Задание Д.24. Исследование свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы

Определить частоты малых свободных колебаний и формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы, пренебрегая силами сопротивления, массами пружин и моментами инерции скручиваемых валов.

Схемы механических систем тел *1—3* в положении покоя показаны на рис. 232—234, а необходимые для решения данные приведены в табл. 61.

Примечание. Во всех вариантах колеса считать сплошными однородными дисками, стержни — тонкими однородными. Во всех случаях качение колес происходит без скольжения.

Пример выполнения задания. Определить частоты свободных колебаний и найти формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы, указанной на рис. 235.

Дано: $l_1 = 0{,}2$ м; $l_2 = 0{,}6$ м; $l_3 = 0{,}3$ м; масса груза $m_1 = 0{,}5$ кг; масса однородного стержня ED $m_2 = 3$ кг; коэффициенты жесткости пружин: $c_1 = 60$ Н/см; $c_2 = 40$ Н/см; $c_3 = 40$ Н/см.

Решение. Система состоит из груза B, подвешенного к рычагу ED на пружине с коэффициентом жесткости c_3. В точках E и D рычаг опирается на пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2.

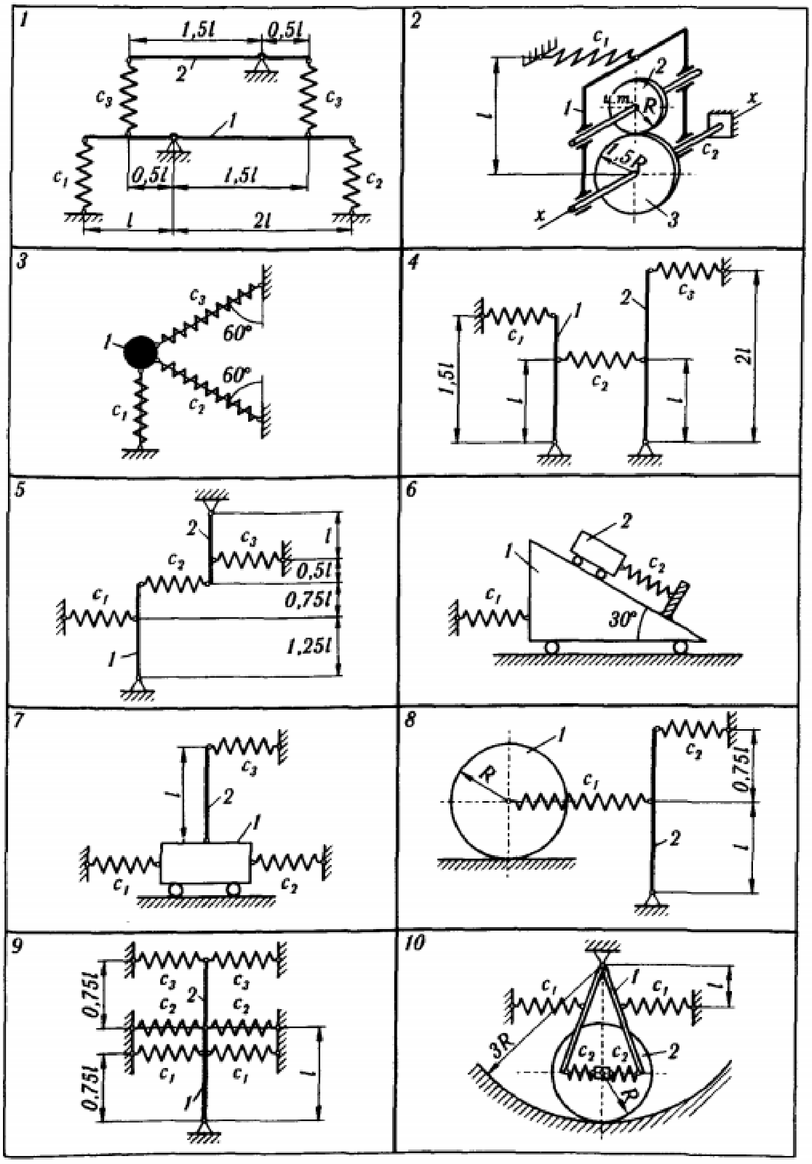
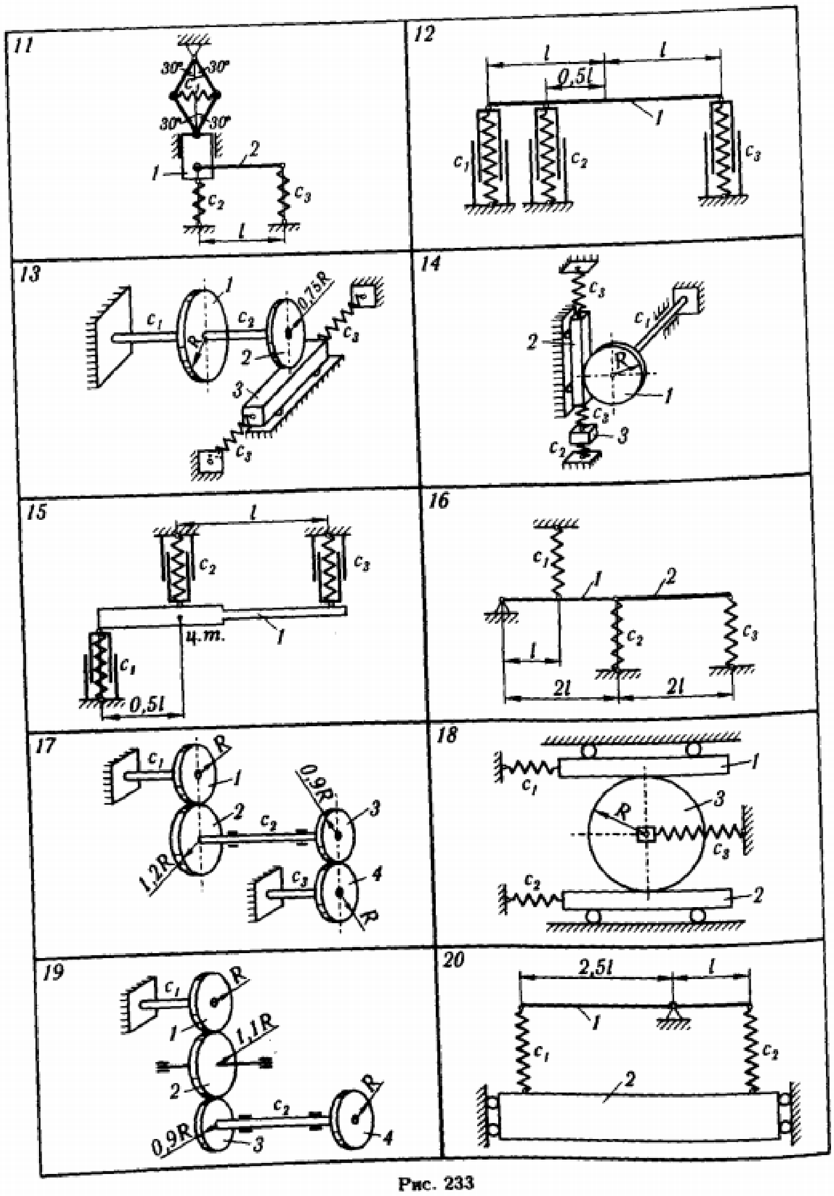


