

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Е. В. Пастухова, Ю. С. Романова, Е. В. Состина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург
2023

УДК 621.01
ББК 34.41
00

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *В. Г. Фарафонов*;
кандидат физико-математических наук, доцент *Р. А. Попков*

Утверждено

редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

Протокол 000000

Пастухова, Е. В.

000 Математический анализ: учеб.-метод. пособие / Е. В. Пастухова, Ю. С. Романова, Е. В. Состина. – СПб.: ГУАП, 2023. – 52 с.

Сборник содержит задачи контрольных работ и методические указания к их выполнению по математическому анализу для студентов заочного отделения всех направлений подготовки и специальностей, предусмотренные учебной программой в соответствии с ФГОС. Задания и методические указания также могут быть использованы в курсе дисциплин всех направлений и специальностей ГУАП для практических занятий.

УДК 000
ББК 00000

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса «Математический анализ», используя учебную литературу. Список рекомендуемой литературы приведен в методическом пособии. Студент может использовать также учебники и учебные пособия, не включенные в данный список, если эти пособия содержат соответствующие разделы учебного курса.

2. Контрольная работа сдается преподавателю в электронном формате (docx, pdf, jpeg). Отчет должен иметь титульный лист, на котором необходимо указать: название института Университета; название кафедры; название учебной дисциплины и номер контрольной работы; специальность; фамилию, имя, отчество и номер зачетной книжки студента.

3. Каждый студент решает 10 задач. Их номера выбираются студентом из табл. 1 по двум последним цифрам своего шифра зачетной книжки и первым буквам имени и фамилии.

Таблица 1

Формирование заданий контрольной работы

Последняя цифра шифра		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номер задания	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Предпоследняя цифра шифра		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номер задания	4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Первая буква фамилии		А, И, Т	Б, О, Ц	В, Н, Х	Г, Ф, Я	Д, З, Л	Е, М, Р	Ж, С, Ч	К, Э	П, Щ	У, Ш Ю
Номер задания	7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Первая буква имени		А, И, Т	Б, О, Ц	В, Н, Х	Г, Ф, Я	Д, З, Л	Е, М, Р	Ж, С, Ч	К, Э	П, Щ	У, Ш Ю
Номер задания	9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
	10	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Например, студент Захаров Иван, шифр 2028/1342, выполняет задачи № 2,12,22,34,44,54,65,75,81,91.

4. Условия задачи переписываются полностью, после чего выполняется их решение.

5. Задачи в контрольной работе нужно располагать в порядке возрастания номеров.

6. Студент обязан исправить в работе ошибки, отмеченные преподавателем, и отправить заново на проверку.

7. Контрольная работа является обязательной для допуска к сдаче экзамена, который предусмотрен учебным планом.

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Понятие функции

Рассмотрим множество X элементов x и множество Y элементов y .

Определение. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие по некоторому закону единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция* $y=f(x)$ со значениями в множестве Y .

Элементы y – значения функции, элементы x – значения аргумента. Множество X – область определения функции, Y – множество значений функции. Если X и Y – множества действительных чисел, то функцию называют действительной функцией одного аргумента.

f – закон, по которому устанавливается соответствие элементов, чаще всего, задается аналитически, т. е. с помощью формулы. Аналитически функция может быть задана:

– явно: когда формула разрешена относительно y . Например,

$$y = \frac{\operatorname{arctg}(x + x^2)}{\sqrt{x}}.$$

– неявно: когда формула не разрешена относительно y . Например,

$$y^3 + 3xy^2 + \sin(xy) = 8.$$

– параметрически: когда x и y заданы в виде явных функций параметра t :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1; t_2]. \text{ Например, } \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, t \in [0; \pi].$$

Определение. Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ с областью определения X и множеством значений Y_1 и функцию $z=F(y)$ с областью определения Y_2 и областью значений Z .

Определение. Если область определения Y_2 функции F включает в себя множество значений Y_1 функции f , то говорят, что на множестве X определена *сложная функция* $z=F(y)=F[f(x)]$ с областью значений Z .

