Лабораторная работа № 6.

Тема: «Приближенное решение задачи коши методами Эйлера и Рунге-Кутта»

Цель - сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке [*a*, *b*] при заданном начальном условии $y_0 = y(x_0)$ методами Эйлера и Рунге-Кутта, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

1. Метод Эйлера.

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1, y_2, \dots, y_n$ решения уравнения $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$. Чаще всего $x_i = x_0 + ih$, где $i = 1,2,\dots,n$. Точки x_i называются узлами сетки, а величина h - шагом $(h > 0)$.

В методе Эйлера величины y_i вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,2,\dots . \tag{1}$$

Этот метод относится к группе одношаговых методов, в которых для расчета точки (x_{i+1}, y_{i+1}) требуется информация только о последней вычисленной точке (x_i, y_i). Метод допускает простую геометрическую интерпретацию (рис. 1). Предположим, что известна точка (x_i, y_i) на искомой интегральной кривой. Тогда касательная к этой кривой, проходящая через точку (x_i, y_i), определяется уравнением $y = y_i'(x - x_i) + y_i$, а так как $y_i' = f(x_i, y_i)$ и $x_{i+1} = x_i + h$, то $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

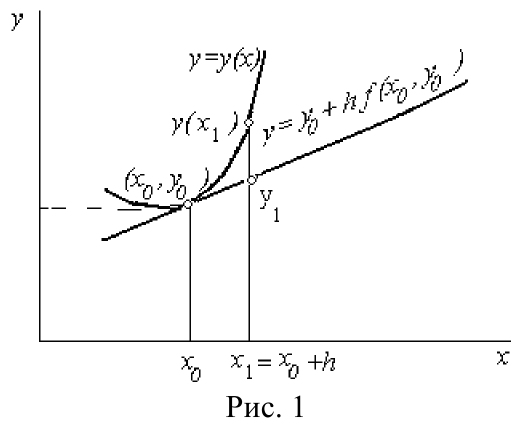

Рис. 1

Для оценки погрешности метода на одном шаге сетки разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестности узла x_i

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i+h) = y(x_i) + y'(x_i)\,h + O(h^2) = \\ &= y(x_i) + h\,f(x_i, y_i) + O(h^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Сравнение формулы (1) с разложением (2) показывает, что они согласуются до членов первого порядка по h а погрешность формулы (1) равна $O(h^2)$. Если расчетные формулы численного метода согласуются с разложением в ряд Тейлора до членов порядка h^p, то число p называют порядком метода. Таким образом, Метод Эйлера – метод первого порядка.

Для практической оценки погрешности расчета можно рекомендовать правило Рунге. Для этого проведем вычисления с шагом h и $h/2$ и сравним величины $y_i^{(h)}$ и $y_{2i}^{(h/2)}$. За оценку погрешности вычислений с шагом $h/2$ можно принять величину

$$\max_i \left| y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)} \right|. \tag{7}$$

Используем описанный алгоритм Эйлера при решении примера 1.

Пример 1. Получить численное решение дифференциального уравнения $y' + 3y = x^2 \sin x$ с начальным условием $y(0) = 40$ на интервале $[0,20]$. Полученное решение сравнить с точным решением:

$$\begin{aligned} y_{\text{т}}(x) = &-\frac{1}{10}\cdot x^2\cdot\cos x + \frac{3}{25}\cdot x\cdot\cos(x) - \frac{13}{250}\cdot\cos(x) + \\ &+\frac{3}{10}\cdot x^2\cdot\sin x - \frac{4}{25}\cdot x\cdot\sin(x) + \frac{9}{250}\cdot\sin x + \frac{10013}{250}\cdot e^{-3\cdot x} \end{aligned}$$

