

- 1 -
Задание 3

**РАСЧЕТ НАЧАЛЬНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ РЕАКЦИЙ
В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ**

Задача 3.1. Расчет цепи первого порядка

Для заданного варианта (см. Прил. I) выполнить следующее:

- рассчитать токи и напряжения в схеме до коммутации;
- определить начальные условия;
- рассчитать установившиеся токи и напряжения в схеме после коммутации;
- составить таблицу начальных и установившихся значений.

Пример 3.1. На рис. 3.1 дана схема электрической цепи.

Параметры цепи:

$$E = 60 \text{ В}, \quad C = 12,5 \text{ мкФ}, \quad R_0 = R_2 = 200 \text{ Ом}, \\ R_1 = 100 \text{ Ом}.$$

Определить начальные и установившиеся значения токов i_1 , i_2 , i_3 , напряжения U_C , записать их в таблицу.

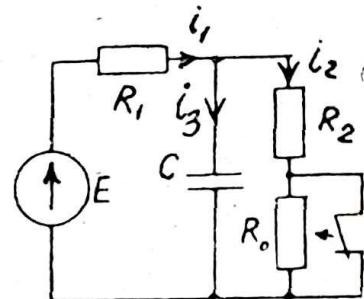


Рис. 3.1

Решение. Расчет установившегося режима до коммутации проводим для схемы рис. 3.2. Ток $i_3^- = 0$, так как в ветви с емкостью постоянный ток не проходит. Тогда

$$i_1^- = i_2^- = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,2 \text{ А},$$

и по закону напряжений Кирхгофа

$$R_2 i_2^- - U_C^- = 0,$$

откуда $U_C^- = R_2 i_2^- = 40 \text{ В}$.

В соответствии с законом коммутации независимое начальное условие $U_C^+ = U_C^- = 40 \text{ В}$.

Определяем остальные реакции в начальный момент времени $t = 0^+$ по схеме (рис. 3.3) образующейся после коммутации. По законам Кирхгофа

$$U_C^+ - (R_0 + R_2) i_2^+ = 0 \longrightarrow i_2^+ = \frac{U_C^+}{R_0 + R_2} = 0,1 \text{ А},$$

$$R_1 i_1^+ + U_C^+ = E \longrightarrow i_1^+ = \frac{E - U_C^+}{R_1} = 0,2 \text{ А},$$

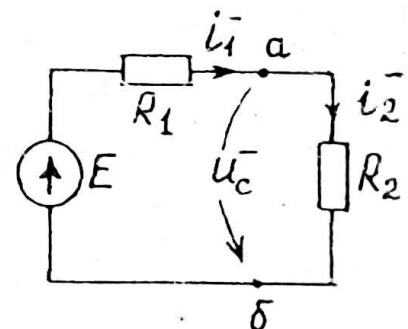
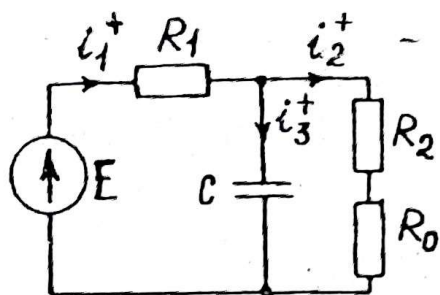


Рис. 3.2



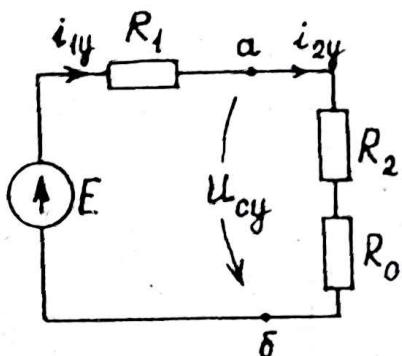
$$-i_1^+ + i_2^+ + i_3^+ = 0,$$

откуда

$$i_3^+ = i_1^+ - i_2^+ = 0,1 \text{ A.}$$

Рис.3.3

Расчет установившихся реакций в цепи после коммутации проводим для схемы рис.3.4.



$$i_{3y} = 0,$$

$$i_{1y} = i_{2y} = \frac{E}{R_0 + R_1 + R_2} = 0,12 \text{ A,}$$

$$U_{cy} = (R_0 + R_2) i_{2y} = 48 \text{ B.}$$

Рис.3.4

Составляем таблицу начальных и установившихся значений.

Таблица 3.1

Искомая величина	$t = 0^-$	$t = 0^+$	$t = \infty$
$U_c(t), \text{B}$	40	40	48
$i_1(t), \text{A}$	0,2	0,2	0,12
$i_2(t), \text{A}$	0,2	0,1	0,12
$i_3(t), \text{A}$	0	0,1	0

Задача 3.2. Расчет цепи второго порядка

Для заданного варианта (см. Прил.2) выполнить следующее:

- рассчитать токи и напряжения в схеме до коммутации;
- определить начальные условия;
- рассчитать установившиеся токи и напряжения в схеме после коммутации;
- составить таблицу начальных и установившихся значений.

Пример 3.2. На рис.3.5 дана схема с параметрами:
 $E = 140 \text{ В}$, $C = 20 \text{ мкФ}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$,
 $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_0 = 50 \text{ Ом}$.