Например, $y=2^x$, $Y_1=(0; +\infty)$ и $z=\sin(y)$, $Y_2=(-\infty; +\infty)$. Таким образом, $z=\sin(2^x)$ – сложная функция.

Определение. Пусть $y=f(x)$ – функция, имеющая область определения множество D и областью значений множество E , такова, что из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, тогда каждому $y \in E$ соответствует

единственное значение $x \in D$, такое, что $f(x)=y$. Тем самым определена новая функция f^{-1} с областью определения E и областью значений D . Функции $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ называют *взаимно обратными функциями*.

Например, $y=5^x$ и $y=\log_5 x$ – есть взаимно обратные функции.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если удовлетворяет условию $f(x)=f(-x)$ и *нечетной*, если $f(x)=-f(-x)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T (период функции) такое, что $f(x)=f(x+T)$ для любого x .

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *строго возрастающей* (убывающей) при $x \in [a, b]$, если для любых $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Строго возрастающая и строго убывающая функции называются *строго монотонными*.

Определение. ε -окрестностью точки x_0 называется промежуток $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ длины 2ε с центром в точке x_0 .

1.2. Предел функции

Пусть переменная x стремится к x_0 ($x \rightarrow x_0$), т. е. принимает значения сколь угодно близкие к x_0 , но не равные ему.

Определение. Число A называют *пределом функции* $y=f(x)$ в точке x_0 (при $x \rightarrow x_0$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число δ , что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Если x неограниченно возрастает, то говорят, что x стремится к плюс бесконечности: $x \rightarrow +\infty$; если неограниченно убывает, то $x \rightarrow -\infty$.

Определение. Число A называют *пределом функции* $y=f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число M , что для всех x , удовлетворяющих неравенству $x > M$ ($x < -M$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$).

Определение. Число A называют *правым односторонним пределом функции* $y=f(x)$ при $x \rightarrow x_0 + 0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число δ , что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пишут $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$. Аналогично определяется

левый односторонний предел функции в точке.

Свойства пределов:

1. Если в окрестности точки x_0 : $f(x) = C$ ($C = \text{const}$), то $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

2. Если существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 , то существуют пределы суммы, разности, произведения и частного этих функций (если $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$), причём

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot g(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, где $C = \text{const}$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

3. Пусть существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ и предел $\lim_{y \rightarrow b} F(y)$. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 $f(x) \neq b$, за исключением, быть может, самой точки x_0 ; тогда существует предел сложной функции $\lim_{x \rightarrow x_0} F[f(x)] = \lim_{y \rightarrow b} F(y)$.

Замечательные пределы

При вычислении пределов функций удобно использовать, так называемые, замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствия: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg} x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, или $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, где $e \approx 2,71828$.

Следствия: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

1.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Определение. Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty$.

Теорема «О связи пределов с бесконечно малыми»: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует и равен A ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$) тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;

2) произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;

3) произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

Теорема «О связи бесконечно малых и бесконечно больших». Величина, обратная бесконечно малой функции, есть бесконечно большая функция.

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ *более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$* при $x \rightarrow x_0$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то говорят, что $\alpha(x)$ *более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$* при $x \rightarrow x_0$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = r$ ($0 < r < \infty$), то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *одного порядка малости*. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *эквивалентные бесконечно малые* при $x \rightarrow x_0$ ($\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$).

Пример.

1) Сравним $\alpha_1(x) = 8 - x$ и $\beta_1(x) = 2 - \sqrt[3]{x}$ при $x \rightarrow 8$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{8 - x}{2 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(8 - x) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(2 - \sqrt[3]{x}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(8 - x) \cdot (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(8 - x)} = \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 12 \neq 0 < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha_1(x) = 8 - x$ и $\beta_1(x) = 2 - \sqrt[3]{x}$ бесконечно малые функции, одного порядка малости при $x \rightarrow 8$.

