

**Зада н и е Д.26. Исследование вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы**

Механическая система с двумя степенями свободы находится под действием силового гармонического возмущения в виде силы  $P = P_0 \cos pt$  или момента  $M = M_0 \cos pt$ . Пренебрегая сопротивлением, исследовать вынужденные колебания системы.

Схемы механических систем в положении покоя показаны на рис. 232—234. Необходимые сведения об инерционных и упругих свойствах системы, а также ее размеры приведены в табл. 61. Массами пружин и скручиваемых валов пренебречь.

В табл. 64 указано, к какому из тел системы приложена возмущающая сила  $\vec{P}$  или пара сил с моментом  $\vec{M}$ . Линия действия силы  $\vec{P}$  во всех случаях проходит через центр тяжести тела, к которому она приложена. В процессе колебаний линия действия силы остается либо вертикальной, либо горизонтальной.

Пара сил с моментом  $\vec{M}$  расположена в плоскости колебаний тела, к которому она приложена. Во всех вариантах положительное направление силы  $\vec{P}$  и момента  $\vec{M}$ , изменяющихся по гармоническому закону, можно выбирать произвольно.

В табл. 64 задано линейное или угловое смещение от положения покоя для тела, к которому приложено силовое возмущение при условии воздействия постоянной силы  $P = P_0$  или момента  $M = M_0$

Таблица 64

Номер варианта (рис. 232—234)	Вид возмущения	Номер тела, к которому приложено возмущение	Линия действия силы $\vec{P}$	Линейное смещение при $P = P_0$ , м	Угловое смещение при $M = M_0$ , рад
1	M	1	-	-	0,01
2	M	3	-	-	0,01
3	P	1	Вертикальна	0,002	-
4	M	2	-	-	0,005
5	M	1	-	-	0,02
6	P	1	Горизонтальна	0,001	-
7	P	1	»	0,002	-
8	P	1	»	0,001	-
9	M	1	-	-	0,005
10	M	1	-	-	0,01
11	P	1	Вертикальна	0,001	-
12	P	1	»	0,002	-
13	P	3	Горизонтальна	0,003	-
14	P	2	Вертикальна	0,001	-
15	M	1	-	-	0,01
16	M	1	-	-	0,02
17	M	2	-	-	0,005
18	P	2	Горизонтальна	0,002	-
19	M	1	-	-	0,005
20	P	2	Вертикальна	0,001	-
21	M	1	-	-	0,01
22	M	2	-	-	0,005
23	P	1	Горизонтальна	0,003	-
24	M	1	-	-	0,01
25	P	2	Вертикальна	0,005	-
26	M	1	-	-	0,02
27	P	1	Горизонтальна	0,004	-
28	P	1	»	0,003	-
29	P	2	»	0,002	-
30	M	1	-	-	0,005

(случай нулевой частоты изменения возмущения силы или момента). Для систем, находящихся под действием силы, смещение задается вдоль линии ее действия, а для систем, находящихся под действием пары сил, задается угловое смещение в плоскости действия этой пары сил.

**Пример выполнения задания.** Пренебрегая сопротивлением, исследовать вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы, изображенной в положении покоя (рис. 246). Колебания происходят под действием пары сил, приложенной к стержню  $DE$  и расположенной в плоскости чертежа. Момент возмущающей пары изменяется по закону

$$M = M_0 \cos pt.$$

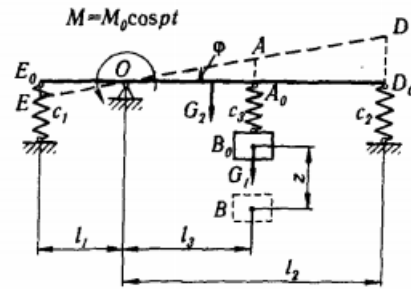


Рис. 246

Дано: массы элементов системы  $m_1 = 0,5$  кг,  $m_2 = 3$  кг, коэффициенты жесткости пружин (Н/см):  $c_1 = 60$ ,  $c_2 = 40$ ,  $c_3 = 40$ ; линейные размеры (см):  $l_1 = 20$ ,  $l_2 = 60$ ,  $l_3 = 30$ . Угол поворота стержня  $DE$  под действием пары сил с постоянным моментом  $M = M_0$  равен  $\varphi = 0,01$  рад.

Решение. За обобщенные координаты примем:  $z$  — вертикальное смещение груза от положения покоя и  $\varphi$  — угол поворота рычага  $DE$  от положения покоя.

На рис. 246 пунктиром показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

Уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z} + Q_z; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi, \quad (1)$$

где  $Q_z$  и  $Q_\varphi$  — обобщенные возмущающие силы.