Определить токи ветвей, U_C , U_L в начальный момент и в установившемся режиме, записать их в таблицу.

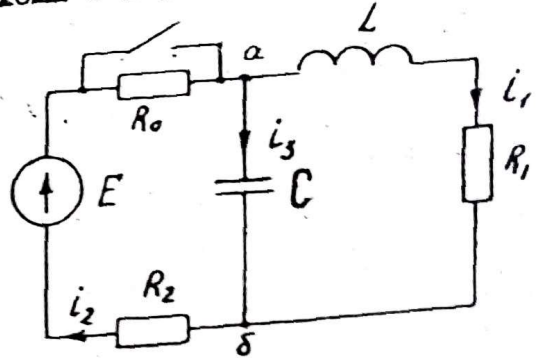


Рис.3.5

Решение. Выполняем расчет установившихся реакций в цепи до коммутации. Учитывая, что для постоянного тока емкость представляет собой разрыв, а индуктивность - короткое замыкание ветви, получаем эквивалентную схему рис.3.6, для момента $t = 0^-$ по которой имеем

$$i_3^- = 0, \quad U_L^- = 0,$$

$$i_1^- = i_2^- = \frac{E}{R_0 + R_1 + R_2} = 2 \text{ А},$$

$$U_C^- = R_1 i_1^- = \frac{R_1 E}{R_0 + R_1 + R_2} = 20 \text{ В}.$$

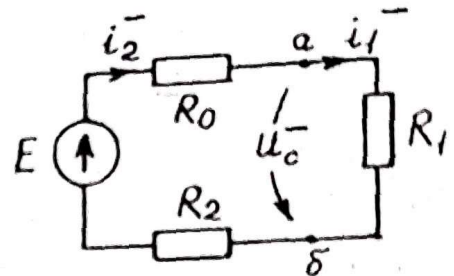


Рис.3.6

В соответствии с законом коммутации независимые начальные условия
 $i_1^+ = i_1^- = 2 \text{ А}$, $U_C^+ = U_C^- = 20 \text{ В}$.

Определяем остальные реакции в начальный момент времени в цепи, образующейся после коммутации. На основании законов Кирхгофа (см.рис.3.7) при $t = 0^+$

$$R_2 i_2^+ + U_C^+ = E \rightarrow i_2^+ = \frac{E - U_C^+}{R_2} = 12 \text{ А},$$

$$i_1^+ - i_2^+ + i_3^+ = 0 \rightarrow i_3^+ = i_2^+ - i_1^+ = 10 \text{ А},$$

$$U_L^+ + R_1 i_1^+ - U_C^+ = 0 \rightarrow U_L^+ = U_C^+ - R_1 i_1^+ = 0 \text{ В}.$$

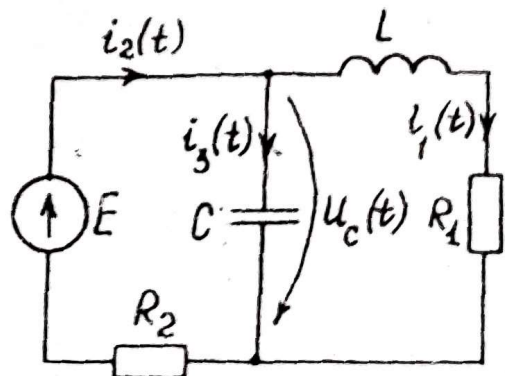
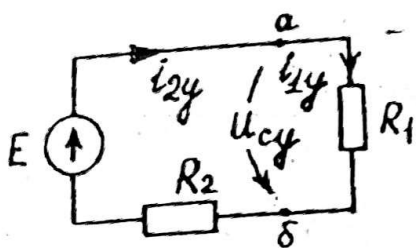


Рис.3.7

Расчет установившихся реакций в цепи после коммутации проводим для схемы (рис.3.8).



$$i_{3y} = 0, \quad U_{Ly} = 0,$$

$$i_{1y} = i_{2y} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 7 \text{ A},$$

$$U_{cy} = R_1 i_{1y} = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} = 70 \text{ V}.$$

Рис. 3.8

Составляем таблицу начальных и установившихся значений.

Таблица 3.2

Искомая величина	$t=0^-$	$t=0^+$	$t=\infty$
$i_1(t)$, А	2	2	7
$U_c(t)$, В	20	20	70
$i_2(t)$, А	2	12	7
$i_3(t)$, А	0	10	0
$U_L(t)$, В	0	0	0

Задание 4

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ
КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Таблица 4.1

Обозначения элементов	$u(i)$	$i'(u)$
R, G	$u = Ri$	$i = Gu$
L	$U_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i_L(0^+)$
C	$U_c = \frac{1}{C} \int_0^t i_c dt + U_c(0^+)$	$i_c = C \frac{dU_c}{dt}$

Расчет переходных процессов классическим методом в цепи любого порядка целесообразно разделить на 6 этапов.