Решение проведем в математическом пакете MATHCAD. Результаты представлены на рис. 2-5. На рис. 2 задаются начальные значения, число точек интегрирования, правая часть дифференциального уравнения и функция Euler(x0,xk,n,y0), решающая это уравнение по формуле (5). На рис. 3 задается функция Yrez, которая уточняет полученное решение по формуле (7) с заданной точностью. На рис. 4 представлен график решения. На рис. 5 представлены результаты решения и проведено сравнение полученного решения с точным. Как видим полученное решение с заданной точностью совпадает с точным решением.

x0 - начальное значеник x_0

xk - конечное значение отрезка интегрирования уравнения

y0 - знфачение y в точке x_0

n - число точек интегрирования

h - шаг интегрирования

eps - оценка погрешности вычислений

f - правая часть уравнения

$x0 := 0 \qquad xk := 20 \qquad y0 := 40 \qquad n := 10 \qquad eps := 0.001$

$f(x,y) := x^2 \cdot \sin(x) - 3 \cdot y$

$$
\mathrm{Euler}(x0, xk, n, y0) := \left|
\begin{array}{l}
x_0 \leftarrow x0 \\
y_0 \leftarrow y0 \\
h \leftarrow \dfrac{xk - x0}{n} \\
\text{for } i \in 0..n-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \end{array} \right. \\
Y^{\langle 0 \rangle} \leftarrow x \\
Y^{\langle 1 \rangle} \leftarrow y \\
Y
\end{array}
\right.
$$

Рис. 2. Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, возвращающей решение дифференциального уравнения методом Эйлера

$$
Yrez := \left|
\begin{array}{l}
eps \leftarrow eps \\
\text{for } m \in 0..100000000 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
y1 \leftarrow \mathrm{Euler}(x0, xk, n, y0) \\
y2 \leftarrow \mathrm{Euler}(x0, xk, 2n, y0) \\
\text{for } k \in 0..n \\
\quad r_k \leftarrow \max\left(\left|y1_{k,1} - y2_{2k,1}\right|\right) \\
\text{break if } \max(r) < eps \\
n \leftarrow 2 \cdot n \quad \text{otherwise}
\end{array} \right. \\
\begin{pmatrix} y2 \\ n \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

$nn := 0, \dfrac{Yrez_1}{5} .. (2Yrez)_1$

$n1 := Yrez_1 \qquad Yrez_1 = 3.277 \times 10^5$

$y1 := \mathrm{Euler}(x0, xk, n1, y0)$

$y2 := \mathrm{Euler}(x0, xk, 2n1, y0)$

$k := 0..n1$

$r_k := \max\left(\left|y1_{k,1} - y2_{2k,1}\right|\right)$

$\max(r) = 0.0007$

$\left(Yrez_0\right)_{nn,0}$	$\left(Yrez_0\right)_{nn,1} =$
0	40
2	1.02
4	-2.409
6	-5.575
8	18.564
10	-8.042
12	-33.149
14	53.607
16	1.343
18	-90.863
20	91.3

Рис. 3. Фрагмент рабочего документа MATHCAD с функцией, уточняющей решение с заданной точностью

