ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9.

Тема: **Программирование в MathCAD. Оператор цикла while.**

Оператор **while** служит для организации циклов, действующих до тех пор, пока выполняется некоторое Условие. Этот оператор записывается в виде:

while Условие

Выполняемое выражение записывается на место шаблона.

1. Вычисление предела последовательности.

Последовательность $\{X_n\}$ определена следующим образом: $X_n = \dfrac{n^2+2}{3\cdot n^2-n+1}$, $n=1,2,3,\ldots$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2}{3\cdot n^2-n+1}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$.

```
X := | x0 ← 1
     | ε ← 0.00001
     | n ← 1
     | X1 ← 1/9
     | while |X1 − X0| > ε
     |     | X0 ← X1
     |     | X1 ← (n^2 + 2)/(3·n^2 − n + 1)
     |     | n ← n + 1
     | X1
```

X = 0.334

2. Вычисление бесконечной суммы.

Составить программу вычисления суммы $Y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$.Вычисления остановить при выполнении условия $\dfrac{n}{2^n}<\varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}001$.

```
Y := | Y0 ← 0
     | ε ← 0.001
     | n ← 1
     | a ← 0.5
     | while a > ε
     |     | a ← n/2^n
     |     | Y0 ← Y0 + a
     |     | n ← n + 1
     | Y0
```

Y = 1.999

3. Вычисление суммы бесконечного ряда с использованием рекуррентной формулы

Для вычисления на компьютере сумм бесконечного ряда часто используют рекуррентные формулы, с помощью которых друг за другом вычисляют значения членов бесконечной последовательности. Как правило, рекуррентные формулы программист должен составить сам. Часто рекуррентная формула для бесконечного ряда находится путем деления соседних членов ряда друг на друга.

Составить программу вычисления суммы $Y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} X^{2i}$. Вычисления ряда окончить при выполнении условия $\left| \frac{X^{2i}}{(2i)!} \right| < \varepsilon$**.** Вычисления провести для: $\varepsilon = 0{,}001$; $X = 0{,}86$ и $X = 1{,}5$.

Из соответствующих разделов математики известно, что суммой ряда называется предел, к которому стремится последовательность частичных сумм данного ряда, если он существует. Если такой предел существует, то ряд называется сходящимся, в противном случае - расходящимся. Также известно, что знакопеременный ряд сходится, если $|r_n| > |r_{n+1}|$, где r_n и r_{n+1} - соответственно n-й и n+1-й члены ряда.

Кроме того, доказано, что $|S - S_n| \le |r_{n+1}|$, где S - сумма ряда, а S_n - сумма n членов ряда.

Следовательно, для получения требуемого результата будем накапливать частичную сумму элементов ряда, пока очередной член ряда не станет меньше заданной погрешности: $|r_n| < \varepsilon$.

Для решения нашей задачи необходимо использовать рекуррентную формулу.

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{, где } A_i = \frac{(-1)^i}{(2i)!} X^{2i}.$$

Тогда условие окончания вычислений выглядит так: $|A_i| < \varepsilon$.

Найдем рекуррентную формулу. Для этого поделим два соседних члена A_i, A_{i-1}.

$$\frac{A_i}{A_{i-1}} = \frac{\frac{(-1)^i}{(2i)!}}{\frac{(-1)^{i-1}}{(2\cdot(i-1))!}} \frac{X^{2i}}{X^{2\cdot(i-1)}} = -\frac{X^2}{2\cdot i\cdot(2\cdot i-1)}.$$

Отсюда находится рекуррентная формула: $A_i = -\frac{X^2}{2\cdot i\cdot(2\cdot i-1)} \cdot A_{i-1}; i = 2,3,\ldots \quad A_1 = -\frac{X^2}{2}$..

```
Y := | Y0 ← 0
     | ε ← 0.001
     | X ← 0.86
     | i ← 1
     | a ← -X^2/2
     | while |a| > ε                  if |X| < 1
     |   | a ← -X^2/(2·i·(2·i − 1))·a
     |   | Y0 ← Y0 + a
     |   | i ← i + 1
     | Y0 ← "ðÿä ðàñõîäèòñÿ"  otherwise
     | Y0
```

$Y = 0.129$

```
Y := | Y0 ← 0
     | ε ← 0.001
     | X ← 1.5
     | i ← 1
     | a ← -X^2/2
     | while |a| > ε                  if |X| < 1
     |   | a ← -X^2/(2·i·(2·i − 1))·a
     |   | Y0 ← Y0 + a
     |   | i ← i + 1
     | Y0 ← "ðÿä ðàñõîäèòñÿ"  otherwise
     | Y0
```

Y = "ðÿä ðàñõîäèòñÿ"

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Составить программу для вычисления предела последовательности $\{X_n\}$. Вычисления провести с точностью ε. Исходные данные приведены в табл.1.