Э т а п I. Составление системы дифференциальных уравнений. На основании законов Кирхгофа записываем систему уравнений для схемы, образующейся после коммутации. Затем, используя уравнения элементов, при-

веденные в табл.4.1, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно выбранных переменных - токов или напряжений [1]

Э т а п 2. Формулировка начальных условий. В приведенных задачах рассматриваем цепи без топологических вырождений, поэтому определение начальных условий переходных процессов базируется на законах коммутации. Для этого в цепи, имевшей место до коммутации, рассчитываем установившийся ток в индуктивности i_L^- и напряжение на емкости U_C^- в момент, непосредственно предшествующий коммутации, затем находим независимые начальные условия i_L^+ , U_C^+ в момент коммутации $t = 0^+$, используя законы коммутации $i_L^+ = i_L^-$; $U_C^+ = U_C^-$. Все остальные токи и напряжения в момент коммутации могут изменяться скачком (зависимые начальные условия). Они определяются из уравнений, составленных по законам Кирхгофа, для схемы после коммутации при $t = 0^+$ с учетом найденных значений i_L^+ , U_C^+ .

Э т а п 3. Расчет корней характеристического уравнения. Для этого составляем характеристическое уравнение либо приводя систему уравнений, полученную на первом этапе расчета, к одному дифференциальному уравнению, либо выделяя главный характеристический определитель, который формулируется следующим образом. Каждый столбец определителя содержит коэффициенты при соответствующей переменной (напряжении или токе): один - при x_1 , другой - при x_2 , третий - при x_3 и т.д. При этом первая производная d/dt заменяется на переменную характеристического уравнения α , вторая - на α^2 и т.д. Например, если электрическая цепь, образуемая после коммутации, описывается системой дифференциальных уравнений

$$d_{11} \frac{dx_1}{dt} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_{11}g_1 + \dots + b_{1n}g_n,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_{21}g_1 + \dots + b_{2n}g_n,$$

$$a_{31}x_1 + d_{32} \frac{dx_2}{dt} + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_{31}g_1 + \dots + b_{3n}g_n,$$

где x_1, x_2, x_3 - переменные, которые выбираются согласно табл.4.1 таким образом, чтобы система уравнений не содержала интегралов; g_1, g_2, \dots, g_n - возмущения (источники напряжения или тока).

Тогда ее главный характеристический определитель имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_{11}\alpha + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & d_{32}\alpha + a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Следует обратить внимание, что главный определитель системы учитывает только коэффициенты при неизвестных, и в него никогда не входят параметры известной правой части.

Раскрывая этот определитель и приравнявая его к нулю, $\Delta = 0$, получаем характеристическое уравнение, которое записываем в приведенной форме

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0,$$

где δ и ω_0 - коэффициенты, зависящие от параметров цепи и ее топологии. Корни характеристического уравнения $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ при $\delta > \omega_0$ вещественные, а при $\delta < \omega_0$ - комплексно-сопряженные $\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св}$, где $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Э т а п 4. Решение системы уравнений. Из курса математики известно, что решение системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений имеет вид $x(t) = x_y(t) + x_{св}(t)$.

Здесь установившаяся составляющая $x_y(t)$ - это значение тока или напряжения в цепи после завершения переходного процесса i_y, U_y , которые определяются источниками и параметрами самой цепи. Их расчет проводится для схемы, образующейся после коммутации при $t = \infty$, а свободная составляющая $x_{св}(t)$ является решением соответствующей системы однородных дифференциальных уравнений и при вещественных простых корнях находится в виде суммы экспоненциальных функций

$$x_{св}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}, \tag{4.1}$$

где количество слагаемых равно числу корней характеристического уравнения, а значит его порядку. При комплексных корнях свободную составляющую можно выразить через тригонометрические функции.

Действительно

$$x_{св}(t) = A_1 e^{(-\delta + j\omega_{св})t} + A_2 e^{(-\delta - j\omega_{св})t},$$

поэтому вынося за скобки общий множитель $e^{-\delta t}$ и применяя формулу Эйлера

$$e^{\pm j\omega_{св}t} = \cos \omega_{св}t \pm j \sin \omega_{св}t,$$

имеем

$$x_{св}(t) = e^{-\delta t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_{св}t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_{св}t],$$

где, переобозначив постоянные интегрирования $A_1 + A_2 = B_1, j(A_1 - A_2) = B_2$, получаем

$$x_{св}(t) = e^{-\delta t} (B_1 \cos \omega_{св}t + B_2 \sin \omega_{св}t). \tag{4.2}$$

Свободную составляющую можно выразить через синус аргумента $\omega_{сб}t + \theta$ следующим образом

$$x_{сб}(t) = D e^{-\delta t} \sin(\omega_{сб}t + \theta). \quad (4.3)$$

В силу того, что, раскрывая синус суммы

$$e^{-\delta t} D \sin(\omega_{сб}t + \theta) = e^{-\delta t} (D \sin \theta \cos \omega_{сб}t + D \cos \theta \sin \omega_{сб}t)$$

и сравнивая полученное выражение с (4.2), видим, что $B_1 = D \sin \theta$, $B_2 = D \cos \theta$, откуда D и θ можно выразить через B_1 и B_2

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{B_1}{B_2}; \quad D = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}. \quad (4.4)$$

В выражениях для свободной составляющей (4.1) - (4.3) коэффициенты $A_1, A_2, B_1, B_2, D, \theta$ - произвольные постоянные интегрирования. Таким образом, общее решение системы уравнений для цепи первого порядка будет (T - постоянная времени)

$$x(t) = x_y(t) + A_1 e^{-\frac{t}{T}} = x_y(t) + A_1 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (4.5)$$

для цепи второго порядка при вещественных разных корнях

$$x(t) = x_y(t) + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (4.6)$$

для цепи второго порядка при комплексных корнях

$$\begin{aligned} x(t) &= x_y(t) + e^{-\delta t} (B_1 \cos \omega_{сб}t + B_2 \sin \omega_{сб}t) = \\ &= x_y(t) + D e^{-\delta t} \sin(\omega_{сб}t + \theta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Э т а п 5. Определение постоянных интегрирования. Для вычисления A_1, A_2 , или B_1, B_2 , или D, θ составляем алгебраические уравнения, используя начальные условия, полученные на этапе 2.