Рис. 232



11
30°
30°
c_1
30°
30°
1
2
c_2
c_3
l
12
l
l
0,5l
1
c_1
c_2
c_3
13
1
c_1
c_2
0,75R
R
2
c_3
3
c_3
14
c_3
2
c_1
R
1
c_3
3
c_2
15
l
c_2
c_3
ц.т.
1
c_1
0,5l
16
c_1
1
2
c_2
c_3
l
2l
2l
17
c_1
R
1
2
c_2
0,9R
3
1,2R
c_3
4
R
18
1
c_1
3
R
c_3
c_2
2
19
c_1
R
1
1,1R
2
c_2
R
0,9R
3
4
20
2,5l
l
1
c_1
c_2
2

Рис. 233

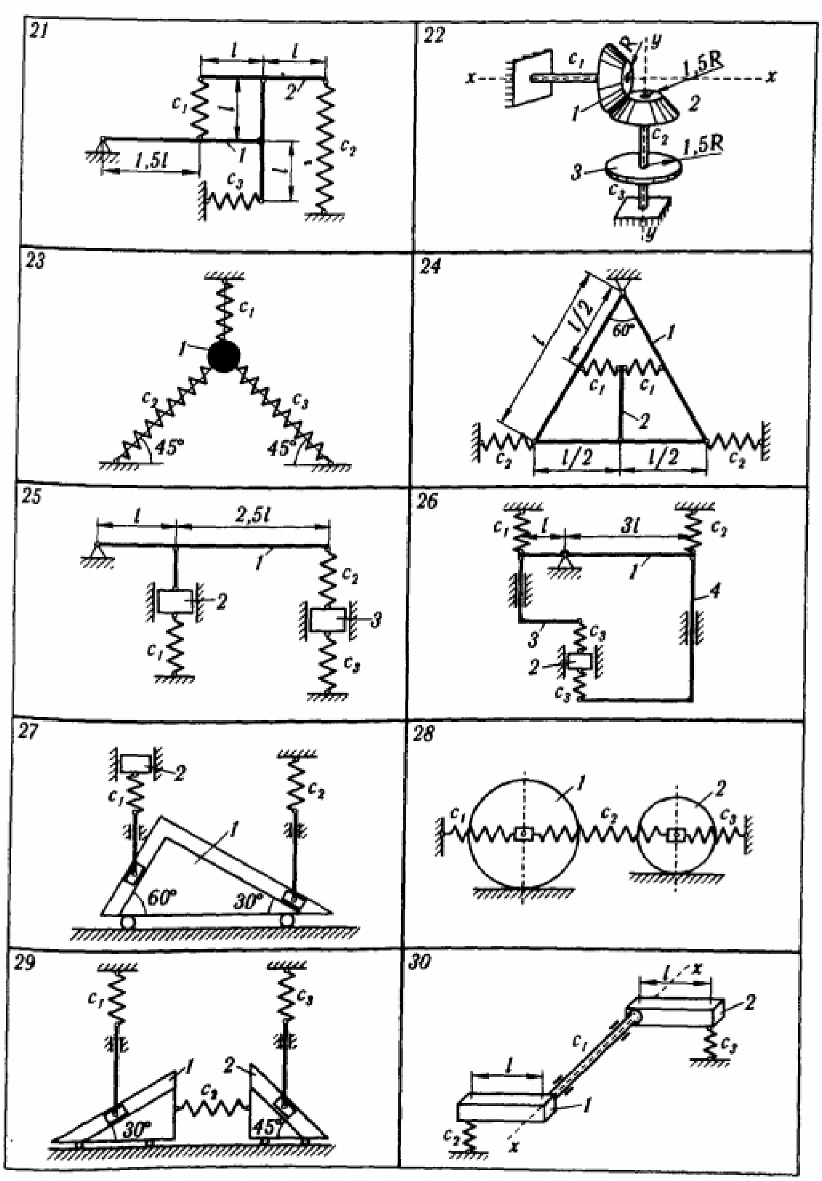

21
l
l
2
c1
l
1,5l
1
l
c2
c3
22
x
c1
R
y
1,5R
x
1
2
c2
1,5R
3
c3
y
23
c1
1
c2
c3
45°
45°
24
l
l/2
60°
1
c1
c1
2
c2
l/2
l/2
c2
25
l
2,5l
1
2
c2
3
c1
c3
26
c1
l
3l
c2
1
4
3
c3
2
c3
27
2
c1
c2
1
60°
30°
28
1
2
c1
c2
c3
29
c1
c3
1
2
c2
30°
45°
30
l
x
2
c1
c3
l
1
c2
x

Рис. 234

Таблица 61

Номер варианта (Рис. 232–234)	Масса тел, кг			Радиус	Радиус инерции тела 1 относительно оси вращения i_x, м	Коэффициенты жесткости упругих элементов						Расстояние l, м	Примечания
	m_1	m_2	m_3	R, м		c_1		c_2		c_3			
						$\frac{Н}{см}$	$\frac{Нм}{рад}$	$\frac{Н}{см}$	$\frac{Нм}{рад}$	$\frac{Н}{см}$	$\frac{Нм}{рад}$		
1	1	2	–	–	–	40	–	30	–	20	–	0,5	
2	10	2	4	0,2	0,6	400	–	–	$2 \cdot 10^3$	–	–	1	Корпус редуктора имеет возможность поворачиваться вокруг оси колеса *3*. Ось колеса *2* неизменно связана с корпусом. Центр тяжести корпуса совпадает с центром колеса *2*
3	4	–	–	–	–	30	–	20	–	10	–	–	Система расположена в горизонтальной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы. Тело *1* принять за материальную точку
4	2	5	–	–	–	6	–	8	–	7	–	0,5	
5	5	2	–	–	–	8	–	6	–	7	–	0,5	
6	8	2	–	–	–	20	–	15	–	–	–	–	
7	3	1	–	–	–	6	–	4	–	8	–	0,5	
8	4	1	–	0,2	–	40	–	30	–	–	–	0,3	
9	1	0,5	–	–	–	80	–	10	–	60	–	0,4	
10	6	4	–	0,2	0,3	4	–	3	–	–	–	0,1	Центр тяжести тела *1* находится на оси пружины с коэффициентом жесткости c_1. В положении покоя пружины не деформированы
11	10	3	–	–	–	10	–	10	–	5	–	0,4	В положении покоя пружина с коэффициентом жесткости c_1 не деформирована
12	6	–	–	–	–	20	–	30	–	40	–	0,5	
13	30	30	10	0,4	–	–	$2 \cdot 10^4$	–	$1 \cdot 10^4$	200	–	–	
14	40	20	10	–	–	–	$3 \cdot 10^4$	100	–	150	–	–	