Выражения для кинетической и потенциальной энергии получены в примере к заданию Д.24, где исследовались свободные колебания рассматриваемой системы:

$$\left. \begin{aligned} T &= 1/2 a_{11} \dot{z}^2 + a_{12} \dot{z} \dot{\varphi} + 1/2 a_{22} \dot{\varphi}^2; \\ \Pi &= 1/2 c_{11} z^2 + c_{12} z \varphi + 1/2 c_{22} \varphi^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $a_{ij}$  и  $c_{ij}$  — коэффициенты инерции и жесткости системы, равные:  $a_{11} = m_1 = 0,5$  кг,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = J_0 = 0,28$  кг·м<sup>2</sup>;  $c_{11} = c_3 = 4000$  Н/м,  $c_{12} = c_{21} = c_3 l_3 = 1200$  Н;  $c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 = 2040$  Н·м.

Частоты свободных колебаний и соответствующие коэффициенты распределения получены в примере к заданию Д.24:

$$k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}; \quad \mu_1 = -1,49 \text{ рад/м}; \quad k_2 = 104 \text{ с}^{-1}; \quad \mu_2 = 1,2 \text{ рад/м}.$$

Определим обобщенные силы  $Q_z$  и  $Q_\varphi$ , увязанные с действием возмущающего момента:

$$Q_z = \delta A_{Mz} / (\delta z); \quad Q_\varphi = \delta A_{M\varphi} / (\delta \varphi), \quad (4)$$

где  $\delta A_{M_z}$  — элементарная работа возмущающего момента на перемещении системы, вызванном элементарным приращением обобщенной координаты  $z$  при  $\varphi = \text{const}$ ;  $\delta A_{M_\varphi}$  — элементарная работа возмущающего момента на перемещении системы, вызванном элементарным приращением обобщенной координаты  $\varphi$  при  $z = \text{const}$ ;  $\delta z$ ,  $\delta\varphi$  — элементарные приращения обобщенных координат.

Если принять направление возмущающего момента при  $t = 0$  положительным и считать, что оно совпадает с направлением отсчета положительных значений угла  $\varphi$ , то из соотношений (4) получаем

$$Q_z = 0;$$

$$Q_\varphi = M_0 \cos pt.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения (1), описывающие вынужденные колебания системы в обобщенных координатах  $z$  и  $\varphi$ , имеют вид

$$a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi = 0; \quad a_{22}\ddot{\varphi} + c_{21}z + c_{22}\varphi = M_0 \cos pt. \quad (5)$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений (5), определяющее вынужденные колебания, находим в виде

$$z = A_z \cos pt, \quad \varphi = A_\varphi \cos pt.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения (5), получаем

$$(c_{11} - a_{12}p^2)A_z + c_{12}A_\varphi = 0; \quad c_{21}A_z + (c_{22} - a_{22}p^2)A_\varphi = M_0.$$

Из этой системы двух алгебраических уравнений относительно  $A_z$  и  $A_\varphi$  находим:

$$A_z = M_0 c_{12} / [(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - c_{12}^2], \quad (6)$$

$$A_\varphi = M_0 (c_{11} - a_{11}p^2) / [(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - c_{12}^2]. \quad (7)$$

Амплитуды вынужденных колебаний равны абсолютным значениям  $A_z$  и  $A_\varphi$ . Воспользуемся формулой (7) для определения амплитуды  $M_0$  возмущающего момента. По условию задачи при  $p = 0$  угол поворота стержня  $DE$  равен  $\varphi_0$ ; следовательно, при  $p = 0$

$$A_{\varphi_0} = \varphi_0 = M_0 c_{11} / (c_{11}c_{22} - c_{12}^2),$$

откуда  $M_0 = \varphi_0 (c_{22} - c_{12}^2 / c_{11}) = 16,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Перемещение груза под действием постоянного момента  $M = M_0$ , приложенного к стержню  $DE$ , можно найти из соотношения (6) при  $p = 0$ :

$$A_{z0} = z_0 = -M_0 c_{12} / (c_{11}c_{22} - c_{12}^2); \quad A_{z0} = -0,003 \text{ м}.$$

Так как знаменатель в формулах (6) и (7) является квадратным многочленом относительно  $p^2$ , а корнями этого многочлена являются

квадраты частот свободных колебаний системы  $k_1^2$  и  $k_2^2$ , то формулы (6) и (7) можно представить в виде

$$A_z = -\frac{M_0 c_{12}}{a_{11} a_{22} (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} = -\frac{144000}{(p^2 - 4414)(p^2 - 10870)}; \quad (8)$$

$$A_\varphi = \frac{M_0(c_{11} - a_{11}p^2)}{a_{11} a_{22} (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} = \frac{120(4000 - 0,5p^2)}{(p^2 - 4414)(p^2 - 10870)}. \quad (9)$$

Формулы (6), (7) или (8), (9) позволяют проследить за зависимостью  $A_z$  и  $A_\varphi$  от частоты  $p$  и построить соответствующие графики (рис. 247, а, б).

