \frac{70}{3} - \frac{1}{3}(x + 2 \cdot y). \quad (21)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что для принципала ситуация будет оптимальной, когда U_p достигает своего максимума, т.е. ему желательно найти такие x и y , чтобы U_p было наибольшим. Таким образом, решение сводится к решению задачи условной оптимизации со следующей целевой функцией

$$\frac{70}{3} - \frac{1}{3}(x + 2 \cdot y) \rightarrow \max \quad (22)$$

Ограничения определяются условиями (17) (ограничением совместимости по стимулам) и (20) (ограничением на участие), к которым следует добавить естественное ограничение – неотрицательность фазовых переменных x и y .

$$\begin{aligned}
 x &\geq 0 \\
 y &\geq 0 \quad (23)
 \end{aligned}$$

Решение нелинейной задачи определяемой соотношениями (22), (17), (20), (23) может быть упрощено путем введения новых переменных p и q , где $p = \sqrt{x}$ и $q = \sqrt{y}$.

Целевая функция (22) примет вид (24),

$$\frac{70}{3} - \frac{1}{3}(p^2 + 2 \cdot q^2) \rightarrow \max \quad (24)$$

Ограничение (17) преобразуется к виду

$$q \geq p + 3 \quad (25)$$

Ограничение (20) преобразуется к виду

$$q \geq -\frac{1}{2} \cdot p + 3 \quad (26)$$

Ограничение (23) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 p &\geq 0 \\
 q &\geq 0 \quad (27)
 \end{aligned}$$

Целевая функция, определяемая соотношением (24) является квадратичной, а ограничения (25), (26) и (27) - линейны, поэтому (есть основания предполагать, что) данная задача нелинейной оптимизации является задачей квадратичного программирования. Решение этой задачи может быть получено графически.

Очевидно, что линиями уровня целевой функции (24) в пространстве координат p и q будут «концентрические» эллипсы, приведенные на рис.4. Соответствующие значения уровней подписаны, очевидно, что меньшим эллипсам соответствуют более высокие значения.

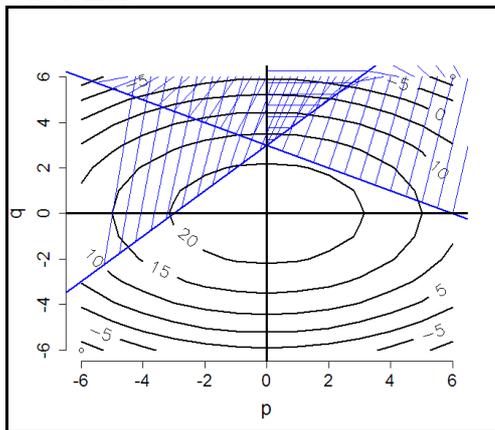


Рис.4. Графическое решение задачи нелинейной оптимизации в координатах p и q . Область допустимых решений заштрихована тройной штриховкой.

Ограничения (25), (26) и (27) определяют область, заштрихованную тройной штриховкой. Этот неограниченный треугольник определяет область допустимых решений. Очевидно, что наибольшее значение функция достигает в точке с координатами $p=0$ и $q=3$ (рис.4). Чтобы доказать это необходимо решить систему двух уравнений:

$$\begin{cases} q = p + 3 \\ q = -\frac{1}{2} \cdot p + 3 \end{cases}$$

Каждое из уравнений представляет собой соотношение, определяющее границу области допустимых значений. Решением системы является пара чисел $p = 0$ и $q = 3$, которая определяет координаты точки, в которой достигается оптимальное решение.

Через эту точку проходит эллипс, который является линией уровня соответствующей значению $\frac{52}{3}$, поскольку справедливо следующее соотношение.

$$\frac{70}{3} - \frac{1}{3}(p^2 + 2 \cdot q^2) \Big|_{\substack{p=0 \\ q=3}} = \frac{70}{3} - \frac{1}{3}(0^2 + 2 \cdot 3^2) = \frac{70}{3} - 6 = \frac{52}{3} \approx \quad (28)$$

≈ 17.3333

На рис.5. линия уровня соответствующая значению $\frac{52}{3}$, что приблизительно равно 17,3333, подписана. Точки плоскости p и q , которые лежат внутри этого эллипса, не удовлетворяют ограничениям, а лежащие вне эллипса имеют меньшее значение целевой функции. Строгое обоснование найденного решения приведено в приложении 2.

Поскольку $p = \sqrt{x}$ и $q = \sqrt{y}$, то x равно 0, а $y = 9$.

Вычислим значение функции полезности $U_p \Big|_{\substack{e=2 \\ x=0 \\ y=9}}$ для принцепала при

высоком уровне усилий агента ($e = 2$), при вычисленных уровнях зарплаты агента ($x = 0$ и $y = 9$) с помощью соотношения (21)

$$U_p \Big|_{\substack{e=2 \\ x=0 \\ y=9}} = M(R - w) = \frac{1}{3} \cdot (10 - x) + \frac{2}{3} \cdot (30 - y) = \quad (29)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (10 - 0) + \frac{2}{3} \cdot (30 - 9) = \frac{52}{3} \approx 17.3333$$

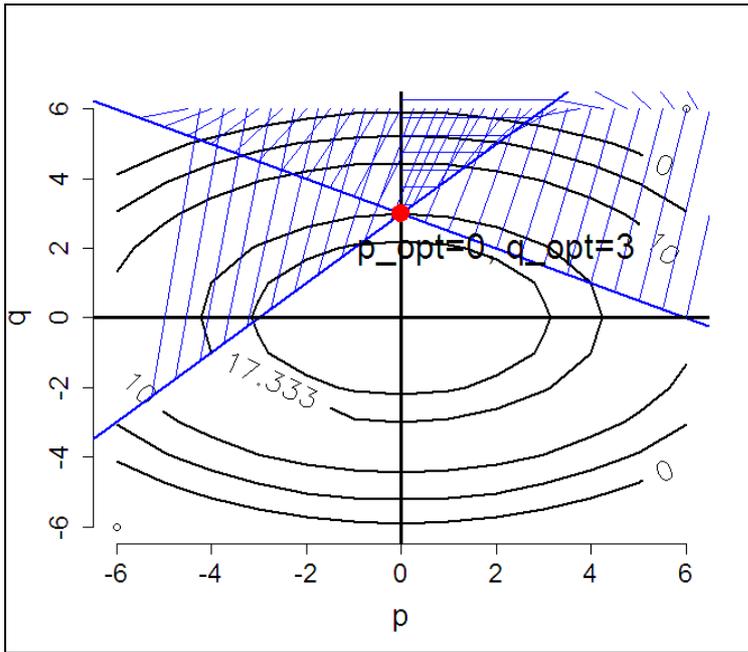


Рис.5. Графическое решение задачи нелинейной оптимизации в координатах p и q . Точка оптимального решения выделена.

