

Расчетно-графическое задание по механике: «Кинематика материальной точки»

Задание. Уравнение движения материальной точки имеет следующий вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}(A \cdot t^a + B \cdot t^b) + \vec{j}(C \cdot t^c + D \cdot t^d), \quad (1)$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор материальной точки; \vec{i} – единичный вектор, задающий направление оси (Ox) в прямоугольной системе координат; \vec{j} – единичный вектор, задающий направление оси (Oy) в той же системе координат; A, B, C, D – размерные параметры движения; a, b, c, d – безразмерные параметры движения. Уравнение записано в СИ. Значения параметров движения приведены в таблице 1 в соответствии с номером варианта индивидуального задания (номер варианта соответствует номеру по списку студентов в журнале старосты группы).

1. Рассчитать следующие значения кинематических параметров движения материальной точки для момента времени t_0 (приведено в таблице 1):

- мгновенной скорости \vec{v} ;
- полного ускорения \vec{a} ;
- тангенциального ускорения \vec{a}_τ ;
- нормального ускорения \vec{a}_n ;
- радиус окружности, касательной к траектории.

2. Построить график траектории движения материальной точки для интервала времени $[0, 10]$ с.

3. Содержание отчета:

- титульный лист;
- формулировка задания в соответствии с номером варианта индивидуального задания;
- выводы формул для кинематических параметров по п.1;
- примеры численных расчетов кинематических параметров по п.1;
- единицы измерения размерных параметров A, B, C, D в системе интернациональной (СИ);
- график траектории движения материальной точки;
- выводы (в выводах должны быть приведены численные значения кинематических параметров).

Таблица 1

Значения параметров уравнения движения материальной точки

№	$A, ?$	$B, ?$	$C, ?$	$D, ?$	a	b	c	d	t_0, c
1	10	-2	5	3	1	3	2	3	2
2	5	-1	1	0	1	5/2	2	-7/3	4
3	0	-10	1	20	-8/3	9/4	3	1	1
4	6	2	2	-20	2	3	3	1	3
5	-10	2	3	15	1	3	3	1	5
6	2	-20	0	1	7/3	1	-8/3	3	7
7	2	-2	0	-20	8/3	2	4	1	6
8	-10	1	10	-1	1	3	1	3	10
9	5	0	-1	5	9/4	-9/4	3	2	4
10	8	2	-8	1	1	3	1	2	9
11	0	20	-1	40	-1/2	7/2	3	1	2
12	10	5	2	50	1	2	3	0	8
13	5	0	20	2	7/3	7/3	1	3	5
14	1	-2	-5	20	3	2	1	0	7
15	0	5	-15	2	-3/2	5/2	1	3	3

№	A, ?	B, ?	C, ?	D, ?	a	b	c	d	t ₀ , с
16	10	1	-10	0,5	1	3	1	3	9
17	5	2	0	2	3	2	-7/3	7/3	4
18	50	-1	4	10	0	3	2	1	7
19	10	0	8	-5	8/3	-8/3	3	1	6
20	-0,2	1	0,1	-20	3	2	3	0	8
21	10	2	-2	15	1	3	3	1	3
22	0	2	4	10	1/2	5/2	2	1	7
23	1	100	10	-50	3	0	2	0	3
24	5	2	1	0	2	3	7/3	1/3	8
25	2	20	50	-1	3	1	0	3	4
26	4	-20	0,5	3	5/2	1	2	7/3	5

Пример выполнения расчетно-графического задания для варианта №26.

В соответствии с вариантом №26 безразмерные параметры равны: $a = 5/2, b = 1, c = 2, d = 7/3$; размерные параметры - $A = 4 \frac{м}{с^{5/2}}, B = -20 \frac{м}{с}, C = 0,5 \frac{м}{с^2}, D = 3 \frac{м}{с^{7/3}}$ (размерность параметров должна соответствовать уравнению движения). Расчеты кинематических параметров проведем для момента времени $t_0 = 5с$.

Таким образом, уравнение (1) примет следующий вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}(4 \cdot t^{5/2} - 20 \cdot t) + \vec{j}(0,5 \cdot t^2 + 3 \cdot t^{7/3}), \text{ м.} \quad (2)$$

Уравнение для мгновенной скорости:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i}(10 \cdot t^{3/2} - 20) + \vec{j}(t + 7 \cdot t^{4/3}), \text{ м/с.} \quad (3)$$

Модуль мгновенной скорости:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(10 \cdot t^{3/2} - 20)^2 + (t + 7 \cdot t^{4/3})^2} = \sqrt{(10 \cdot 5^{3/2} - 20)^2 + (5 + 7 \cdot 5^{4/3})^2} = 112,4 \text{ м/с.}$$

Уравнение для полного ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{i}(15 \cdot t^{1/2}) + \vec{j}(1 + 28/3 \cdot t^{1/3}), \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