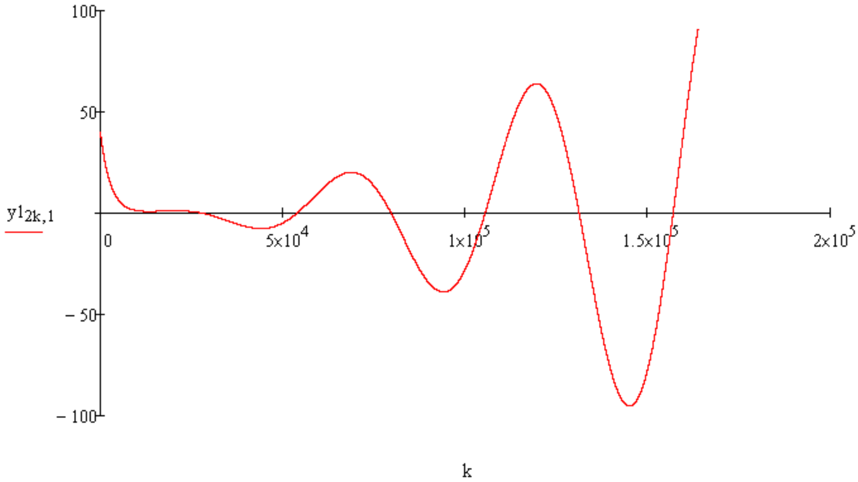

Рис. 4 Фрагмент рабочего документа MATHCAD с графиком решения

точное решение

$x := 0..20$

$$y_т(x) := \frac{10013\cdot e^{-3x}}{250} - \frac{13\cdot\cos(x)}{250} + \frac{9\cdot\sin(x)}{250} - \frac{x^2\cdot\cos(x)}{10} + \frac{3\cdot x^2\cdot\sin(x)}{10} + \frac{3\cdot x\cdot\cos(x)}{25} - \frac{4\cdot x\cdot\sin(x)}{25}$$

$E_x := (Yrez_0)_{\frac{Yrez_1}{10}\cdot x,1}$ **Решение методом Эйлера**

$x =$	$y_т(x) =$	$E_x =$
0	40	40
1	2.125	2.125
2	1.02	1.02
3	0.909	0.909
4	-2.409	-2.409
5	-7.013	-7.013
6	-5.575	-5.575
7	5.845	5.845
8	18.564	18.564
9	15.879	15.879
10	-8.042	-8.042

$x =$	$y_т(x) =$	$E_x =$
11	-34.624	-34.624
12	-33.149	-33.149
13	6.476	6.476
14	53.607	53.607
15	58.122	58.123
16	1.343	1.343
17	-73.368	-73.368
18	-90.862	-90.863
19	-17.708	-17.708
20	91.3	91.3

Рис. 5. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – сравнение решения методом Эйлера с точным решением

Задание 1. Используя метод Эйлера получить численное решение дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, с начальным условием $y(x_0) = y_0$ на интервале $[x_0, x_k]$ с точностью eps. Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 1.

Варианты заданий

Таблица 1

Номер варианта	$f(x,y)$	x_0	x_k	y_0	eps
1	$\cos(x\cdot y)$	1	4	3	0,001
2	$x\cdot y^2 - \cos\left(\frac{y}{\pi}\right)$	0	4	-0,5	0,0001
3	$y + \ln(x+y)$	1	2	5	0,01
4	$x\cdot\sin\left(\frac{x\cdot y}{x+y}\right)$	2	10	3	0,001
5	$x\cdot\cos\left(\frac{x^2\cdot y}{x-y}\right)$	3	9	-1	0,001

6	$x \cdot \cos\left(\dfrac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	1	6	-0,5	0,0001
7	$x \cdot \sin\left(\dfrac{x^2 \cdot y}{x - y}\right)$	1	7	0,65	0,001
8	$x^3 \cdot y^2 - e^{x \cdot y}$	1	4	2,5	0,001
9	$y - \ln\left(x^2 \cdot y\right)$	1	6	2	0,01
10	$y^{-x} - \tan\left(x \cdot y^2\right)$	1,5	7	2	0,001
11	$2 \cdot x^2 - \ln\left(x^2 \cdot y\right)$	1	9	1	0,01
12	$2 \cdot x^2 + \ln\left(x + y\right)$	1,3	2,8	1	0,1
13	$x^2 \cdot \cos(x - y)$	1	5	1	0,001
14	$x^2 \cdot \sin(x^2 - y)$	1	3	1	0,001
15	$y^2 \cdot \sin(x^2 + y)$	0	4	0,5	0,001
16	$y^{-x} \cdot \sin\left(x^3 + y\right)$	0	7	0,7	0,001
17	$y^{-x} \cdot \sin\left(x^3 + y^2\right)$	0	4	1,5	0,001
18	$x^3 \cdot \sin(x^3 - y^2)$	0	8	-1	0,0001
19	$y^{-3 \cdot x} \cdot \sin\left(x + y^2\right)$	0	7	1,4	0,001
20	$y^{-2 \cdot x} \cdot \sin\left(x - y^2\right)$	0	8	1,1	0,001