Другим разумным вариантом контракта для принципала в случае не наблюдаемости усилий агента является назначение ему минимальной заработной платы равной единице ($w=1$). В этом случае полезность принципала может быть вычислена с помощью соотношения (10) и будет равна $\frac{47}{3} \approx 15.6666$.

Поскольку $\frac{47}{3} < \frac{52}{3}$, то принципалу выгодней заключать стимулирующий контракт, при уровнях зарплаты агента ($x=0$ и $y=9$). Заметим, что в случае не стимулирующего контракта и высокого уровня усилий агента $e=2$, (что в случае не наблюдаемости маловероятно) значение функции полезности для принципала $U_p[e=2]$ может быть вычислено по формуле (11) и

оно равно $\frac{58}{3} \approx 19.3333$. Поскольку $\frac{52}{3} < \frac{58}{3}$ мы приходим к выводу, что принципал делится своей прибылью с агентом, заключая стимулирующий контракт.

Вычислим ожидаемую полезность $U_A(w, e) \Big|_{\substack{e=2 \\ x=0 \\ y=9}}$ для агента

при высоком уровне усилий ($e = 2$), при вычисленных уровнях его зарплаты ($x = 0$ и $y = 9$) с помощью соотношения (13)

$$\begin{aligned}
 U_A(w, e) \Big|_{\substack{e=2 \\ x=0 \\ y=9}} &= M(\sqrt{w} - (e - 1))_{e=2} = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{x} - 1) + \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{y} - 1) = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{0} - 1) + \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{9} - 1) = 1 \quad (30)
 \end{aligned}$$

Решим задачу нелинейного программирования с помощью надстройки «Поиск решения» (рис. 6-10). Для этого в ячейки D5: E5, где будут находиться значения искомым величин x и y , введем произвольные значения, например, все нули (рис. 6). В ячейке F14 содержится значение целевой функции, которое равно значению функции полезности U_p для принципала при высоком уровне усилий агента, т.е. ожидаемая прибыль фирмы. В ячейке F3 содержится альтернативное значение полезности U_{\min} для агента.

Для удобства вычислений запишем функцию в VBA (Visual Basic for Application) MyUtil для вычисления полезности агента. При использовании этой функции на листе MS Excel эта функция будет отображаться в разделе «Определенные пользователем». Заметим, что эта функция вычисляет только значение выражения $\sqrt{w} - (e - 1)$, при произвольных значениях аргументов w и e , но не вычисляет среднюю (ожидаемую) полезность для агента, которая наиболее интересна при решении задачи.

В ячейке F12 вычислим ожидаемую полезность $U_A(w, e)$ для

агента при высоком уровне усилий .

	A	B	C	D	E	F
1	Определение параметров стимулирующего контракта					
2						
3	Альтернативная полезность для работника U					1
4	Период			Неудачный	Удачный	Ожидаемая (Мат.ожд.)
5	Зарботная плата работника	w=		0	9.0000	6.0000
6						
7	Усилия работника-высокий уровень	e=		2		
8						
9	Вероятность	P		0.33333333	0.66666667	
10	Доход фирмы	R		10	30	23.33333333
11						
12	Полезность для работника U	U _A =		-1	2.0000	1.0000
13						
14	Прибыль фирмы	U _P =		10	21.0000	17.3333

Рис. 6. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения данных (начало) для решения примера 1

В ячейке F22 вычислим ожидаемую полезность $U_A(w, e)$ для агента при низком уровне усилий.

	A	B	C	D	E	F
17	Усилия работника-низкий уровень		e=	1		
18						
19	Вероятность		P	0.66666667	0.33333333	
20	Доход фирмы		R	10	30	16.66666667
21						
22	Полезность для работника U		U _A =	0	3.0000	1.0000
23						
24	Прибыль фирмы		U _P =	10	21.0000	13.6667

Рис. 7. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения данных (окончание) для решения примера 1.

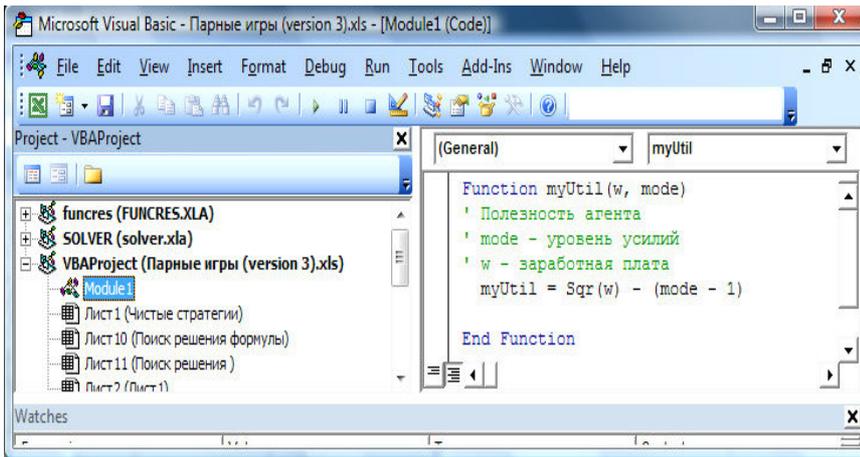


Рис. 8. Фрагмент электронных таблиц MS Excel. Функция, определенная пользователем, MyUtil для вычисления полезности агента.