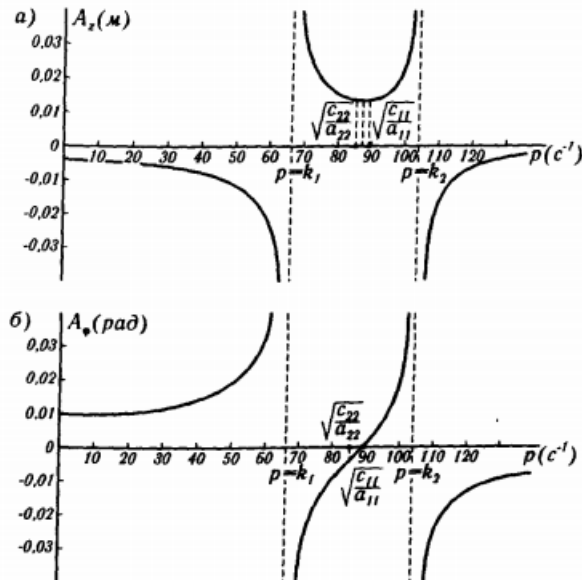


Рис. 247

Рассмотрим поведение  $A_z$  и  $A_\varphi$  для трех интервалов изменения циклической частоты возмущающего момента:

$$0 \leq p < k_1, \quad k_1 < p < k_2 \text{ и } k_2 < p < \infty.$$

1.  $0 \leq p < k_1$ . Так как  $k_1 < k_2$ , то  $p^2 - k_1^2 < 0$  и  $p^2 - k_2^2 < 0$ ; следовательно, знаменатель формул (8) и (9) положителен. Из этого вытекает, что в первом интервале  $A_z < 0$  и  $A_\varphi > 0$ . С ростом величины  $p$  амплитуды колебаний стержня и груза возрастают, при этом колебания стержня происходят в одной фазе с изменением возмущающего момента, а колебания груза — в противофазе (рис. 248, а).

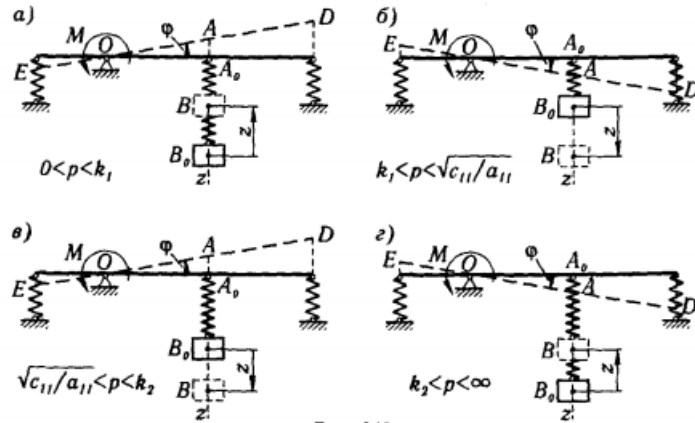


Рис. 248

При  $p = 0$  имеем  $A_\varphi = \varphi_0 = 0,01$  рад и  $A_z = z_0 = -0,03$  м.

При  $p = k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}$  в системе наступает первый резонанс и функции  $A_z$  и  $A_\varphi$  претерпевают бесконечный разрыв (см. рис. 247).

2.  $k_1 < p < k_2$ . Так как  $k_1 < k_2$ , то  $p^2 - k_1^2 > 0$ , а  $p^2 - k_2^2 < 0$ . Следовательно, знаменатель формул (8) и (9) отрицателен. Из этого следует, что во втором интервале  $A_z > 0$ , т. е. колебания груза происходят синфазно с изменением возмущающего момента (рис. 248, б, в).

При определении знака функции  $A_\varphi$  необходимо рассмотреть числитель формулы (9). Если  $k_1 < p < \sqrt{c_{11}/a_{11}}$ , то  $A_\varphi < 0$  и колебания стержня происходят в противофазе с возмущающим моментом (рис. 248, б). Если  $\sqrt{c_{11}/a_{11}} < p < k_2$ , то  $A_\varphi > 0$  и колебания стержня, так же как и груза, синфазны с изменением  $M$  (рис. 248, в).