Метод Эйлера легко обобщается на случай нормальных систем дифференциальных уравнений. Пусть требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),
\end{aligned}
$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ \ y_2(x_0) = y_{20}, \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0},$$

или в векторной форме $Y' = F(x, Y),\ Y(x_0) = Y_0$,

$$Y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\},\ Y_0 = \{y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}\}$$

.

Приближенные значения $y_k(x_i)$ в точках x_i вычисляются по формулам

$$y_{ki} = y_{ki-1} + h\, f_k\,(x_{i-1}, y_{1(i-1)}, y_{2(i-1)}, \ldots, y_{n(i-1)}),\ k = 1,2,\ldots,n;\ i = 1,2,\ldots$$

Пример 2. Методом Эйлера на отрезке $[0,3]$ с точностью $eps = 0{,}001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = e^{-x \cdot y_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Построить график решения.
Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 6.

$x0 := 0$ $xk := 3$ $y0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ e^{-x y_0} \end{pmatrix}$ $n := 30$ $eps := 0.001$

```
Euler(x0,xk,n,y0) :=  | x_0 ← x0
                      | y_0 ← y0
                      | h ← (xk − x0)/n
                      | for i ∈ 0..n − 1
                      |   | x_(i+1) ← x_i + h
                      |   | y_(i+1) ← y_i + h·f(x_i, y_i)
                      | Y^<0> ← x
                      | Y^<1> ← y
                      | Y

Yrez :=  | eps ← eps
         | for m ∈ 0..100000000
         |   | y1 ← Euler(x0,xk,n,y0)
         |   | y2 ← Euler(x0,xk,2n,y0)
         |   | for k ∈ 0..n
         |   |   r_k ← max( |y1_(k,1) − y2_(2k,1)| )
         |   | break if max(r) < eps
         |   | n ← 2·n otherwise
         | (y1)
         | (n )
```

$Yrez_1 = 1.92 \times 10^3$ $n := Yrez_1$ $nn := 0, \frac{n}{10} .. n$ $y := Euler(x0, xk, n, y0)$

$(y_{nn,1})_0 =$	$(y_{nn,1})_1 =$
0	0
0.045	0.299
0.178	0.585
0.391	0.827
0.667	1.001
0.984	1.101
1.322	1.147
1.669	1.164
2.019	1.169
2.37	1.17
2.721	1.171

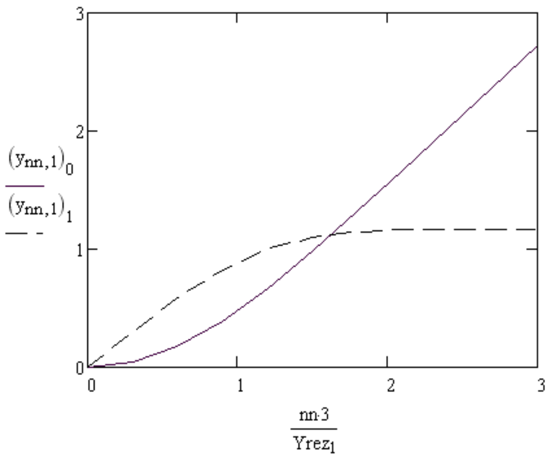

Рис. 6. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 2 методом Эйлера

Задание 2. .Методом Эйлера на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью *eps* решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}. \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 2.