Если $x = i_L$, то $x^+ = i_L^+$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{U_L^+}{L}$,

при $x = U_C$ $x^+ = U_C^+$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C^+}{C}$,

где $i_L^+, U_C^+, U_L^+, i_C^+$ - начальные условия, которые были определены на этапе 2.

В цепи первого порядка постоянную интегрирования A_1 находим из соотношения 4.5 при $t = 0^+$ по известному начальному значению x^+
 $x_y^+ + A_1 = x^+$, значит, $A_1 = x^+ - x_y^+$.

Тогда выражение 4.5 приобретает вид

$$x(t) = x_y(t) + (x^+ - x_y^+) e^{\alpha t} \tag{4.8}$$

В целях второго порядка для определения постоянных интегрирования используем известные начальные значения функции и ее производной x^+ и $\frac{dx}{dt}|_{t=0^+}$.

При простых вещественных корнях из выражения (4.6) при $t=0^+$ имеем

$$x_y^+ + A_1 + A_2 = x^+, \tag{4.9}$$

а взяв производную от (4.6) и положив $t=0^+$, получаем

$$\frac{dx_y}{dt}|_{t=0^+} + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = \frac{dx}{dt}|_{t=0^+}. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.9), (4.10) с известными правыми частями образуют систему, из решения которой определяем постоянные интегрирования A_1, A_2 . При комплексных корнях из выражения (4.7) при $t=0^+$ записываем

$$x_y^+ + B_1 = x^+, \tag{4.11}$$

а взяв производную от (4.7) и положив $t=0^+$, получаем

$$\frac{dx_y}{dt}|_{t=0^+} - \delta B_1 + \omega_{св} B_2 = \frac{dx}{dt}|_{t=0^+} \tag{4.12}$$

B_1 и B_2 определяем из решения уравнений (4.11), (4.12), правые части которых известны из начальных условий, а значения D и θ вычисляем по формулам (4.4).

Э т а п 6. Построение графиков временных зависимостей токов или напряжений. При выполнении всех задач по анализу переходных процессов требуется построение графиков изменения токов и напряжений во времени. Для этого вначале записываются рабочие формулы $i(t), U(t)$ вида (4.5) - (4.7), в которые подставляем численные значения всех коэффициентов. После этого кривые могут быть построены точно или приближенно.

При точном построении графиков рассчитывается определенное количество точек, принадлежащих кривым через заданные интервалы времени (шаг расчета).

Для построения экспоненциальных функций обычно задают значения времени $t = 0, T, 2T, 3T, 4T$. Этих значений вполне достаточно, так как при $t = 4T$ имеем $e^{-4} \approx 0,02$, т.е. свободная реакция уменьшается примерно в 50 раз по сравнению с начальным значением.

Если же строится кривая колебательного процесса, то выбирается 10 + 15 точек с шагом $\Delta t = \frac{T_{св}}{10 \div 15} = \frac{2\pi}{\omega_{св}(10 \div 15)}$.

Для сокращения времени, затрачиваемого на расчеты точек кривых, применяются или ЦМ или программируемые микрокалькуляторы.

Приближенное построение кривых состоит в том, что вначале строят отдельно установившуюся и свободную реакции, и затем их суммируют координатно в соответствии с равенством $x(t) = x_y(t) + x_{cb}(t)$.

Если x_{cb} определяется экспоненциальными функциями (корни вещественные), то с достаточной для практики точностью кривую можно построить, используя свойство экспоненты, состоящее в том, что отрезок подкасательной в любой точке кривой равен τ .

На рис.4.1 для примера приведена кривая тока, построенного по рабочей формуле $i(t) = 2 - 1e^{-t/0,01} \text{ A}$.