Номер варианта (Рис. 232–234)	Масса тел, кг			Радиус	Радиус инерции тела *1* относительно оси вращения i_x, м	Коэффициенты жесткости упругих элементов						Расстояние l, м	Примечания
						c_1		c_2		c_3			
	m_1	m_2	m_3	R, м		$\frac{Н}{см}$	$\frac{Нм}{рад}$	$\frac{Н}{см}$	$\frac{Нм}{рад}$	$\frac{Н}{см}$	$\frac{Нм}{рад}$		
15	6	–	–	–	0,6	40	–	30	–	50	–	1	i_x — радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной плоскости рисунка
16	4	6	–	–	–	60	–	100	–	80	–	0,4	
17	50	60	40	0,2	–	–	$2 \cdot 10^4$	–	$3 \cdot 10^4$	–	$1 \cdot 10^4$	–	$m_4 = m_1$
18	2	3	8	0,4	–	20	–	40	–	30	–	–	
19	40	60	30	0,35	–	–	$1 \cdot 10^4$	–	$3 \cdot 10^4$	–	–	–	$m_4 = m_1$
20	8	10	–	–	–	40	–	60	–	–	–	0,5	
21	4	2	–	–	0,6	20	–	30	–	30	–	0,5	Система расположена в горизонтальной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы
22	30	40	20	0,4	0,5	–	$1 \cdot 10^4$	–	$5 \cdot 10^3$	–	$2 \cdot 10^4$	–	$i_{x_1} = i_{x_2}$
23	3	–	–	–	–	10	–	20	–	30	–	–	Система расположена в горизонтальной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы. Тело *1* принять за материальную точку
24	40	2	–	–	–	2	–	1	–	–	–	0,4	В положении покоя пружины не деформированы. Тело *1* состоит из трех одинаковых стержней
25	2	1	0,5	–	–	20	–	40	–	30	–	0,3	
26	6	2	3	–	–	40	–	30	–	10	–	0,2	$m_4 = m_1$
27	8	2	–	–	–	30	–	60	–	–	–	–	
28	6	4	–	–	–	20	–	10	–	30	–	–	
29	4	3	–	–	–	30	–	20	–	40	–	–	
30	30	30	–	–	0,4	–	$2 \cdot 10^4$	80	–	100	–	0,5	$i_{x_1} = i_{x_2}$

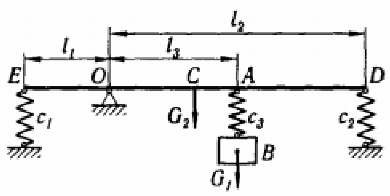


Рис. 235

В состоянии покоя рычаг занимает горизонтальное положение. Пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 деформированы (сжаты или растянуты) соответственно на величины $f_{ст1}$; $f_{ст2}$. Пружина с коэффициентом жесткости c_3 растянута на величину $f_{ст3}$.

За обобщенные координаты примем: z — вертикальное смещение груза от положения покоя; φ — угол поворота рычага ED от положения покоя. На рис. 236 показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

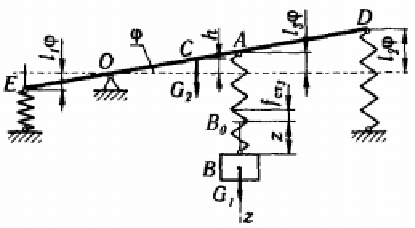


Рис. 236

Найдем кинетическую и потенциальную энергии системы. Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии груза и кинетической энергии рычага:

$$T = m_1\dot{z}^2/2 + J_0\dot{\varphi}^2/2,$$

где $\dot{z}$, $\dot{\varphi}$ — обобщенные скорости; J_0 — момент инерции стержня ED относительно оси вращения O.