Таблица 2

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2)$ $f_2(x, y_1, y_2)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20}	*eps*
1	$\cos(x + y_2)$ $\sin(x - y_1)$	0	8	0,5 -0,5	0,001

2	$arctg(x \cdot y_2)$ $\sin(y_1)$	-2,2	1,8	0,1 0	0,001
3	$\sin(y_2)$ $\cos(y_1)$	1	7	0,4 -0,6	0,01
4	$\sqrt{1+x^2+y_2^{\;2}}$ $\sin(y_1 \cdot y_2)$	-1	4	-1 1	0,01
5	$arctg\left(\frac{1}{1+y_1^{\;2}+y_2^{\;2}}\right)$ $\sin(y_1 \cdot y_2)$	-1	5	1 1	0,0001
6	$\frac{1}{3+e^{-y_2}}$ $\frac{1}{2+e^{-y_1}}$	2	7	0,2 -3	0,0001
7	$e^{-(y_1+y_2)}$ $arctg(y_1)$	0	5	1 -1	0?001
8	$\frac{y_1^{\;2}}{y_2}$ $y_1^{\;2}-y_2$	1	3	1 1	0,001
9	$\frac{1}{y_1^{\;2}+y_2^{\;2}}$ $\frac{2}{y_1^{\;2}+y_2^{\;2}}$	2	12	1 -1	0,001
10	$\sin(y_1)\cdot\cos^3(y_2)$ $\cos(y_1)\cdot\cos(y_2)$	-1	3	0,8 0,2	0,01
11	$\frac{1}{ch(x+y_2)}$ $sh(x^2-y_1)$	0	3	2 1	0,01
12	$\ln(x)\cdot y_2$ $y_1+y_2^{\;2}$	1	4	-4 -6	0,01
13	$y_2+\sqrt{x^2+y_1^{\;2}}$ $\cos(x)\cdot y_2-\sin(2\cdot x)$	2	4	4 8	0,001
14	$\sin^3(y_2)$ $\cos^2(y_1)$	0	6	0.5 -1	0,01
15	$\cos^2(x+y_2)$ $\frac{\sin(x-y_1)}{2}$	0	3	0.3 -0.6	0,0001
16	$\frac{\cos(x+y_2^{\;2})}{2}$ $\ln(x)\cdot\sin^3(x-y_1)$	1	6	0.2 -0.5	0,01
17	$\ln(x+2)\cdot y_2^{\;2}$ $\sin(x-y_1^{\;2})$	1	3	-1 1	0,001

18	$\sin(x)\cdot e^{-x\cdot y_1}$ $\cos(y_2)\cdot e^{-\frac{x}{y_1^2}}$	1	6	0,2 0,5	0,0001
19	$e^{\frac{x+y_1}{y_1+y_2}}$ $e^{\frac{y_1-x_1}{y_1+y_2}}$	2	4	1 -1	0,01
20	$arctg\left(\frac{1}{1+y_1^2}\right)$ $\cos^4(y_1\cdot y_2)$	-2	5	1 1	0,0001

2. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка

Пусть требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения $\frac{dy(x)}{dx} = f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию . $y(x_0) = y_0$ Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ решения уравнения $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - узлы сетки. Используем систему равноотстоящих узлов. Величина h - шаг сетки $(h > 0)$.

Методом Рунге–Кутта обычно называют одношаговый метод четвертого порядка, относящийся к широкому классу методов типа Рунге–Кутта. В этом методе величины y_{i+1} вычисляют по следующим формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{6}\right)\cdot(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \qquad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \qquad (1)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

Погрешность метода на одном шаге сетки равна Ch^4, но на практике оценить величину С обычно трудно. При оценке погрешности используют правило Рунге. Для этого проводят вычисления сначала с шагом h, а затем – с шагом $h/2$. Если $y_i^{(h)}$ - приближение, вычисленное с шагом h, а $y_{2i}^{(h/2)}$ - с шагом $h/2$, то справедлива оценка

$$\left|y_{2i}^{(h/2)} - y(x_{2i})\right| \le \frac{16}{15}\left|y_{2i}^{(h/2)} - y_i^{(h)}\right|.$$

За оценку погрешности вычислений с шагом $h/2$ можно принять величину

$$\max \frac{\left| y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)} \right|}{15}. \qquad (2)$$

Решим пример 1 методом Рунге-Кутта. Результаты представим на рис. 7. Сначала задаются начальные значения, число точек интегрирования, правая часть дифференциального уравнения и функция RungeKutta(x0,xk,n,y0), решающая это уравнение по формулам (1). Затем задается функция Yrez, которая уточняет полученное решение по формуле (2) с заданной точностью.