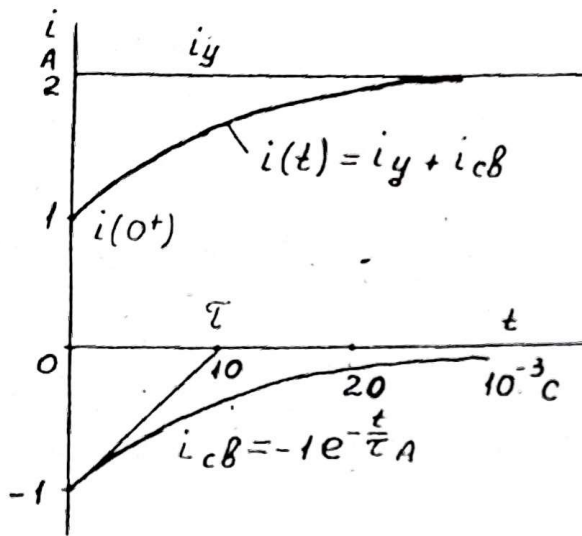


Рис.4.1

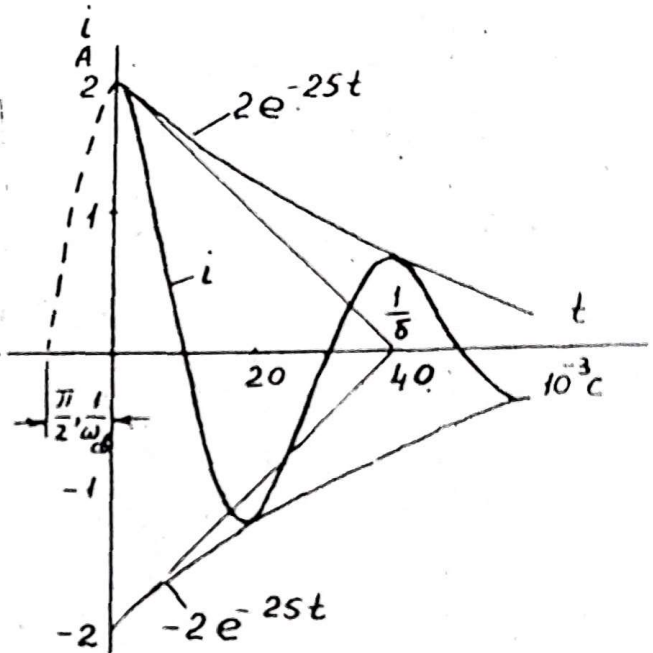


Рис.4.2

Если же процесс колебательный (корни комплексные) свободную реакцию приводим к виду $x_{cb}(t) = De^{-\delta t} \sin(\omega_{cb}t + \theta)$,

и вначале строим две экспоненциальные кривые по равенствам $De^{-\delta t}$ и $-De^{-\delta t}$ (см. рис.4.2). Затем между ними изображаем затухающую синусоидальную кривую с учетом сдвига по фазе θ . На рис.4.2 приведена кривая, построенная по формуле $i = 2e^{-25t} \sin(2\pi 100t + \frac{\pi}{2})$.

Задача 4.1. Расчет переходного процесса в цепях первого порядка

Для заданного варианта (см. Прил. I) выполнить следующее:

- составить систему дифференциальных уравнений цепи после коммутации
- определить начальное и установившееся значения искомой функции;
- определить корень характеристического уравнения и постоянную времени

- найти решение системы уравнений для $i_L(t)$ или $U_C(t)$;
- определить постоянную интегрирования;
- построить кривую переходного процесса для тока в индуктивности или напряжения на емкости.

Пример 4.1. На рис.4.3 дана схема с параметрами $\mathcal{Y} = 6 \text{ A}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГ}$.

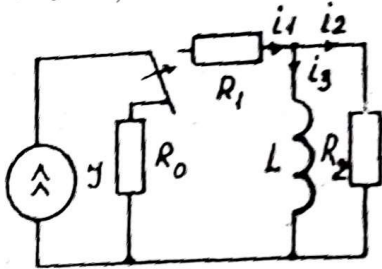


Рис.4.3

Определить классическим методом $i_3(t)$ и построить его график.

Решение. Расчет выполняется по приведенным этапам.

Этап I. Составляем систему уравнений для схемы после коммутации

$$\left. \begin{aligned} -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) &= 0, \\ U_L(t) - R_2 i_2(t) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

Выражаем напряжение U_L через i_3 , $U_L(t) = L \frac{di_3(t)}{dt}$ (см. табл.4.1)

и, учитывая, что $i_1(t) = \mathcal{Y}$, получаем систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} i_2(t) + i_3(t) &= \mathcal{Y}, \\ L \frac{di_3(t)}{dt} - R_2 i_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Этап 2. Определяем начальные и установившиеся значения тока в индуктивности. До коммутации ($t=0^-$) цепь к источнику не подключена, ток в индуктивности равен нулю $i_3^- = 0$, и по закону коммутации ток в индуктивности не изменяется $i_3^+ = i_3^- = 0$.

В установившемся режиме при $t=\infty$ имеем эквивалентную схему (рис.4.4), из которой получаем $i_{1y} = i_{3y} = \mathcal{Y} = 6 \text{ A}$.

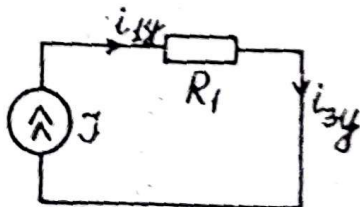


Рис.4.4

Этап 3. Формируем главный характеристический определитель системы уравнений (4.13), где первый столбец - коэффициенты при i_2 , второй - при i_3

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -R_2 & Ld \end{vmatrix}$$

Раскрывая определитель и приравняв его нулю, получаем $Ld + R_2 = 0$.
Откуда корень характеристического уравнения равен

$$d_1 = -\frac{R_2}{L} = \frac{5}{10 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^3 \frac{1}{c},$$

а постоянная времени цепи

$$\tau = \left| \frac{1}{d_1} \right| = \frac{L}{R_2} = 2 \cdot 10^{-3} c.$$

Этап 4. Находим решение системы дифференциальных уравнений (4.I3) в соответствии с (4.5)

$$i_3(t) = i_{3y}(t) + A_1 e^{d_1 t} = \gamma + A_1 e^{-\frac{R_2}{L} t}.$$

Этап 5. Применяя формулу (4.8), где согласно этапу 2 $x^+ = i_3^+ = 0$, получаем выражение для тока

$$i_3(t) = i_{3y}(t) + (i_3^+ - i_{3y}^+) e^{d_1 t} = \gamma (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 6 (1 - e^{-\frac{t}{2 \cdot 10^{-3}}}) A. \quad (4.I4)$$

Этап 6. График изменения тока $i_3(t)$ построен по рабочей формуле (4.I4) как сумма двух составляющих и изображен на рис.4.5.