Модуль полного ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{225t + (1 + 28/3 \cdot t^{1/3})^2} = \sqrt{225 \cdot 5 + (1 + 28/3 \cdot 5^{1/3})^2} = 37,6 \text{ м/с}^2.$$

Модуль тангенциального ускорения:

$$\begin{aligned} |\vec{a}_\tau| &= \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{(10 \cdot t^{3/2} - 20)^2 + (t + 7 \cdot t^{4/3})^2}\right)}{dt} = \\ &= \frac{150(t^{3/2} - 2)t^{1/2} + 28/3(t + 7t^{4/3})t^{1/3}}{\sqrt{(10 \cdot t^{3/2} - 20)^2 + (t + 7 \cdot t^{4/3})^2}} = \\ &= \frac{150(5^{3/2} - 2)5^{1/2} + 28/3(5 + 7 \cdot 5^{4/3})5^{1/3}}{\sqrt{(10 \cdot 5^{3/2} - 20)^2 + (5 + 7 \cdot 5^{4/3})^2}} = 36,6 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Модуль нормального ускорения:

$$|\vec{a}_n| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}_\tau|^2} = \sqrt{37,6^2 - 36,6^2} = 8,6 \text{ м/с}^2.$$

Радиус окружности, касательной к траектории:

$$R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_n|} = \frac{112,4^2}{8,6} = 1,47 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Построим график траектории движения материальной точки. Согласно уравнению (2) выражения для координат имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= 4 \cdot t^{5/2} - 20 \cdot t, \text{ м;} \\ y &= 0,5 \cdot t^2 + 3 \cdot t^{7/3}, \text{ м.} \end{aligned} \quad (5)$$

Расчет координат проведем для 11 значений моментов времени, заключенных в интервале $[0, 10]$, с. Результаты расчетов сведены в таблицу 2.

Таблица 2

Результаты расчетов координат промежуточных точек траектории

$t, \text{ с}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x, \text{ м}$	0	-16	-17,4	2,4	48	124	233	379	564	792	1065
$y, \text{ м}$	0	3,5	17,1	43,4	84,2	141	214	306	416	546	696

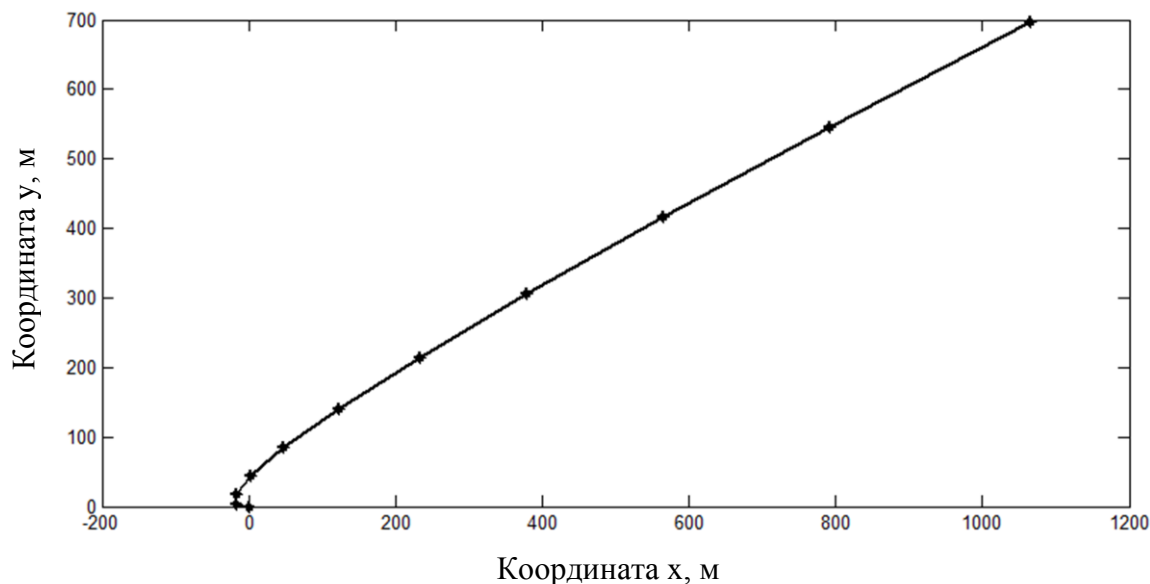


Рисунок. - График траектории движения материальной точки

Выводы. В момент времени $t_0 = 5\text{ с}$ модуль мгновенной скорости - 112,4 м/с, модуль полного ускорения - 37,6 м/с², модуль тангенциального ускорения - 36,6 м/с², модуль нормального ускорения - 8,6 м/с², радиус окружности, касательной к траектории - $1,47 \cdot 10^3$ м.