$x0 := 0 \quad xk := 20 \quad y0 := 40 \quad n := 10 \quad eps := 0.001 \quad f(x,y) := x^2 \cdot \sin(x) - 3 \cdot y$

$$\mathrm{RungeKutta}(x0,xk,n,y0) := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow x0 \\ y_0 \leftarrow y0 \\ h \leftarrow \dfrac{xk - x0}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ k1_i \leftarrow h \cdot f(x_i, y_i) \\ k2_i \leftarrow h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k1_i}{2}\right) \\ k3_i \leftarrow h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k2_i}{2}\right) \\ k4_i \leftarrow h \cdot f(x_i + h, y_i + k3_i) \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + \dfrac{1}{6} \cdot (k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i) \end{array} \right. \\ Y^{\langle 0 \rangle} \leftarrow x \\ Y^{\langle 1 \rangle} \leftarrow y \\ Y \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Yrez} := \left| \begin{array}{l} eps \leftarrow eps \\ \text{for } m \in 0..1000000 \\ \quad \left| \begin{array}{l} y1 \leftarrow \mathrm{RungeKutta}(x0,xk,n,y0) \\ y2 \leftarrow \mathrm{RungeKutta}(x0,xk,2n,y0) \\ \text{for } k \in 0..n \\ \quad r_k \leftarrow \max\left(\dfrac{\left| y1_{k,1} - y2_{2k,1} \right|}{15}\right) \\ \text{break if } \max(r) < eps \\ n \leftarrow 2 \cdot n \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} y2 \\ n \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$\mathrm{Yrez}_1 = 160$

$n1 := \mathrm{Yrez}_1$

$y1 := \mathrm{RungeKutta}(x0,xk,n1,y0)$

$y2 := \mathrm{RungeKutta}(x0,xk,2n1,y0)$

$k := 0..n1$

$$r_k := \max\left(\frac{\left| y1_{k,1} - y2_{2k,1} \right|}{15}\right)$$

$\max(r) = 0.000208$

$$nn := 0, \frac{\mathrm{Yrez}_1}{5} .. (2\mathrm{Yrez})_1$$

$(\mathrm{Yrez}_0)_{nn,0}$	$(\mathrm{Yrez}_0)_{nn,1} =$
0	40
2	1.02
4	-2.409
6	-5.575
8	18.564
10	-8.042
12	-33.149
14	53.607
16	1.343
18	-90.862
20	91.3

Рис. 7. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 1 методом Рунге-Кутта

Как видим результаты вычислений по методу Рунге-Кутта, также совпали с точным решением, как и с помощью метода Эйлера. Однако, для того чтобы это совпадение произошло по методу Рунге-Кутта нам пришлось умешать шаг в 2048 раз меньше, чем с помощью метода Эйлера, что приводит к уменьшению ошибки округления и значительной экономии машинного времени.

Метод Рунге-Кутта легко переносится на нормальные системы дифференциальных уравнений вида

$$y_k'(x) = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad 1 \le k \le n,$$

которые для краткости удобно записывать в векторной форме

$$Y'(x) = F(x, Y),$$
$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

Для получения расчетных формул методом Рунге–Кутта достаточно в формулах (7) заменить y и $f(x,y)$ соответственно на Y и $F(x,Y)$, а коэффициенты k_j - на $K_j\ (j = 1,2,3,4)$.