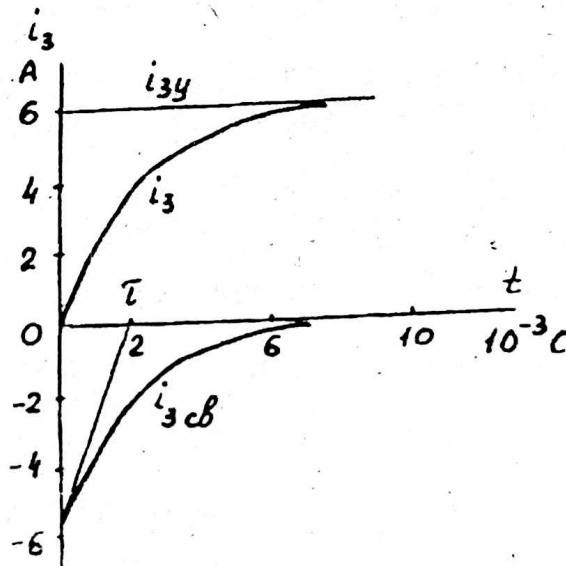


Рис.4.5

Задача 4.2. Расчет переходного процесса в цепи второго порядка

Для заданного варианта (Прил.2) выполнить следующее:

- составить систему дифференциальных уравнений для цепи после коммутации;
- рассчитать начальные и установившиеся реакции;
- составить характеристический определитель и найти его корни;
- найти решение системы уравнений для $i_L(t)$ или $U_C(t)$ по указанию преподавателя;
- определить постоянные интегрирования;
- построить кривую переходного процесса для заданной функции.

Пример 4.2. На рис.3.5 дана схема с параметрами:
 вариант "а" $E = 140 \text{ В}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 20 \text{ мкФ}$, $R_0 = 50 \text{ Ом}$, $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$;

вариант "б" $E = 140 \text{ В}$, $L = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$, $C = 10 \text{ мкФ}$, $R_0 = 38 \text{ Ом}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$.

Определить $U_C(t)$ классическим методом и построить его график.

Решение. Расчет выполняем в соответствии с этапами, приведенными выше.

Этап I. Составляем систему уравнений для схемы, образующейся после коммутации (см. рис.3.7).

$$\left. \begin{aligned} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) &= 0, \\ R_2 i_2(t) + U_C(t) &= E, \\ U_L(t) + R_1 i_1(t) - U_C(t) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Выражаем ток в емкости через напряжение U_C , а на индуктивности напряжение U_L через ток (см.табл. 4.1)

$$i_3(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}, \quad U_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt}$$

и получаем систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} i_1(t) - i_2(t) + C \frac{dU_C(t)}{dt} &= 0, \\ R_2 i_2(t) + U_C(t) &= E, \\ L \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) - U_C(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Этап 2. Расчет начальных и установившихся реакций выполняем как в примере 3.2.

Численные значения для варианта "а" см. в табл.3.2.

Этап 3. Составляем главный характеристический определитель системы (4.15)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & c\alpha \\ 0 & R_2 & -1 \\ L\alpha + R_1 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

раскрывая его и приравнявая к нулю, получаем характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + \frac{L + R_1 R_2 C}{L R_2 C} \alpha + \frac{R_1 + R_2}{L R_2 C} = 0,$$

или в общем виде

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0,$$

где

$$\delta = \frac{L + R_1 R_2 C}{2 L R_2 C}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{L C R_2}}.$$

Для исходных данных по варианту "а" корни вещественные, разные

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = (-2,550 \pm 2,346) \cdot 10^3 \text{ 1/c},$$

$$\delta = 2,55 \cdot 10^3 \text{ 1/c}, \quad \omega_0 = 10^3 \text{ 1/c}, \quad \alpha_1 = 204 \text{ 1/c}; \quad \alpha_2 = -4896 \text{ 1/c}.$$

Для исходных данных по варианту "б" корни комплексно-сопряжены

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св} = (-1 \pm j3) \cdot 10^4 \text{ 1/c},$$

$$\delta = 1 \cdot 10^4 \text{ 1/c}, \quad \omega_0 = 3,16 \cdot 10^4 \text{ 1/c}, \quad \omega_{св} = 3 \cdot 10^4 \text{ 1/c}.$$

Этап 4. Находим решение системы дифференциальных уравнений, которое для варианта "а" имеет вид в соответствии с формулой (4.6)

$$U_c(t) = U_{cy} + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} = 70 + A_1 e^{-204t} + A_2 e^{-4896t} \text{ В},$$

для варианта "б" см. 4.7), где $U_{cy} = 2,74 \text{ В}$.