	A	C	D	E	F
3	Альтерн				1
4	Период		Неудачный	Удачный	Ожидаемая (Мат.ожд.)
5	Зарплата	w=	0	0	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$E\$9;D5:E5)
6					
7	Усилия	e=	2		
8					
9	Вероятн	P	=1/3	=2/3	
10	Доход ф	R	10	30	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$E\$9;D10:E10)
11					
12	Полезно	UA=	=myUtil(D5,\$D\$7)	=myUtil(E5,\$D\$7)	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$E\$9;D12:E12)
13					
14	Прибыль	UP=	=D10-D5	=E10-E5	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$E\$9;D14:E14)

Рис. 9. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения формул (начало) для решения примера 1.

	A	C	D	E	F
17	Усилия	e=	1		
18					
19	Вероят	P	=2/3	=1/3	
20	Доход	R	10	30	=СУММПРОИЗВ(\$D\$19:\$E\$19;D20:E20)
21					
22	Полез	UA=	=myUtil(D5,\$D\$17)	=myUtil(E5,\$D\$17)	=СУММПРОИЗВ(\$D\$19:\$E\$19;D22:E22)
23					
24	Прибы	UP=	=D20-D5	=E20-E5	=СУММПРОИЗВ(\$D\$19:\$E\$19;D24:E24)

Рис. 10. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения формул (окончание) для решения примера 1.

Для проведения оптимизации используем надстройку «Сервис» ⇒ «Поиск решений». В диалоговом окне заполняем поля, как показано на рис. 11.

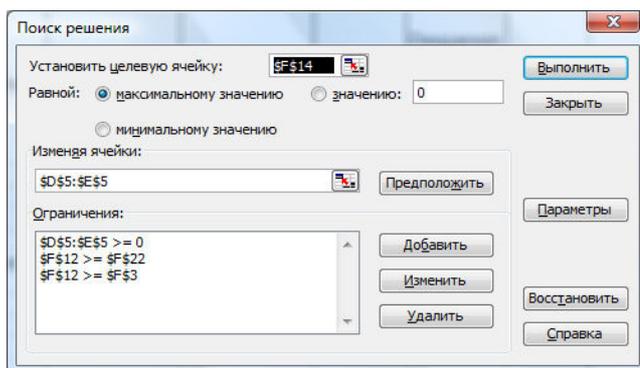


Рис. 11. Диалоговое окно надстройки «Поиск решения» при поиске оптимальных значений стимулирующих выплат

Ограничение $\$F\$12 \geq \$F\22 отражает необходимость выполнения ограничения *совместимости по стимулам* (15), а ограничение $\$F\$12 \geq \$F\3 отражает необходимость выполнения ограничения *на участие* (18). Выполнение естественного ограничения (23) (неотрицательность фазовых переменных x и y) обеспечивает выражение $\$D\$5:\$E\$5 \geq 0$. После выполнения оптимизации в ячейках D5:E5 будут находиться приближенные значения искомым величин x и y ($x = 0$ и $y = 9$). (рис. 6). В ячейке F14 содержится ожидаемая прибыль фирмы, которая равна значению функции полезности U_p для принципала при высоком уровне усилий агента и оптимальных значениях стимулирующего контракта. Она равна 17,3333. Найденные значения величин x и y ($x = 0$ и $y = 9$) и ожидаемой прибыли совпадает с решением найденным графически.

Имитационное моделирование

Проведем *имитацию исполнения контракта при оптимальных значениях стимулирующих выплат.*

Поскольку результаты деятельности фирмы в модели получены при допущении, что доход есть случайная величина, распределение которой зависит от усилий агента, необходимо имитировать её многократную реализацию. Каждая реализация соответствует малому периоду времени, по истечению которого происходит подведение итогов, с определением заработной платы агента и определением прибыли фирмы.

Исходные данные

Выбор величины дохода R будем осуществлять с помощью генератора случайных чисел, который генерирует значение случайной величины, имеющей следующее распределение:

x_i	10	30
p_i	1/3	2/3

Чтобы обеспечить реализацию этой случайной величины в MS Excel используем функцию СЛЧИС(), которая вычисляет значения равномерно распределенной случайной величины в интервале [0;1]. Пусть число t является значением функции СЛЧИС(), тогда величина R , вычисленная по правилу

$$R = \begin{cases} 10, & \text{если } t \leq \frac{1}{3} \\ 30, & \text{если } t > \frac{1}{3} \end{cases},$$

будет иметь искомое распределение.

Решение приведено на рис. 12-17. На рис. 12 приведены расчеты по аналитическим формулам.

	M	N	O	P	Q	R
4	Имитационная модель контракта					
5	при оптимальных значениях стимулирующих выплат					
6						Ожидаемая (Мат.ожд.)
7	Усилия работника		e=	2		
8	Период			неудачный	удачный	
9	Вероятность		P	0.33333333	0.666667	
10	Доход фирмы		R	10	30	23.33333333
11						
12	Зарботная плата работника		w	0	9	6
13						
14	Полезность для работника U		UA	-1	2	1
15						
16	Прибыль фирмы		UP	10	21	17.33333333

Рис. 12. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения данных. Вычисление заработной платы и полезности агента и прибыли фирмы при оптимальных значениях стимулирующих выплат.

	A	C	D	E	F
3	Альтерн				1
4	Период		Неудачный	Удачный	Ожидаемая (Мат.ожд.)
5	Заработн	w=	0	0	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$E\$9;D5:E5)
6					
7	Усилия работни	e=	2		
8					
9	Вероятн	P	=1/3	=2/3	
10	Доход ф	R	10	30	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$E\$9;D10:E10)
11					
12	Полезно	UA=	=myUtil(D5;\$D\$7)	=myUtil(E5;\$D\$7)	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$E\$9;D12:E12)
13					
14	Прибыль	UP=	=D10-D5	=E10-E5	=СУММПРОИЗВ(\$D\$9:\$E\$9;D14:E14)

Рис. 13. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения формул. Вычисление заработной платы и полезности агента и прибыли фирмы при оптимальных значениях стимулирующих выплат.

Сам процесс имитации реализован в строках ниже 34 (см. рис.14-15). Подведение итогов имитации приведено в строках 19-33. Такое расположение итогов (выше самой имитации) позволяет при необходимости увеличить количество имитируемых периодов, вставив необходимое количество строк или дописав их в конец, без сильного изменения итогов.