Пример 3. Методом Рунге-Кутта на отрезке $[0,2]$ с точностью $eps = 0{,}0000001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_2 + \sin(x \cdot y_3), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = {y_1}^2, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_3 - y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = 1. \end{cases}$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 8.

$x0 := 0 \quad xk := 2 \quad eps := 0.0000001 \quad n := 10 \quad f(x,y) := \begin{bmatrix} -y_1 + \sin(x \cdot y_2) \\ (y_0)^2 \\ -y_2 - y_0 \end{bmatrix} \quad y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
RungeKutta(x0,xk,n,y0) := | x0 ← x0
                          | y0 ← y0
                          | h ← (xk − x0)/n
                          | for i ∈ 0..n − 1
                          |   | x(i+1) ← x(i) + h
                          |   | k1(i) ← h·f(x(i), y(i))
                          |   | k2(i) ← h·f(x(i) + h/2, y(i) + k1(i)/2)
                          |   | k3(i) ← h·f(x(i) + h/2, y(i) + k2(i)/2)
                          |   | k4(i) ← h·f(x(i) + h, y(i) + k3(i))
                          |   | y(i+1) ← y(i) + 1/6·(k1(i) + 2·k2(i) + 2·k3(i) + k4(i))
                          | Y<0> ← x
                          | Y<1> ← y
                          | Y
```