2) Сравним $\alpha_2(x) = x^2 + x$ и $\beta_2(x) = \sqrt{x^3}$ при $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0 + \infty = \infty.$$

Следовательно, $\alpha_2(x)$ бесконечно малая более низкого порядка, чем $\beta_2(x)$ при $x \rightarrow 0$.

На основе рассмотренных замечательных пределов можно указать ряд эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim (e^x - 1) \sim \ln(1 + x).$$

Для бесконечно малых функций справедливы следующие утверждения:

1) предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если любую из них заменить ей эквивалентной;

2) разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости по сравнению с каждой из них;

3) если разность двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция по сравнению с каждой из них, то эти бесконечно малые функции эквивалентны.

1.4. Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки и в самой точке, и существует предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, равный значению функции в точке x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Основными элементарными функциями называются функции вида:

- постоянная $y = C$, $C = \text{const}$;
- степенная $y = x^n$;
- показательная $y = a^x$, $a > 0$;
- логарифмическая $y = \log_a x$;
- тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Всякая функция, явным образом заданная с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется *элементарной функцией*.

Теорема «О непрерывности элементарных функций». Все функции, входящие в класс элементарных функций, непрерывны всюду в области их определения.

Свойства функций, непрерывных в точке:

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции $C \cdot f(x)$, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \times g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x_0) \neq 0$, являются непрерывными в точке x_0 .

2. Если $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и функция $z=F(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $z=F[f(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Например, $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}(x^2 + x + 1) = \operatorname{arctg}(\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1)) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она определена для любого $x \in [a, b]$ и непрерывна в каждой точке этого отрезка (в точке a справа, в точке b слева)

1.5. Точки разрыва функции

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *справа*, если она определена на полуинтервале $[x_0, b)$ и существует её правосторонний предел, равный $f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *слева*, если она определена на полуинтервале $(a; x_0]$ и существует её левосторонний предел, равный $f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Точка $x_0 \in [a, b]$ называется *точкой разрыва функции*, если функция не определена в этой точке или определена, но не является в этой точке непрерывной.

Классификация точек разрыва функции

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 можно записать в виде $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Классификация точек разрыва проводится в зависимости от характера нарушения этой цепочки равенств.

Определение. Точкой разрыв первого рода функции $f(x)$ называется такая точка x_0 , в которой существуют и конечны оба односторонних предела функции, но они не равны друг другу $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, либо в точке x_0 односторонние пределы существуют, конечны и равны друг другу, но в точке x_0 функция либо не определена, либо значение $f(x_0)$ отлично от общего значения обоих односторонних пределов в этой точке $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ (такой разрыв в точке x_0 называют *устранимым разрывом первого рода*).

Определение. Точкой разрыва второго рода функции $f(x)$ называется такая точка x_0 , в которой хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, либо не существует.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , обозначим $\Delta x = x - x_0$ приращение аргумента, тогда приращение функции в точке x_0 выразится формулой $\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Определение. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при стремлении приращения аргумента к 0, если этот предел существует.

Производную функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначают $f'(x_0)$ или

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная функции $f(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек, где она существует, сама является функцией и обозначается $f'(x_0)$. Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

Геометрически значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 1): $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.

С точки зрения физики, производная является мгновенной скоростью изменения величины y в точке x_0 при изменении величины x .

Функция, имеющая производную в точке x_0 , называется *дифференцируемой в этой точке*. Функция, имеющая производную в каждой точке промежутка (a, b) , называется *дифференцируемой на этом промежутке*.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Правила дифференцирования:

1. $(f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$;

2. $(f_1(x) \times f_2(x))' = f_1'(x) \times f_2(x) + f_1(x) \times f_2'(x)$;

3. $(C \times f_1(x))' = C \times f_1'(x)$, где $c = \text{const}$;

4. $\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{f_2^2(x)}$.