При имитации каждому периоду времени соответствует одна строчка таблицы. Всего промоделировано 500 временных периодов. В интервалах N34:N534 и O34:O534 содержатся реализации

искомых случайных величин t (равномерно распределенная случайная величина) и R (доход фирмы) соответственно. В столбцах P , Q и R содержатся вычисленные значения заработной платы работника, прибыль фирмы и полезности агента.

	M	N	O	P	Q	R
33	Имитация					
34	№ периода	СЛЧИС()	Доход фирмы	Заработная плата работника	Прибыль фирмы	Полезность для работника
35	1	0.777906616	30	9	21	2
36	2	0.080215775	10	0	10	-1
37	3	0.194731208	10	0	10	-1
38	4	0.052120724	10	0	10	-1

Рис. 14. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения данных. Имитационное моделирование, многократного повторения производственного периода (продолжение).

M	N	O	P	Q	R
№				Прибыль	Полезность для
пе				фирмы	работника
ри	СЛЧИС()	Доход фирмы	Заработная плата работника		
34					
35	1	=СЛЧИС() =ЕСЛИ(N35<\$P\$9;\$P\$10;\$Q\$10)	=ЕСЛИ(O35=\$P\$10;\$P\$12;\$Q\$12)	=O35-P35	=myUtil(P35;\$P\$7)
36	2	=СЛЧИС() =ЕСЛИ(N36<\$P\$9;\$P\$10;\$Q\$10)	=ЕСЛИ(O36=\$P\$10;\$P\$12;\$Q\$12)	=O36-P36	=myUtil(P36;\$P\$7)

Рис. 15. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения формул. Имитационное моделирование многократного повторения производственного периода (продолжение).

Подведение итогов моделирования и сравнение с расчетными результатами приведено на рис.16-17. Анализ показал, что количество неудачных и удачных периодов при 500 повторениях производственного цикла равно 162 и 338 соответственно, а доли в общем количестве повторений равны 0,324 и 0,676 соответственно. Доли незначительно отличаются от теоретических (вероятностей), отклонения равны 2.80% и 1.4% соответственно. Это показывает, что при таком количестве повторений реализация случайной величины – дохода фирмы проведена корректно.

Средние значения дохода фирмы, заработной платы работника, прибыли фирмы и полезности работника по результатам имитации находятся в интервале ячеек O27:R27 соответственно. Сравнение этих средних значений с вычисленными значениями по

основным формулам проведено в интервале ячеек O30:R30. Очевидно, что они несущественно отличаются, так отклонения лежат в диапазоне от 0,80% для величины дохода фирмы до 2,80% для полезности работника. Наличие отклонений обусловлено случайностью величины дохода фирмы. Более точные значения можно, как правило, получить, увеличив количество имитаций.

	M	N	O	P	Q	R
19	Аналитика после имитации					
20	Период	Доход фирмы	Кол-во периодов	Доля	Доля теоретич. (вероятность)	Отклонение в %
21	не удачных	10	162	0.324	0.333333	2.80%
22	удачных	30	338	0.676	0.666667	1.40%
23	Всего		500	1	1	
24						
25			Средние полученные значения			
26			Доход фирмы	Зарплата работника	Прибыль фирмы	Полезность для работника
27	По результатам имитации		23.520	6.084	17.436	1.028
28			Вычисленные значения			
29	По основным формулам		23.333	6.000	17.333	1.000
30		Отклонение в %	0.80%	1.40%	0.59%	2.80%

Рис.16. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения данных. Подведение итогов имитационного моделирования и сравнение с расчетными результатами (окончание).

	M	N	O	P	Q	R
19	Аналитика					
20	Период	Доход	Кол-во периодов	Доля	Доля теоретич. (вероятность)	Отклонение в %
21	не удачных	10	=СЧЁТЕСЛИ(\$O\$35:\$O\$534;\$B\$21)	=O21/\$C\$23	=P9	=ABS(Q21-P21)/Q21
22	удачных	30	=СЧЁТЕСЛИ(\$O\$35:\$O\$534;\$B\$22)	=O22/\$C\$23	=Q9	=ABS(Q22-P22)/Q22
23	Всего		=СУММ(O21:O22)	=СУММ(P21:P22)	=СУММ(Q21:Q22)	

Рис. 17а. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения формул. Подведение итогов имитационного моделирования и сравнение с расчетными результатами (окончание).

	O	P	Q	R
26	Доход фирмы	Зарботная плата работни	Прибыль фирмы	Полезность для работника
27	=CPЗНАЧ(\$O\$35:\$O\$534)	=CPЗНАЧ(\$P\$35:\$P\$534)	=CPЗНАЧ(\$Q\$35:\$Q\$534)	=CPЗНАЧ(\$R\$35:\$R\$534)
28	Вычисленные значения			
29	=R10	=R12	=R16	=R14
30	=ABS(O29-O27)/O29	=ABS(P29-P27)/P29	=ABS(Q29-Q27)/Q29	=ABS(R29-R27)/R29

Рис. 17б. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения формул. Подведение итогов имитационного моделирования и сравнение с расчетными результатами (окончание).

Проведем *имитацию исполнения контракта при отсутствии стимулирующих выплат.*

Результаты расчетов приведены на рис. 18-19.

	A	B	C	D	E	F
4	Имитационная модель контракта					
5	при отсутствии стимулирующих выплат					
6						
7	Усилия работника	e=		1		
8	Период			неудачный	удачный	
9	Вероятность	P		0.666667	0.33333333	
10	Доход фирмы	R		10	30	16.66667
11						
12	Зарботная плата работни	w		1	1	1
13						
14	Полезность для работни	UA		1	1	1
15						
16	Прибыль фирмы	UP		9	29	15.66667

Рис. 18. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения данных. Вычисление заработной платы и полезности агента и прибыли фирмы при отсутствии стимулирующих выплат (начало).

Процесс имитации аналогичен случаю, рассмотренному выше за исключением того, что выплаты работнику не являются случайной величиной, а являются константой равной $w = 1$. В условиях не симметричности информации работник ожидаемо работает с низким уровнем усилий $e = 1$.