```
Yrez := | eps ← eps
        | for m ∈ 0..1000000
        |   | y1 ← RungeKutta(x0,xk,n,y0)
        |   | y2 ← RungeKutta(x0,xk,2n,y0)
        |   | for k ∈ 0..n
        |   |   r(k) ← max( |y1(k,1) − y2(2k,1)| / 15 )
        |   | break if max(r) < eps
        |   | n ← 2·n otherwise
        | (y2
        |  n)
```

$Yrez_1 = 40$

$n := 0, \frac{Yrez_1}{5} .. (2Yrez)_1$

$x(n) := (Yrez_0)_{n,0} \quad y1(n) := \left[(Yrez_0)_{n,1}\right]_0 \quad y2(n) := \left[(Yrez_0)_{n,1}\right]_1 \quad y3(n) := \left[(Yrez_0)_{n,1}\right]_2$

x(n) =	y1(n) =	y2(n) =	y3(n) =
0	1	0	1
0.2	0.995	0.199	0.638
0.4	0.964	0.393	0.344
0.6	0.889	0.566	0.113
0.8	0.764	0.704	-0.057
1	0.591	0.797	-0.17
1.2	0.382	0.846	-0.227
1.4	0.151	0.861	-0.234
1.6	-0.086	0.862	-0.197
1.8	-0.313	0.871	-0.124
2	-0.519	0.907	-0.025

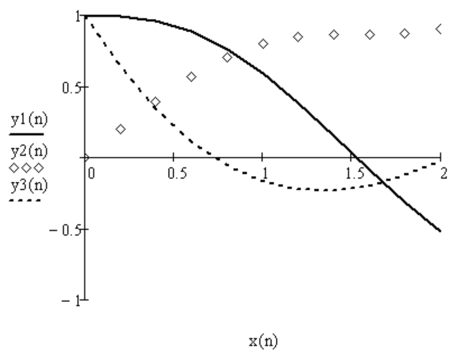

Рис. 8. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 3 методом Рунге-Кутта

Задание 3. .Методом Рунге-Кутта на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0{,}000001$ решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10}, \\ y_2(x_0) = y_{20}. \\ y_3(x_0) = y_{30} \end{cases}$$

Построить график решения. Исходные данные представлены в таблице 3.

Таблица 3

Номер варианта	$f_1(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_2(x, y_1, y_2, y_3)$ $f_3(x, y_1, y_2, y_3)$	x_0	x_k	y_{10} y_{20} y_{30}
1	$e^{y_3 - y_1}$ $\sin(x \cdot y_3)$ $\sqrt{x^2 + y_1^2 + y_2^2}$	1	3	2 -1 0

2	$2y_1^2+y_2\cdot y_3$ $y_1\cdot y_2\cdot y_3+y_1^3$ $\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}$	-1	0	-2 -7 2
3	$y_1\cdot y_2\cdot y_3$ $x^2\cdot y_2^2$ $\lg(x^2+y_1^2)$	0,2	2,2	0,1 -1 0,5
4	$\sin(y_1\cdot y_2\cdot y_3)$ $\ln(x^2+y_3^2)$ $e^{-y_1\cdot y_2\cdot y_3}$	1	5	1 1 1
5	$\cos(y_1\cdot y_2\cdot y_3)$ $y_1^2+y_2+y_3^2$ $\sin(y_1+y_3)$	1,5	3,5	0,7 1 -0,7
6	$sh(x\cdot y_1+y_2\cdot y_3)$ $ch(x\cdot y_1+y_2\cdot y_3)$ $\sin(y_1\cdot y_2+y_3)$	0,75	2	0,3 -1 0,4
7	$\ln(x^2+y_1^2)$ $arctg(x\cdot y_1\cdot y_3)$ $\sin(arctg(y_1\cdot y_3))$	-2	6	-2 -5 4
8	$\sin(x^2+y_1^2)$ $arctg(x\cdot y_1\cdot y_3)$ $\cos(arctg(y_1\cdot y_2))$	0	4	-1 -2 2
9	$-y_2+\cos(x\cdot y_3)$ y_1^3 $-\frac{y_3}{2}-2y_1^2$	1	5	0 0 0
10	$\frac{1}{2y_1^2+y_2\cdot y_3}$ $\frac{1}{y_1\cdot y_2\cdot y_3}$ $\sqrt{1+y_3^2}$	-3	1	1 3 1
11	$\cos(y_1\cdot y_2\cdot y_3)$ $e^{x\cdot y_1\cdot y_3}$ $\sin(y_1\cdot y_2\cdot y_3)$	1	5	-2 1 3
12	$e^{\sin(y_1\cdot y_2\cdot y_3)}$ $y_1^2+y_2+y_3$ $\cos(y_1+y_3)$	0,6	2,6	0,5 0,75 -0,5

13	$\ln(x\cdot y_1+y_2\cdot y_3)$ $\lg(x\cdot y_1\cdot y_2+y_3)$ $\cos(y_{1.}\cdot y_2+y_3)$	0	4	0,75 0,5 1
14	$e^{x\cdot y_1+y_2\cdot y_3}$ $\sqrt{x\cdot y_1\cdot y_2+y_3}$ $\sin(y_1\cdot y_2+y_3)$	0	1	0 0,5 0
15	$\ln(x^2+y_1{}^2)$ $arctg(x\cdot y_1\cdot y_3)$ $\sin(arctg(y_1\cdot y_2))$	-3	3	-1 -7 2
16	$\frac{1}{2+e^{y_1\cdot y_2}}$ $\frac{1}{2+\sin(y_1\cdot y_3)}$ $\frac{3}{3+\cos(y_1\cdot y_2\cdot y_3)}$	-1	3	-1 0,5 1.3
17	$\sqrt{x^2+y_2{}^2}$ $e^{arctg(x\cdot y_1\cdot y_3)}$ $\cos(arctg(y_1\cdot y_3))$	-4	2	-3 6 -4
18	$e^{x\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2+y_2{}^2}}$ $\cos(x^2+y_3{}^2)$	0,9	2,2	0,1 0,2 0,3
19	$\sqrt[4]{y_1\cdot y_2\cdot y_3}$ $\sqrt[3]{x\cdot y_1\cdot y_3}$ $\sin(y_1\cdot y_2\cdot y_3)$	2	4	2 0 3
20	$-y_2+\sin(x\cdot y_3)$ $y_1{}^3$ $-y_3-y_1{}^2$	1	5	0 1 1