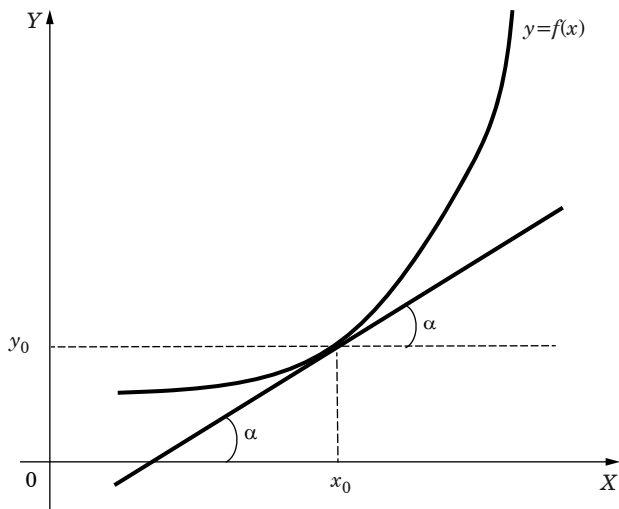


Рис. 1. Геометрический смысл производной

Таблица 2

Таблица производных основных элементарных функций

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcc} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

2.2. Производная сложной функции

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $z=F(y)$ дифференцируема в точке y_0 ($y_0=f(x_0)$), тогда сложная функция $z=F[f(x)]$ дифференцируема в точке x_0 и её производная определяется формулой $z'_x = F'_y \cdot y'_x = F'_y(y) \cdot f'_x(x)$.

Пример. Найти производную функции $z = \operatorname{arctg}(\log_5 x)$.

$$\text{Здесь } z = F(y) = \operatorname{arctg}(y), \quad y = f(x) = \log_5 x, \quad z'_y = \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{1+\log^2_5 x},$$
$$y'_x = \frac{1}{x \ln 5}.$$

$$\text{Тогда, } z'_x = \frac{1}{1+\log^2_5 x} \cdot \frac{1}{x \ln 5}.$$

2.3. Производная параметрически заданной функции

Если зависимость между x и y задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ причем } x'(t) \neq 0, \text{ то } \begin{cases} y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} \\ x = x(t) \end{cases}.$$

Пример. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 + \cos t) \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty.$

$$\text{Имеем: } x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = -a \sin t,$$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-a \sin t}{a(1 - \cos t)} = -\frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

2.4. Производные высших порядков

Определение. Производной второго порядка от функции $f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е. $f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$, если этот предел существует; тогда функция $f(x)$ называется дважды дифференцируемой.

Производная n -го порядка функции $f(x)$ определяется как производная от производной $(n - 1)$ -го порядка

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Пример. Найти производную n -го порядка для функции $y = \ln x$.

$$y' = \frac{1}{x}; \quad y'' = -\frac{1}{x^2}; \quad y''' = \frac{2}{x^3}; \quad y^{(4)} = -\frac{3 \cdot 2}{x^4}; \quad y^{(5)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{x^5};$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$

Первая производная параметрически заданной функции также является параметрически заданной функцией:

$$\begin{cases} y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} \\ x = x(t) \end{cases}$$

Поэтому, для нахождения второй производной y'' надо снова применить правило дифференцирования параметрически заданной функции.

$$\begin{cases} y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \\ x = x(t) \end{cases}$$

Аналогично вычисляются производные высших порядков.

Пример. Найти вторую производную параметрически заданной

функции $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \sin t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x'_t = 2t, \\ y'_t = \cos t, \end{cases} \quad \begin{cases} y'_x = \frac{\cos t}{2t} \\ x = t^2 \end{cases} \quad \text{— первая производная.}$$

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{\cos t}{2t} \right)'_t = \frac{-\sin t \cdot t - \cos t}{2t^2} = -\frac{t \sin t + \cos t}{2t^2};$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{t \sin t + \cos t}{2t^2}}{2t} = -\frac{t \sin t + \cos t}{4t^3}.$$

2.5. Дифференциал функции

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то её приращение может быть представлено в виде: $\Delta y = \underbrace{y'(x_0)\Delta x}_{\text{главная часть}} + \alpha(x)\Delta x$.