Таблица 1

Вариант	$\{X_n\}$	ε.
1	$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+3}+2\cdot\sqrt{n^2-1}}$, $n=1,2,3\ldots$	0,001
2	$\dfrac{\sin(n)-a\tan(n)}{n^3}$, $n=1,2,3\ldots$	0,0001
3	$\dfrac{1}{n(n^2+1/4)}$, $n=1,2,3\ldots$	0,0001
4	$\dfrac{\sin(3\cdot n)}{\ln(1+2\cdot n)^2}$, $n=1,2,3\ldots$	0,0001
5	$\dfrac{n^3}{n^2-3\cdot\sqrt{n^6+2}}$, $n=1,2,3\ldots$	0,001
6	$\dfrac{2\cdot n+1}{\left[(2\cdot n+1)^2+1/4\right]^2}$, $n=1,2,3\ldots$	0,00001
7	$\dfrac{5}{n^2+3}$, $n=1,2,3\ldots$	0,0001

8	$\dfrac{2\cdot n+1}{\left[(2\cdot n+1)^2-1/4\right]^2}$, $n=1,2,3\ldots$	0,001
9	$\dfrac{1}{n(n^2+1)}$, $n=1,2,3\ldots$	0,01
10	$\dfrac{2\cdot n+1}{\left[(2\cdot n+1)^2+1\right]^2}$, $n=1,2,3\ldots$	0,001
11	$\dfrac{1}{n(n^2-1/4)}$, $n=1,2,3\ldots$	0,00001
12	$\dfrac{n}{(n^2+1)^2}$, $n=1,2,3\ldots$	0,0001
13	$\dfrac{n}{(n^2+1/4)^2}$, $n=1,2,3\ldots$	0.001
14	$\dfrac{1}{n(n^2-1/9)}$, $n=1,2,3\ldots$	0,01
15	$\dfrac{n}{(n^2-1/4)^2}$, $n=1,2,3\ldots$	0,001

Задача 2. Разработать программу, определяющую сумму ряда $S=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ для значений x с точностью ε. Исходные данные приведены в табл.2.

Таблица 2

Вариант	$f(k)$	ε.
1	$\dfrac{1}{(k+1)(2k+1)}$	0,001
2	$\dfrac{1}{(k+1)(8k+3)}$	0,001
3	$\dfrac{(-1)^k}{(3k+2)(6k+1)}$	0,0001
4	$\dfrac{(-1)^k}{(k+1)(3k+2)}$	0,0001
5	$\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)(4k+1)}$	0,0001
6	$\dfrac{1}{(2k+1)(4k+7)}$	0,001

7	$\dfrac{1}{(k+1)(8k+5)}$	0,0001
8	$\dfrac{(-1)^k}{(k+1)(4k+1)}$	0,001
9	$\dfrac{1}{(2k+1)(4k+5)}$	0,01
10	$\dfrac{(-1)^{\text{л}}}{(3k+1)(6k+5)}$	0,0001
11	$\dfrac{1}{(3k+2)(3k+4)}$	0,0001
12	$\dfrac{(-1)^k}{(3k+2)(3k+4)}$	0,0001
13	$\dfrac{1}{(3k+1)(6k+1)}$	0.001
14	$\dfrac{1}{(4k+1)(4k+5)}$	0,001
15	$\dfrac{(-1)^k}{(k+1)(4k+3)}$	0,0001

Задача 3. Разработать программу, определяющую сумму ряда $S=\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)$ для значений x с точностью ε. Исходные данные приведены в табл.3.

Указание: предварительно необходимо составить рекуррентную формулу.

Таблица 3

Вариант	$f(x_n\}$	x	$\varepsilon.$
1.	$\dfrac{x^n}{(n+1)!}$	0,45 и 2,83	0,01
2.	$\dfrac{1}{n!}x^n$	0,76 и 1,65	0,0001
3.	$\dfrac{1}{(3n+1)!}x^n$	0,21 и 4,97	0,01
4.	$\dfrac{(-1)^n}{(2n+3)!}x^n$	0,29 и 1,54	0,00001
5.	$\dfrac{1}{n!(n+1)}x^{n+1}$	0,44 и 5,71	0,001

6.	$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	0,19 и 2,13	0,00001
7.	$\frac{1}{(n+2)!}x^n$	0,84 и 3,11	0,001
8.	$\frac{(-1)^n}{(4n+1)!}x^{4n+1}$	0,91 и 1,34	0,001
9.	$\frac{1}{(3n+2)!}x^{2n+2}$	0,37 и 2,83	0,0001
10.	$\frac{x^n}{(n+2)!}$	0,05 и 2,83	0,00001
11.	$\frac{x^n}{(n+4)!}$	0,13 и 6,07	0,01
12.	$\frac{1}{(3n+1)!}x^{3n+1}$	0,82 и 1,43	0,001
13.	$\frac{(-1)^n}{(6n+1)!}x^{3n+1}$	0,66 и 9,54	0.0001
14.	$\frac{(-1)^n}{(4n+3)!}x^{4n+3}$	0,44 и 7,22	0,00001
15.	$\frac{x^n}{(n+3)!}$	0,25 и 4,15	0,01