$$U_c(t) = U_{cy} + e^{-\delta t} (B_1 \cos \omega_{св} t + B_2 \sin \omega_{св} t) = \\ = 2,74 + e^{-10^4 t} (B_1 \cos 3 \cdot 10^4 t + B_2 \sin 3 \cdot 10^4 t) \text{ В}.$$

Этап 5. Определяем постоянные интегрирования. Для варианта "а" используем систему уравнений (4.9), (4.10), где $x(t) = U_c(t)$, $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{i_3(t)}{C}$

$$\left. \begin{aligned} U_{cy} + A_1 + A_2 &= U_c^+ \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 &= \frac{i_3^+}{C} \end{aligned} \right\}$$

и, подставляя численные значения из табл.3.2

$$\left. \begin{aligned} 70 + A_1 + A_2 &= 20, \\ -204A_1 - 4896A_2 &= \frac{10}{20 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^5, \end{aligned} \right\}$$

получаем решение $A_1 = 54,4 \text{ В}, A_2 = -104,4 \text{ В}.$

Для варианта "б" используем уравнения (4.11), (4.12)

$$\left. \begin{aligned} U_{cy}^+ + B_1 &= U_c^+, \\ -\delta B_1 + \omega_{св} B_2 &= \frac{i_3^+}{C} \end{aligned} \right\}$$

или в численном виде, после вычисления $U_c^+ = 2 \text{ В}, i_3^+ = 0,38 \text{ А},$ имеем

$$\left. \begin{aligned} 2,74 + B_1 &= 2 \\ -1 \cdot 10^4 B_1 + 3 \cdot 10^4 B_2 &= \frac{0,38}{10 \cdot 10^{-6}} = 3,8 \cdot 10^4, \end{aligned} \right\}$$

откуда $B_1 = -0,74 \text{ В}, B_2 = 1,02 \text{ В}.$

В результате получаем рабочие формулы

"а" $U_c(t) = 70 + 54,4 e^{-204t} - 104,4 e^{-4896t} \text{ В},$ (4.16)

"б" $U_c(t) = 2,74 + e^{-10^4 t} (-0,74 \cos 3 \cdot 10^4 t + 1,02 \sin 3 \cdot 10^4 t) \text{ В}$

или используя формулу (4.4), имеем

$$U_c(t) = 2,74 + 1,26 e^{-10^4 t} \sin(3 \cdot 10^4 t - 36^\circ) \text{ В}. \quad (4.17)$$

Проверка: $t = 0 \quad U_c^+ = 2,74 - 0,74 = 2 \text{ В},$
 $t = \infty \quad U_{cy} = 2,74 \text{ В}.$

Этап 6. Кривые переходного процесса для вариантов "а" и "б" построены по формулам (4.16), (4.17) в соответствии с изложенным выше на с. 9 и изображены на рис.4.6, 4.7.

Характеристиками переходного процесса (рис.4.7) являются период свободных колебаний и логарифмический декремент колебаний.

Период определяем как

$$T_{св} = \frac{2\pi}{\omega_{св}} = \frac{6,28}{3 \cdot 10^4} = 2,09 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Логарифмический декремент колебаний δ представляет собой логарифм отношения двух амплитуд, разделенных временем, равным периоду. Отношение амплитуд Δ связано с $\delta, T_{св}.$