Определение. Дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 называют главную часть приращения функции, пропорциональную приращению аргумента Δx и обозначают: $dy=y'(x_0)\cdot\Delta x$.

Рассмотрим функцию $y=x$: $y'=1$, следовательно $dx=1\cdot\Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной совпадают, тогда, $dy=y'(x_0)\cdot\Delta x$ – формула для вычисления дифференциала функции.

Определение. Дифференциалом второго порядка от функции $y=f(x)$ называется дифференциал от ее первого дифференциала, вычисленный в предположении, что dx постоянная величина (x – независимая переменная), обозначается

$$\begin{aligned}d^2y &= d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)' \cdot dx = \\ &= [\text{т. к. } dx = \text{const}] = dx \cdot (y')' dx = y'' dx^2.\end{aligned}$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков, т. е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = y^{(n)} dx^n.$$

Пример. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядка функции

$y = \frac{\ln x}{x}$. Имеем, $dy = y'dx = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$ – дифференциал первого порядка.

$$\begin{aligned}d^2y &= y'' dx^2 = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' dx^2 = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} dx^2 = \\ &= \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} dx^2 = \frac{-1 - 2 + 2 \ln x}{x^3} dx^2 = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} dx^2 - \text{диффе-}\end{aligned}$$

ренциал второго порядка.

2.6. Правило Лопитала для раскрытия неопределенностей

Теорема Лопитала. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 , за исключением самой точки x_0 , и $g'(x) \neq 0$ в окрестно-

сти точки x_0 . Если $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми (т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$) либо бесконечно большими

(т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$) при $x \rightarrow x_0$, и при этом существует пре-

дел отношения их производных $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \rightarrow x_0$, то существует и

предел отношения самих функций $\frac{f(x)}{g(x)}$, причем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема справедлива и в том случае, если $x_0 = \infty$.

Пример.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

$\alpha > 0$.

Иногда правило Лопиталья применяют несколько раз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln a}{n x^{n-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln^3 a}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} = \\ &= \left\{ \frac{\infty}{\infty} \text{ Продифференцируем } n \text{ раз} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x \ln^n a}{(n)!} = \infty, \end{aligned}$$

при $a > 1$.

2.7. Исследование функций с помощью производных

Теорема “Признак монотонности функции”. Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (a, b) и её производная на этом промежутке положительна (отрицательна), то функция $f(x)$ на промежутке (a, b) возрастает (убывает).

Пример. Найти промежутки монотонности функции $y = x^2$.

Найдём производную $y' = 2x$. Очевидно, что при $x > 0$ производная $y' > 0$, функция возрастает на этом промежутке, а при $x < 0$ производная $y' < 0$, функция убывает на этом промежутке.

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* (минимума), если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки x этой окрестности выполняется неравенство: $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$). Точки минимума и максимума носят общее название *точек экстремума*.

Теорема “*Необходимый признак экстремума функции одного аргумента*”. Если x_0 является точкой экстремума, то $f'(x_0) = 0$ либо $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых выполняется необходимое условие, называют *критическими*.

Например, для функции $y = x^3 - 3x$ критическими точками являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, т. к. $y' = 3x^2 - 3 = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Теорема “*Первый достаточный признак экстремума функции одного аргумента*”. Если $f(x)$ непрерывна в критической точке x_0 , дифференцируема в некоторой её окрестности, за исключением быть может самой точки x_0 , и при переходе через точку x_0 производная функции меняет свой знак с $+$ на $-$, то x_0 является точкой максимума, если производная меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 – точка минимума, если производная не меняет знака при переходе через x_0 , то x_0 не является точкой экстремума.

Например, для функции $y = x^3 - 3x$: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ и производная меняет свой знак с $+$ на $-$ в точке $x_1 = -1$ и, следовательно, x_1 является точкой максимума, а в точке $x_2 = 1$ производная меняет знак с $-$ на $+$ и x_2 – точка минимума этой функции.

Выпуклость и вогнутость графика функции

Определение. График функции $f(x)$ называется *выпуклым* (вогнутым) на отрезке $[a, b]$, если точки графика функции лежат ниже (выше) любой касательной, проведенной к графику функции на отрезке $[a, b]$ (рис. 2).