	A	B	C	D	E	F
19	Аналитика после имитации					
20	Период	Доход фирмы	Кол-во периодов	Доля	Доля теоретич. (вероятность)	Отклонение в %
21	не удачных	10	333	0.666	0.66666667	0.10%
22	удачных	30	167	0.334	0.33333333	0.20%
23	Всего		500	1	1	
24						
25			Средние полученные значения			
26			Доход фирмы	Зарплата работника	Прибыль фирмы	Полезность для работника
27	По результатам имитации		16.680	1.000	15.680	1.000
28			Вычисленные значения			
29	По основным формулам		16.667	1.000	15.667	1.000
30		Отклонение в %	0.08%	0.00%	0.09%	0.00%

Рис. 19. Фрагмент электронных таблиц MS Excel в режиме отображения данных. Подведение итогов имитационного моделирования исполнения контракта при отсутствии стимулирующих выплат и сравнение с расчетными результатами (окончание)

Анализ показал, что количество неудачных и удачных периодов при 500 повторениях производственного цикла равно 337 и 167 соответственно, а доли в общем количестве повторений равны 0,666 и 0,334 соответственно. Доли незначительно отличаются от теоретических (вероятностей), отклонения равны 0.10% и 0.2% соответственно. Это показывает что при таком количестве повторений реализация случайной величины – дохода фирмы проведена корректно.

Средние значения дохода фирмы, заработной платы работника, прибыли фирмы и полезности работника по результатам имитации находятся в интервале ячеек C27:F27 соответственно.

Сравнение этих средних значений с вычисленными значениями по основным формулам проведено в интервале ячеек C30:F30. Очевидно, что заработная плата и полезность работника

являются постоянными величинами и полностью совпадают с расчетными значениями. Величины дохода и прибыли фирмы отличаются на 0,08% и 0,09% соответственно, что можно расценить как несущественное отклонение. Наличие отклонений обусловлено случайностью величины дохода фирмы. Более точные значения можно, как правило, получить, увеличив количество имитаций.

Выводы.

- Сравнивая прибыль фирмы равную 15.667, в случае отсутствия стимулирующих выплат, с прибылью фирмы, в случае наличия стимулирующих выплат равной 17.667, приходим к выводу, что фирме в случае несимметричности информации, выгоднее заключать стимулирующий контракт.
- В самой выгодной для фирмы ситуации, когда работник прилагает усилия высокого уровня, а получает постоянную низкую зарплату, прибыль фирмы была бы равна 19.333. Уменьшение прибыли (в случае стимулирующего контракта) произошло потому, что, выплачивая работнику более высокую заработную плату, фирма делится прибылью с работником, а работник получает дополнительную плату за риск. Риск состоит в том, что его зарплата зависит не только от его усилий, но и других факторов.

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

В качестве задания предлагается одна из двух задач. Первая элементарная, представляющая собой незначительную модификацию задачи, разобранной выше. Вторая задача предполагает некоторую самостоятельную работу. Выбор решаемой задачи существенно влияет на конечную оценку за курсовую работу.

Во всех задачах требуется

- Рассчитать минимальные уровни заработной платы работника (w_{\min} и w_{\max}), обеспечивающие ему полезность U_{\min} , при условии, что агент прилагает «низкий» или «высокий» уровень усилий, а принципал знает об этом.
- Найти ожидаемые значения заработной платы и полезности работника, дохода и прибыли фирмы в условиях симметричности информации. Провести имитационное

моделирование таких контрактов. Сравнить полученные результаты.

- Определить *оптимальные значения стимулирующих выплат* в условиях несимметричности информации. Решение провести двумя способами:
 - 1) графически;
 - 2) с помощью надстройки «Поиск решения».Сравнить полученные результаты.
- Провести имитационное моделирование контракта при *оптимальных значениях стимулирующих выплат*.
- Провести имитационное моделирование контракта при *отсутствии стимулирующих выплат*.
- Сравнить полученные результаты. Сделать вывод о целесообразности заключения контракта того или иного вида.

Указание 1. При графическом решении координаты точки, в которой достигается решение, должны быть не считаны с рисунка, а уточнены (определены аналитически) путем решения соответствующей системы уравнений.

Указание 2. Доказать, что в найденной точке выполняются условия Куна-Таккера. Проиллюстрировать доказательство, нанеся на график соответствующие градиенты функций ограничений и целевой функции.

Задача 1.

Определить наилучший контракт с точки зрения фирмы в следующих условиях. Все буквенные обозначения, введенные ранее, остаются в силе.

Альтернативная стоимость работы, определяемая рыночной ставкой заработной платы, такова, что её полезность равна U_{\min} равна u .

Функция полезности для работника имеет следующий вид:

$$U_A(w, e) = \sqrt{w} - (e - 1) \quad (31)$$

Целевой функцией для фирмы является величина чистого дохода, т.е. величина дохода минус величина вознаграждения

работника w .

Уровень усилий работника может принимать два значения, 1 и 2. Значения параметров a , b , c , d и u задаются преподавателем в зависимости от варианта.

Усилия работника		e= 1	
Период		неудачный	удачный
Доход фирмы	R	20-d	40+d
Вероятность	P	2/3+a	1/3-a

Рис. 19. Возможный доход фирмы в зависимости от состояния рынка (удачности или неудачности периода) при низком уровне усилий работника

Усилия работника		e= 2	
Период		неудачный	удачный
Доход фирмы	R	20-b	40+b
Вероятность	P	1/3-c	2/3+c

Рис. 20. Возможный доход фирмы в зависимости от состояния рынка (удачности или неудачности периода) при высоком уровне усилий работника.

Задача 2.

Определить наилучший контракт между фирмой и исполнителем с точки зрения фирмы в следующих условиях. Руководитель фирмы – *принципал* (поручитель, патрон) P , а исполнитель – *агент* A . Агент может выполнять свои договорные обязательства с разным уровнем усилий S , например, работать *интенсивно* (S_{max}) или *отлынивать* (S_{min}). Зарплата агента W составляет *минимальную ставку* W_{min} или *повышенную* (премиальную) *ставку* W_{max} . Функция полезности для агента U_A , определяющая его заинтересованность в данной работе, определяется по номеру формулы N_ϕ для каждого варианта. Номера и вид формул функций полезности приведены на рис.21.