При  $p = \sqrt{c_{11}/a_{11}} = \sqrt{4000/0,5} = 89,4 \text{ с}^{-1}$  первая парциальная частота (частота собственных колебаний системы, изображенной на рис. 249, а) амплитуды вынужденных колебаний стержня равна нулю ( $A_\varphi = 0$  — случай антрирезонанса). В этом случае груз массой  $m_1$  может рассматриваться как гаситель колебаний стержня. Величину  $A_z$  в этом режиме проще определить по формуле (6):  $A_z = M_0/c_{12}$ ;  $A_z = 0,014$  м.

Амплитуда колебаний стержня  $|A_z|$  убывает до нуля при возрастании  $p$  от  $k_1$  до  $\sqrt{c_{11}/a_{11}}$ , а затем с увеличением  $p$  от  $\sqrt{c_{11}/a_{11}}$  до  $k_2$  возрастает. При  $p = \sqrt{c_{22}/a_{22}} = 2040/0,28 = 85,4 \text{ с}^{-1}$ , т. е. при второй парциальной частоте (частоте собственных колебаний системы, изображенной на рис. 249, б), амплитуды вынужденных колебаний  $A_z$  и  $A_\varphi$ , определяемые по формулам (6) и (7) равны:

$$A_z = M_0/c_{12}; \quad A_z = 0,014 \text{ м};$$

$$A_\varphi = -M_0(c_{11} - a_{11}c_{22}/a_{22})/c_{12}^2; \quad A_\varphi = -0,00414 \text{ м}.$$

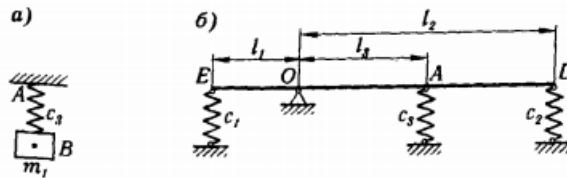


Рис. 249

При изменении  $p$  в интервале от  $k_1$  до  $k_2$  функция  $A_z$  для амплитуды вынужденных колебаний груза имеет минимум, соответствующий максимуму знаменателя формул (6) и (7). Взяв от этого выражения производную по  $p$  и приравняв ее нулю, получим

$$2a_{11}a_{22}p^2 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11}) = 0,$$

откуда найдем значение  $p$ , при котором  $A_z$  достигает минимума:

$$p = \sqrt{0,5(c_{22}/a_{22} + c_{11}/a_{11})} = 87,4 \text{ с}^{-1}. \quad (10)$$

При  $p = k_2 = 104 \text{ с}^{-1}$  в системе наступает второй резонанс. 3.  $k_2 < p < \infty$ . Так как  $k_1 < k_2$ , то  $p^2 - k_1^2 > 0$  и  $p^2 - k_2^2 > 0$ ; следовательно, знаменатель формул (8) и (9) положителен. Учитывая, что  $k_2 > \sqrt{c_{11}/a_{11}}$ , можно заключить, что в этом интервале и  $A_z < 0$ , и  $A_\varphi < 0$ , т. е. колебания происходят в противофазе с возмущающим моментом (см. рис. 248, з). С возрастанием  $p$  амплитуды вынужденных колебаний  $|A_z|$  и  $|A_\varphi|$  уменьшаются, стремясь к нулю.

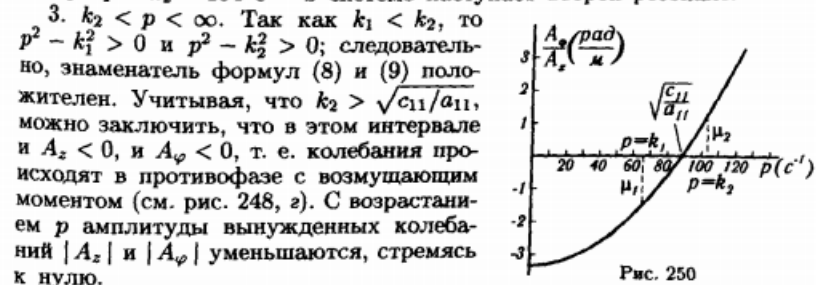


Рис. 250

Отношение функций  $A_\varphi$  и  $A_z$ , определяющих амплитуды вынужденных колебаний, получим, разделив (9) и (8):

$$A_\varphi/A_z = -(c_{11} - a_{11}p^2)/c_{12} = -(4000 - 0,5p^2)/1200. \quad (11)$$

При  $p = 0$   $A_\varphi/A_z = -c_{11}/a_{12}$ ;  $A_\varphi/A_z = -3,33 \text{ рад/м}$ . При  $p = k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}$   $A_\varphi/A_z = \mu_1 = -1,49 \text{ рад/м}$ . При  $p = \sqrt{c_{11}/a_{11}} = 89,4 \text{ с}^{-1}$   $A_\varphi/A_z = 0$ . При  $p = k_2 = 104 \text{ с}^{-1}$ ;  $A_\varphi/A_z = \mu_2 = 1,2 \text{ рад/м}$ .