Момент инерции

$$J_0 = m_2l^2/12 + m_2d^2,$$

где l — длина стержня ED, $d = OC$ — расстояние от центра тяжести C стержня до оси вращения O (см. рис. 235):

$$d = (l_1 + l_2)/2 - l_1 = (l_2 - l_1)/2.$$

Момент инерции стержня будет $J_0 = 0{,}28$ кг $\cdot$ м^2.

Потенциальная энергия системы равна работе сил при перемещении системы из отклоненного положения в нулевое (положение статического равновесия).

Потенциальную энергию системы вычислим как сумму:

$$\Pi = \Pi_{\mathrm{I}} + \Pi_{\mathrm{II}},$$

где Π_{I} — потенциальная энергия груза и рычага в поле сил тяжести; Π_{II} — потенциальная энергия деформированных пружин;

$$\Pi_{\mathrm{I}} = -G_1z + G_2h.$$

Так как

$$h = OC\varphi = \frac{l_2 - l_1}{2}\varphi,$$

то

$$\Pi_I = -G_1 z + G_2 \frac{l_2 - l_1}{2} \varphi.$$

Потенциальную энергию пружин найдем, рассматривая сначала перемещение системы из отклоненного положения в положение, соответствующее недеформированным пружинам, а затем из этого положения — в положение покоя.

Деформации пружин следующие: $\lambda_1 = l_1\varphi \pm f_{\text{ст}1}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_1; $\lambda_2 = l_2\varphi \pm f_{\text{ст}2}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_2; $\lambda_3 = f_{\text{ст}3} + l_3\varphi + z$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_3.

Следовательно,

$$\Pi_{II} = 1/2c_1(l_1\varphi \pm f_{\text{ст}1})^2 - 1/2c_1 f_{\text{ст}1}^2 + 1/2c_2(l_2\varphi \pm f_{\text{ст}2})^2 -$$
$$-1/2c_2 f_{\text{ст}2}^2 + 1/2c_3(f_{\text{ст}3} + l_3\varphi + z)^2 - 1/2c f_{\text{ст}3}^2,$$

или после упрощений

$$\Pi_{II} = 1/2c_1 l_1^2\varphi^2 + 1/2c_2 l_2^2\varphi^2 + 1/2c_3(l_3\varphi + z)^2 \pm c_1 l_1 f_{\text{ст}1}\varphi \pm$$
$$\pm c_2 l_2 f_{\text{ст}2}\varphi + c_3 f_{\text{ст}3}(l_3\varphi + z).$$

Потенциальная энергия всей системы

$$\Pi = -G_1 z + [G_2(l_2 - l_1)/2]\varphi + 1/2c_1 l_1^2\varphi^2 + 1/2c_2 l_2^2\varphi^2 + 1/2c_3 l_3^2\varphi^2 +$$
$$+c_3 l_3\varphi z + 1/2c_3 z^2 \pm c_1 l_1 f_{\text{ст}1}\varphi \pm c_2 l_2 f_{\text{ст}2}\varphi + c_3 f_{\text{ст}3} l_3\varphi + c_3 f_{\text{ст}3} z.$$

Из условий покоя рассматриваемой системы, находящейся под действием сил, имеющих потенциал, имеем

$$(\partial\Pi/\partial z)_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = -G_1 + c_3 f_{\text{ст}3} = 0;$$

$$(\partial\Pi/\partial\varphi)_{\substack{z=0\\ \varphi=0}} = G_2\frac{l_2 - l_1}{2} \pm c_1 l_1 f_{\text{ст}1} \pm c_2 l_2 f_{\text{ст}2} + c_3 l_3 f_{\text{ст}3} = 0.$$

Потенциальная энергия системы с учетом условий покоя имеет вид

$$\Pi = 1/2c_1 l_1^2\varphi^2 + 1/2c_2 l_2^2\varphi^2 + 1/2c_3 l_3^2\varphi^2 + c_3 l_3 z\varphi + 1/2c_3 z^2.$$

Таким образом,

$$T = 1/2m_1\dot{z}^2 + 1/2J_0\dot{\varphi}^2;$$
$$\Pi = 1/2c_3 z^2 + c_3 l_3 z\varphi + 1/2(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2)\varphi^2$$