1. $U_A(w,s) = 3 - \frac{s}{c} - a \cdot e^{-\frac{w}{b}}$	2. $U_A(w,s) = a \cdot \arctg\left(\frac{w}{b}\right) - s + c$
3. $U_A(w,s) = (b \cdot \sqrt[3]{w^2} - \frac{s}{c} + 1) \cdot a$	4. $U_A(w,s) = a \cdot \ln\left(\frac{w}{b} + 1\right) - s + c$

Рис. 21. Различные виды функции полезности.

Минимально приемлемая полезность для агента составляет U_{min} . При более низком значении агент имеет возможность трудоустроиться в другом месте.

Доход фирмы R является случайной величиной и её распределение зависит от уровня усилий агента S . Распределения дохода при высоком и низком уровне усилий агента приведены на рис.22-23.

Усилия работника	e= S_{max}		
Период		Неудачный	Удачный
Доход фирмы	R	$R_{неуд}$	$R_{уд}$
Вероятность	P	$P_{неуд.max}$	$P_{уд.max}$

Рис. 22. Случайная величина, определяющая доход принципала в зависимости от состояния рынка при высоком уровне усилий агента

Усилия работника	e= S_{min}		
Период		Неудачный	Удачный
Доход фирмы	R	$R_{неуд}$	$R_{уд}$
Вероятность	P	$P_{неуд.min}$	$P_{уд.min}$

Рис. 23. Случайная величина, определяющая доход принципала в зависимости от состояния рынка при низком уровне усилий агента

Замечание. Сумма $P_{уд.max}$ и $P_{неуд.max}$ равна 1.
Сумма $P_{уд.min}$ и $P_{неуд.min}$ равна 1.

Варианты заданий

Таблица 1

	Варианты							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	2	3	2	2	3	3	3	3
b	3	4	4	3	4	4	3	3
c	0.5	0.7	0.6	0.65	1.2	1	1	1.5
N_{ϕ}	2	2	2	2	4	4	4	4
U_{\min}	1	1	1	1	2	3	2	2
S_{\min}	0.5	0.7	0.6	0.65	1.2	1	1	1.5
S_{\max}	1	1	1	1.1	2	2	2	2
$R_{уд}$	70	60	60	60	40	30	40	50
$R_{неуд}$	10	20	20	20	10	10	10	10
$P_{уд,\min}$	1/3	0.4	0.35	0.35	0.40	1/3	0.40	0.40
$P_{уд,\max}$	2/3	0.6	0.60	0.60	2/3	2/3	2/3	2/3

Таблица 2

	Варианты							
	9	10	11	12	13	14	15	16
a	2	2	2	2	1	1	1.5	0.9
b	5	4	4	4	0.5	0.5	0.5	0.7
c	3	3	2	2	2	3	2.5	2
N_{ϕ}	1	1	1	1	4	4	4	4
U_{\min}	1	0.8	0.9	1.1	0.8	1	1	1.2
S_{\min}	3	3	2	2	2	3	2.5	2
S_{\max}	4	4	3	3	3	4	3.5	4
$R_{уд}$	40	20	20	30	40	40	50	50
$R_{неуд}$	20	10	10	15	10	20	10	10
$P_{уд,\min}$	1/3	1/3	0.25	0.25	1/3	1/3	0.20	0.20
$P_{уд,\max}$	2/3	2/3	2/3	0.75	2/3	2/3	2/3	0.60

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беляев В.В., Чиргин А.В.* Нелинейное программирование. Методические указания для выполнения лабораторных работ для студентов направлений подготовки бакалавриата 080100 и 080200/ НМСУ «Горный». Сост. СПб, 2013., 63с.
2. *Курицкий Б.Я.* Поиск оптимальных решений средствами EXCEL 7.0.- СПб.: ВHV- СПб. 1997., 384с.
3. *Тамбовцев В. Л.* Введение в экономическую теорию контрактов: учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2004. -144с.
4. *Юдкевич М. М., Подколзина Е. А., Рябинина А. Ю.* Основы теории контрактов: модели и задачи: учеб. пособие. М.: ГУ ВШЭ, 2002. 352с

Содержание

Введение.....	4
Решение задач нелинейной оптимизации на примере модели агентских отношений.....	5
Основные формулы и определения.....	5
Симметричная информация об усилиях.....	11
Асимметричная информация об усилиях.....	13
Задание на курсовую работу.....	30
Библиографический список.....	35
Приложение 1. Элементы теории контрактов.....	36
Приложение 2. Решение нелинейной задачи с помощью теоремы Куна-Таккера.....	37

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Элементы теории контрактов

В настоящее время экономическая теория предлагает более реалистическое описание самого процесса принятия решений, чем это полагалось раньше. Стандартная неоклассическая модель изображает человека как существо гиперрациональное. Один из новых подходов (неоинституциональный) отличается большей рациональностью. Это находит выражение в двух его важнейших поведенческих предпосылках - *ограниченной рациональности и оппортунистического поведения*.

Первая отражает факт ограниченности человеческого интеллекта. Знания, которыми располагает человек, всегда неполны, его счетные и прогностические способности далеко не беспредельны, совершение логических операций требует от него времени и усилий. Одним словом, информация ресурс дорогостоящий, поэтому агенты вынуждены останавливаться не на оптимальных решениях, а на тех, что кажутся им приемлемыми, исходя из имеющейся у них ограниченной информации. Их рациональность будет выражаться в стремлении экономить не только на материальных затратах, но и на своих интеллектуальных усилиях. При прочих равных условиях они будут предпочитать решения, предъявляющие меньше требований к их предсказательным и счетным возможностям.

Оппортунистическое поведение определяется О.Уильямсоном, который ввел это понятие в научный оборот, как "преследование собственного интереса, доходящее до вероломства" (self-interest-seeking-with-guile). Речь идет о любых формах нарушения взятых на себя обязательств, например, уклонении от условий контракта. Индивиды, максимизирующие полезность, будут вести себя оппортунистически (скажем, предоставлять услуги меньшего объема и худшего качества), когда это сулит им прибыль.