График зависимости  $A_\varphi/A_z$  от частоты возмущения  $p$  показан на рис. 250. При резонансах формы вынужденных и свободных колебаний совпадают (см. рис. 247).

Для исследования резонансных колебаний ( $p = k_1$  и  $p = k_2$ ) осуществим переход к главным координатам системы:  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Они связаны с координатами  $z$  и  $\varphi$  соотношениями

$$z = \eta_1 + \eta_2; \quad \varphi = \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2. \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения колебаний механической системы с двумя степенями свободы в главных координатах  $\eta_1$  и  $\eta_2$  при обобщенных возмущающих силах  $Q_1 = H_1 \sin(pt + \delta)$ ;  $Q_2 = H_2 \sin(pt + \delta)$ , соответствующих обобщенным координатам  $q_1$  и  $q_2$ , имеют вид

$$\ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 = \frac{H_1 + \mu_1 H_2}{a_1} \sin(pt + \delta), \quad (13)$$

$$\ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 = \frac{H_1 + \mu_2 H_2}{a_2} \sin(pt + \delta), \quad (14)$$

где  $a_1 = a_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2$ ;  $a_2 = a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — коэффициенты распределения обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  при свободных колебаниях.

В данном случае  $H_1 = 0$ ;  $H_2 = M_0$ ;  $\delta = \pi/2$ .

Поэтому дифференциальные уравнения (13) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 &= \frac{\mu_1 M_0}{a_1} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right); \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 &= \frac{\mu_2 M_0}{a_2} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

При  $p = k_1$  (первый резонанс) частный интеграл первого дифференциального уравнения системы (15) имеет вид

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t.$$

Частный интеграл второго дифференциального уравнения:

$$\eta_2 = \frac{\mu_1 M_0}{a_2(k_2^2 - k_1^2)} \sin\left(k_1 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Переходя к обобщенным координатам  $z$  и  $\varphi$ , по формулам (12) получаем

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\mu_1 M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t + \frac{\mu_2 M_0}{a_2(k_2^2 - k_1^2)} \cos k_1 t; \\ \varphi &= \frac{\mu_1^2 M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t + \frac{\mu_2^2 M_0}{a_2(k_2^2 - k_1^2)} \cos k_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При  $p = k_2$  (второй резонанс) частные интегралы дифференциальных уравнений (15) имеют вид

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 M_0}{a_1(k_1^2 - k_2^2)} \sin\left(k_2 t + \frac{\pi}{2}\right); \quad \eta_2 = \frac{\mu_2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t,$$

откуда обобщенные координаты  $z$  и  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\mu_2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t - \frac{\mu_1 M_0}{a_1(k_2^2 - k_1^2)} \cos k_2 t, \\ \varphi &= \frac{\mu_2^2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t - \frac{\mu_1^2 M_0}{a_1(k_2^2 - k_1^2)} \cos k_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Параметры, входящие в уравнения (16) и (17), имеют следующие числовые значения:  $M_0 = 16,8$  Н·м;  $\mu_1 = -1,49$  рад/м;  $\mu_2 = 1,2$  рад/м. Согласно (14)  $a_1 = 1,13$  кг;  $a_2 = 0,9$  кг.

Подставляя эти значения в формулы (16) и (17), получаем уравнения вынужденных колебаний при первом и втором резонансах.

Первый резонанс:  $p = k_1 = 66,4$  с<sup>-1</sup>;

$$z = -0,168t \sin 66,4t + 0,0035 \cos 66,4t;$$

$$\varphi = 0,252t \sin 66,4t + 0,0042 \sin 66,4t.$$

Второй резонанс:  $p = k_2 = 104$  с<sup>-1</sup>;

$$z = 0,108t \sin 104t + 0,0035 \cos 104t;$$

$$\varphi = 1,30t \sin 104t - 0,0052 \cos 104t.$$

Полученные результаты позволяют оценить колебания, происходящие в системе при резонансе в том случае, когда силы сопротивления незначительны, а резонансные режимы кратковременны.