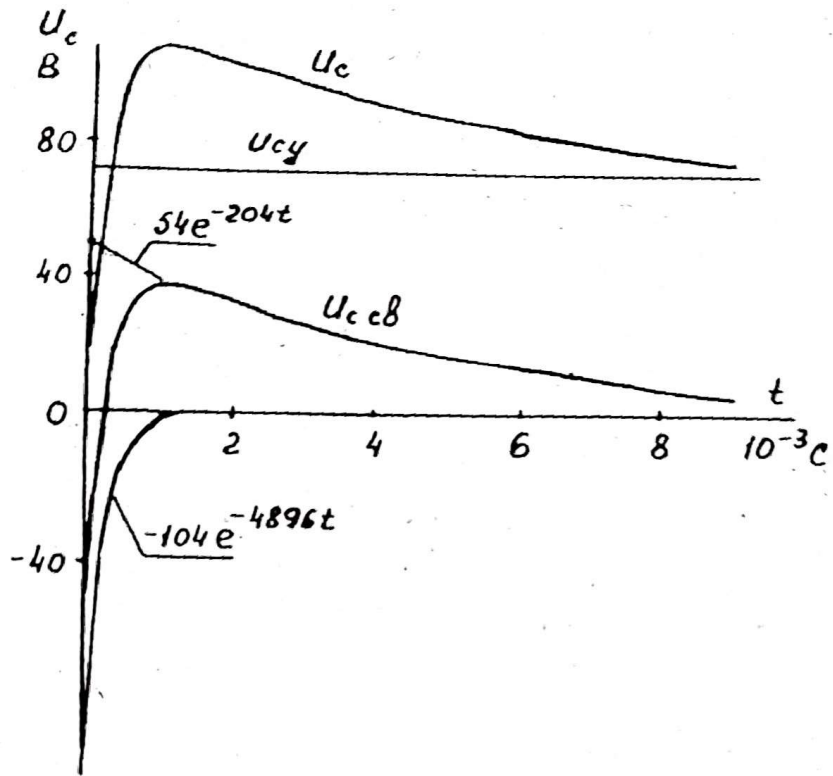


Рис. 4.6

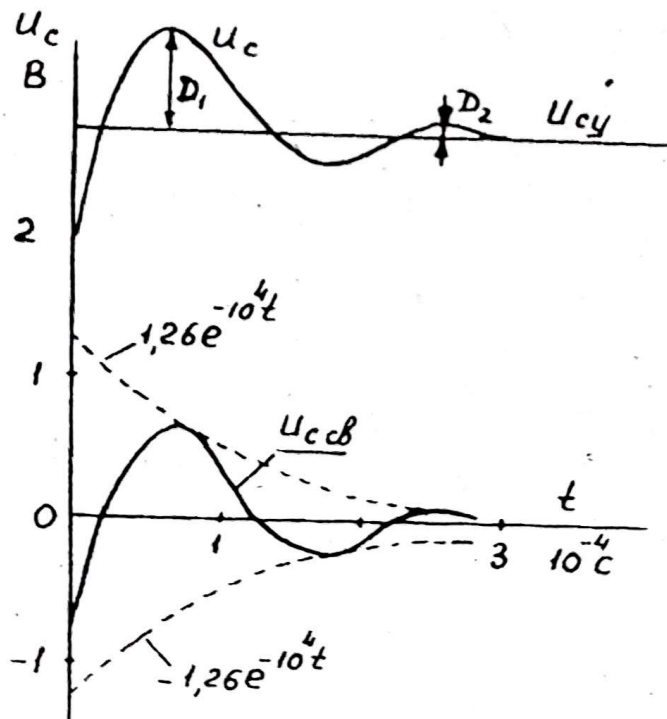


Рис. 4.7

$$\Delta = \left| \frac{D_1}{D_2} \right| = \left| \frac{De^{-\delta t}}{De^{-\delta(t+T_{св})}} \right| = e^{\delta T_{св}},$$

поэтому

$$\vartheta = \ln \left| \frac{D_1}{D_2} \right| = \delta T_{св}.$$

Используя первую часть формулы из рис.4.7, определяем

$$\vartheta = \ln \frac{0,75}{0,09} = 2,09$$

и, применяя вторую часть формулы для ϑ получаем из расчетных величин δ , $T_{св}$ тоже значение (для проверки)

$$\vartheta = \delta T_{св} = 10^4 \cdot 2,09 \cdot 10^{-4} = 2,09.$$

Задача 4.3. Анализ уравнений состояния для цепи второго порядка

Для анализа переходных процессов часто используются ЭВМ. В этом случае уравнения цепей рационально представить в форме, имеющей наибольшую совместимость с аналоговыми и цифровыми вычислительными машинами. В частности, эти уравнения должны быть представлены в нормальной форме и не содержать интегралов. Этим требованиям удовлетворяют уравнения состояния [1].

При формировании этих уравнений в качестве переменных выбираются только напряжения на емкостях U_c (или заряды Q) и токи в индуктивностях i_L (или потокосцепления ψ). Уравнения состояния записываются так, чтобы в левой части каждого уравнения содержалась только первая производная переменной состояния, а в правой - только переменные состояния и независимые источники напряжения и тока. Общее число уравнений состояния равно порядку цепи N [1].

Например, для цепи второго порядка уравнения состояния имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}g_1 + \dots + b_{1s}g_s, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}g_1 + \dots + b_{2s}g_s, \end{aligned} \right\}$$

где x_1 и x_2 - переменные состояния, a и b - постоянные коэффициенты, зависящие от параметров цепи и ее топологии; g_1, g_2, \dots, g_s - независимые источники.

Вариант	Номер схемы	Данные электрической схемы						
		$E, В$	$R_0, Ом$	$R_1, Ом$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$L, Гн$	$C, мкФ$
I	I	90	30	30	-	30	0,001	10
2	I	82	4000	200	-	4000	I	I
3	2	60	-	400	800	0	0,2	5
4	2	100	-	5000	50	0	2	20
5	3	40	-	10	10	10	0,5	100
6	3	80	-	400	400	20	I	100
7	4	100	-	50	-	50	0,001	10
8	4	105	-	2000	-	100	I	10
9	5	200	-	1000	-	1000	0,1	5
10	5	200	-	10	-	1000	0,1	5
II	6	20	-	20	20	20	0,01	500
12	6	20	-	500	5	5	2	50
13	7	100	-	10	-	40	2	100
14	7	120	-	20	-	1000	2	100
15	8	22	-	20	20	2	0,1	100
16	8	100	-	10	10	1000	0,5	20
17	9	50	-	40	10	40	0,01	100
18	9	50	-	500	10	10	I	40
19	10	225	200	200	-	50	0,02	50
20	10	84	20	20	-	800	0,1	5
21	II	60	-	30	30	0	0,3	50
22	II	100	-	50	1000	0	0,1	2
23	12	50	40	-	10	40	0,01	100
24	12	81	800	-	10	10	I	10
25	13	80	-	100	-	100	0,01	10
26	13	84	-	2000	-	100	I	5
27	14	100	-	400	-	600	0,1	5
28	14	100	-	4000	-	40	0,2	2
29	15	140	-	40	40	100	0,01	10
30	15	200	-	2000	20	20	I	5