Одной из основных форм *оппортунистического поведения* является *отлынивание*. "*Отлынивание*" (shirking) возникает при асимметрии информации, когда агент точно знает, сколько им затрачено усилий, а принципал имеет об этом лишь приблизительное представление (так называемая ситуация

"скрытого действия"). В таком случае возникает и стимул, и возможность работать не с полной отдачей. Особенно остро встает эта проблема, когда люди работают сообща ("командой") и личный вклад каждого определить очень трудно.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Решение нелинейной задачи с помощью теоремы Куна-Таккера

Строгое решение нелинейной задачи определяемой соотношениями (24), (25), (26), (27) может быть получено путем использования теоремы Куна-Таккера [1]. Для этого введем новые переменные x_1 и x_2 , где $x_1 = p$ и $x_2 = q$.

Целевая функция (24) примет вид (П.1),

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2 \cdot x_2^2) \rightarrow \min \quad (\text{П.1})$$

Ограничение (17) преобразуется к виду

$$x_2 \geq x_1 + 3 \quad (\text{П.2})$$

Ограничение (20) преобразуется к виду

$$x_2 \geq -\frac{1}{2} \cdot x_1 + 3 \quad (\text{П.3})$$

Ограничение (23) преобразуется к виду

$$x_1 \geq 0 \quad (\text{П.4})$$

$$x_2 \geq 0$$

Очевидно, что оптимальное решение задачи (П.1)-(П.4) достигается в той же точке, что и решение задачи определяемой соотношениями (24), (25), (26), (27).

Область допустимых значений функции нелинейной оптимизации (П.1)-(П.4) в координатах x_1 и x_2 определяемая соотношениями (П.2), (П.3) и (П.4) приведена на рис.П.1 и заштрихована тройной штриховкой. Заметим, что соотношение (П.3) можно удалить, при этом область допустимых значений функции не изменится.

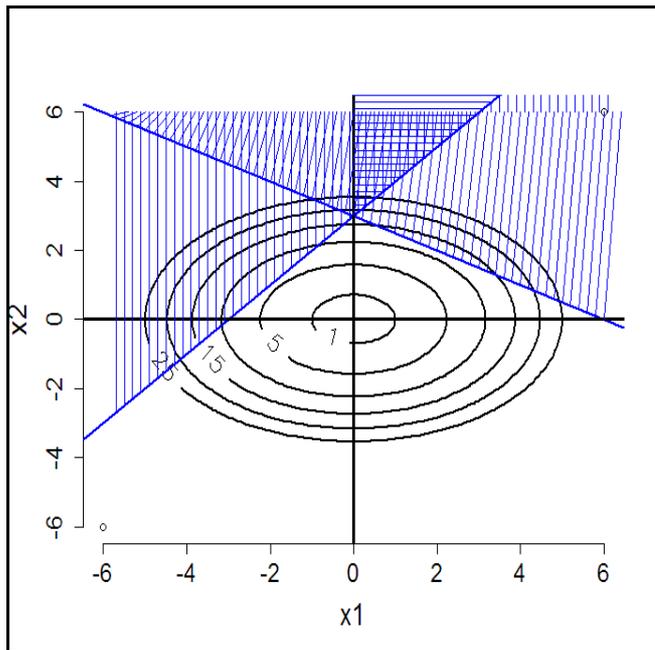


Рис.П1. Область допустимых значений задачи нелинейной оптимизации в координатах x_1 и x_2 и линии уровня целевой функции.

Введем функции $g_1(x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2)$ и $g_3(x_1, x_2)$, используя соотношения, приведенные ниже.

$$g_1(x_1, x_2) = -x_1 \quad (\text{П.5})$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_2 \quad (\text{П.6})$$

$$g_3(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 3 \quad (\text{П.7})$$

Преобразуем соотношения (П.2) и (П.4) используя вновь введенные функции. Ограничения (П.4) преобразуется к виду

$$g_1(x_1, x_2) \leq 0 \quad (\text{П.8})$$

$$g_2(x_1, x_2) \leq 0 \quad (\text{П.9})$$

Ограничение (П.2) преобразуется к виду

$$g_3(x_1, x_2) \leq 0 \quad (\text{П.10})$$

Область допустимых значений функции нелинейной оптимизации в координатах x_1 и x_2 определяемая соотношениями (П.8), (П.9) и (П.10) приведена на рис.П.2 и заштрихована двойной штриховкой. На рисунке также показаны линии уровня оптимизируемой функции $F(x_1, x_2)$ и направление градиента в некоторых точках.

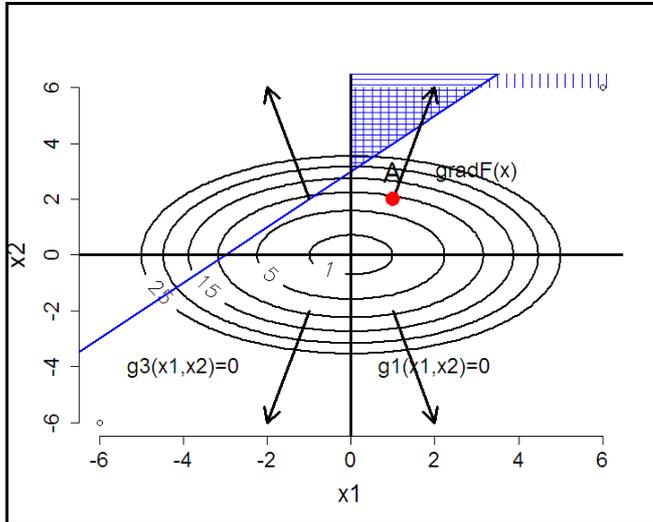


Рис.П.2. Область допустимых значений задачи нелинейной оптимизации в координатах x_1 и x_2 , линии уровня целевой функции и направление градиента в некоторых точках.

Все функции ограничений-неравенств линейны, $g_i \leq 0$ ($i = 1, 2, 3$) а значит, выпуклы, поэтому область допустимых значений в задаче выпукла. Заметим, что если взять некоторую точку внутри области, например, $(x_1, x_2) = (1, 6)$, то эта точка будет допустимой, и все неравенства в ней выполняются строго $g_i(1, 6) < 0$ ($i = 1, 2, 3$). Отсюда следует что область регулярна во всех точках.