или

$$T = 1/2(a_{11}\dot{z}^2 + 2a_{12}\dot{z}\dot{\varphi} + a_{22}\dot{\varphi}^2);$$
$$\Pi = 1/2(c_{11}z^2 + 2c_{12}z\varphi + c_{22}\varphi^2).$$

Здесь a_{ij} — коэффициенты инерции:

$$a_{11} = m_1; \qquad a_{12} = 0; \qquad a_{22} = J_0;$$

c_{ij} — коэффициенты жесткости:

$$c_{11} = c_3, \qquad c_{12} = c_3 l_3, \qquad c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2.$$

Для рассматриваемой консервативной системы уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Вычислив производные

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot z} = a_{11}\dot z, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot z}\right) = a_{11}\ddot z, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = c_{11} z + c_{12}\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = a_{22}\dot\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = a_{22}\ddot\varphi, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c_{12} z + c_{22}\varphi$$

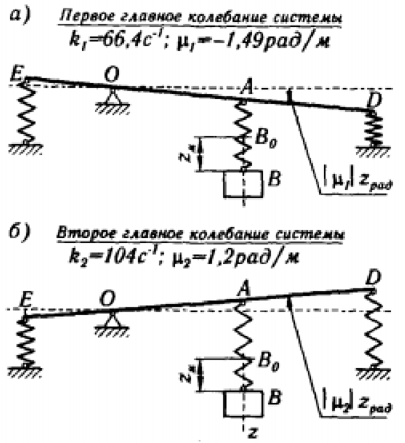


Рис. 237

и подставив их в уравнения Лагранжа, получим

$$a_{11}\ddot z = -c_{11} z - c_{12}\varphi;$$

$$a_{22}\ddot\varphi = -c_{21} z - c_{22}\varphi,$$

где $c_{21} = c_{12}$.

Таким образом, для данной системы дифференциальные уравнения свободных колебаний имеют вид

$$a_{11}\ddot z + c_{11} z + c_{12}\varphi = 0;$$

$$a_{22}\ddot\varphi + c_{21} z + c_{22}\varphi = 0.$$

Частное решение этих уравнений:

$$z = A_z \sin(kt + \beta);$$

$$\varphi = A_\varphi \sin(kt + \beta),$$

где A_z и A_φ — амплитуды главных колебаний; k — частоты свободных колебаний; β — начальная фаза колебаний.

Уравнение частот, вытекающее из данной системы дифференциальных уравнений, имеет вид

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - c_{12}^2 = 0.$$

Корни этого биквадратного уравнения, соответствующие квадратам частот, определим по формулам

$$k_{1,2}^2 = \frac{a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} \mp \sqrt{(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})^2 - 4a_{11}a_{22}(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{2a_{11}a_{22}}.$$

В рассматриваемой задаче: $a_{11} = m_1 = 0{,}5$ кг; $c_{11} = c_3 = 4000$ Н/м; $c_{12} = c_3 l_3 = 1200$ Н, $a_2 = J_0 = 0{,}28$ кг · м^2; $c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 = 2040$ Н · м.

Следовательно, частоты свободных колебаний

$$k_1 = 66{,}4 \text{ с}^{-1}; \quad k_2 = 104 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициенты распределения, соответствующие частотам k_1 и k_2, в общем случае имеют вид

$$\mu_1 = \frac{A_{\varphi_1}}{A_{z_1}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2};$$

$$\mu_2 = \frac{A_{\varphi_2}}{A_{z_2}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}.$$

В данном случае $\mu_1 = -1{,}49$ рад/м; $\mu_2 = 1{,}2$ рад/м.

Уравнения, определяющие первое главное колебание, примут следующий вид:

$$z_1 = A_{z_1}\sin(66{,}4t + \beta_1); \qquad \varphi_1 = -1{,}49A_{z_1}\sin(66{,}4t + \beta_1).$$

Уравнения, определяющие второе главное колебание,

$$z_2 = A_{z_2}\sin(104t + \beta_2); \qquad \varphi_2 = 1{,}2A_{z_2}\sin(104t + \beta_2).$$

Формы колебаний показаны на рис. 237, *а, б*.

Общее решение дифференциальных уравнений представляет собой сумму частных решений:

$$z = z_1 + z_2 = A_{z_1}\sin(66{,}4t + \beta_1) + A_{z_2}\sin(104t + \beta_2);$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -0{,}0149A_{z_1}\sin(66{,}4t + \beta_1) + 0{,}012A_{z_2}\sin(104t + \beta_2).$$

Значения A_{zi} и β_i определяются по начальным условиям задачи.