Для проверки выпуклости вычислим её Гессиан (матрицу вторых производных).

$$\nabla^2 F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{П.11})$$

Главные миноры равны $\Delta_1 = 2$ и $\Delta_2 = 2 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = 8$ положительны, поэтому по критерию Сильвестра матрица положительно определена. Поскольку для выпуклости дважды дифференцируемой функции необходимо и достаточно неотрицательной определенности Гессиана, то функция $F(x_1, x_2)$ выпукла во всей области определения. Таким образом, условия Куна-Таккера будут необходимыми и достаточными условиями, определяющими решение задачи.

Вычислим градиенты функций задачи.

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{П.12})$$

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{П.13})$$

$$\nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{П.14})$$

$$\nabla g_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1 - x_2 + 3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_1 - x_2 + 3)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{П.15})$$

Чтобы использовать условия Куна-Таккера, необходимо установить набор активных ограничений-неравенств в точке решения.

Взаимное расположение области допустимых значений, линии уровня и направления градиента на рис.П2 позволяют высказать следующие соображения относительно возможной точки условного минимума. Каждая линия уровня $F(x_1, x_2) = C$ является

эллипсом, определяемым уравнением $\frac{x_1^2}{C} + \frac{x_2^2}{C/2} = 1$. Возьмем,

например, точку А с координатами $(x_1, x_2) = (1, 2)$ эта точка не принадлежит области. Через нее проходит линия уровня $F(x_1, x_2) = 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 9$. Будем мысленно раздвигать эллипс (линию) уровня в направлении градиента (в направлениях показанных стрелками), это будет соответствовать расширению эллипса. Будем расширять эллипс до тех пор, пока он не коснется заштрихованной области. Можно предположить, что касание произойдет в угловой точке В с координатами $(x_1, x_2) = (0, 3)$ (рис.П.3). Поэтому предположим, что активными являются ограничения 1 и 3, которые определяют подозрительную точку В на рис.П.3. Тогда для этой точки система будет иметь вид

$$-\nabla F(x_1, x_2) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x_1, x_2) + \lambda_3 \cdot \nabla g_3(x_1, x_2), \quad (\text{П.16})$$

где λ_1 и λ_2 коэффициенты из условия разложимости теоремы Куна - Таккера. Используя явное выражение для этих функций, получаем следующее соотношение.

$$-\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=3}} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{П.17})$$

Подставив x_1 и x_2 , получим следующее соотношение для определения λ_1 и λ_3

$$-\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{П.18})$$

Откуда следует следующая система уравнений

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_3 \cdot 1 \\ -12 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot (-1) \end{cases} \quad (\text{П.19})$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = 12 > 0$ и $\lambda_3 = 12 > 0$. Поскольку λ_1 и λ_3 положительны и все условия теоремы К-Т выполнены, то точка В действительно является решением оптимизационной задачи. Геометрический смысл соотношения (П.18) показан на рис.П.3. и рис.П.4. Вектор антиградиент $-\nabla F(x_1, x_2)$ можно разложить по векторам $\nabla g_1(x_1, x_2)$ и $\nabla g_3(x_1, x_2)$ с положительными коэффициентами λ_1 и λ_3 , т.е. проекции $-\nabla F(x_1, x_2)$ на векторы $\nabla g_1(x_1, x_2)$ и $\nabla g_3(x_1, x_2)$ направлены также как и сами вектора. Таким образом, оптимальное решение задачи (П.1)-(П.4) достигается при $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Поэтому оптимальное решение исходной задачи определяемой соотношениями (24), (25), (26), (27) достигается при $p = 0$ и $q = 3$. Целевая функция (П.1) $F(x_1, x_2)$ при этом равна $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 = 0^2 + 2 \cdot 3^2 = 18$.

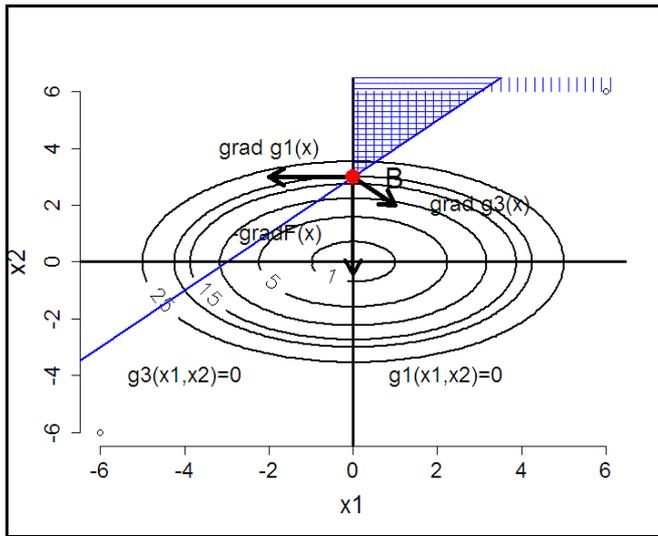


Рис.П3. Точка В - точка Куна-Таккера.

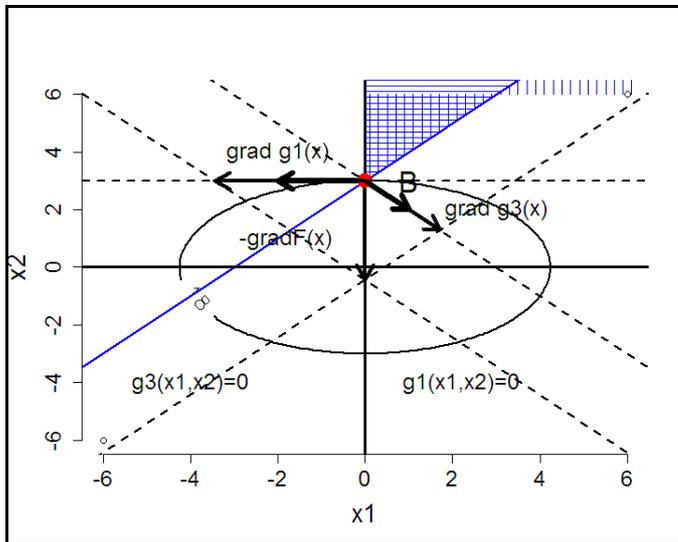


Рис.П4. Точка В - точка Куна-Таккера. В ней выполняются условия разложимости вектора градиента целевой функции по векторам градиентов активных ограничений.