Точки, в которых график дифференцируемой функции меняет выпуклость на вогнутость и наоборот, называют *точками перегиба функции*.

Теорема “*Признак выпуклости и вогнутости графика функции*”. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке (a, b) и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график функции на промежутке (a, b) выпуклый (вогнутый).

Теорема “*Необходимый признак точки перегиба графика функции*”. Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке x_0 , и точка x_0 является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

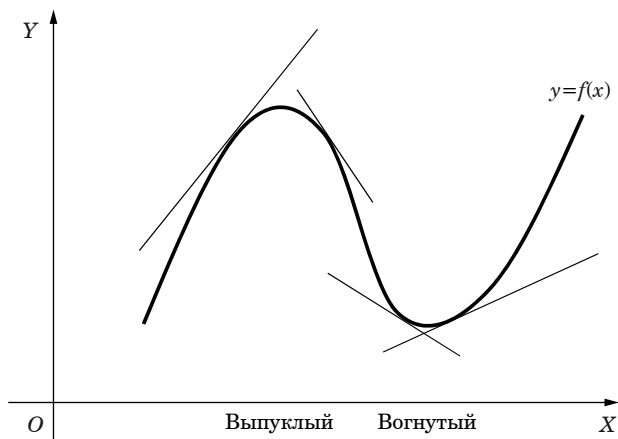


Рис. 2. Выпуклость и вогнутость графика функции

Теорема “Необходимый признак точки перегиба графика функции”. Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке x_0 , и точка x_0 является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема “Достаточный признак точки перегиба графика функции”. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в ее окрестности и при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет знак, то x_0 является точкой перегиба.

Например, для функции $y=x^3 - 3x$ вторая производная $y''=6x=0$, если $x=0$. Очевидно, что при переходе через $x=0$ y'' меняет свой знак с минуса на плюс, следовательно, $x_0=0$ является точкой перегиба и кроме того, при $x<0$ график функции выпуклый, а при $x>0$ вогнутый.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Основные понятия

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X , если $F'(x)=f(x)$ для всех $x \in X$. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x)$ является первообразной той же функции в том и только в том случае, когда $\Phi(x)=F(x)+C$, где C – некоторая постоянная.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а постоянная C принимает действительные значения (табл.3).

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (f(x)dx)' = f(x)$;
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
3. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, где $a = \text{const}$;
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Таблица 3

Таблица основных неопределенных интегралов

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \text{tg} \frac{x}{2} \right + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + C$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C$	

Пример: Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 - x^4}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - x^4} &= \int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} = \\ &= \int \frac{1 - x^2 + x^2}{x^2(1 - x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1 - x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

3.2. Методы интегрирования

а) Метод подведения под знак дифференциала.

Для вычисления интеграла $\int f(x)dx$ используют замену переменной или подстановку вида $u=t(x)$, где $t(x)$ дифференцируемая функция.

Например, вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos x dx$.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos x dx &= \int \sin^3 x d(\sin x) = \langle t(x) = \sin x \rangle = \\ &= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C. \end{aligned}$$

б) Метод подстановки.

В этом случае вводят новую переменную формулой $x=x(t)$, где функция $x(t)$ дифференцируема и имеет обратную.

Например, вычислить $\int x(5x-1)^{10} dx$.

$$\begin{aligned} \int x(5x-1)^{10} dx &= \left\langle 5x-1=t, \text{ тогда } x=\frac{t+1}{5}, dx=\frac{dt}{5} \right\rangle = \int \frac{t+1}{5} t^{10} \frac{dt}{5} = \\ &= \frac{1}{25} \int (t^{11} + t^{10}) dt = \frac{1}{25} \left(\frac{t^{12}}{12} + \frac{t^{11}}{11} \right) + C = \frac{(5x-1)^{12}}{300} + \frac{(5x-1)^{11}}{275} + C. \end{aligned}$$

в) Метод интегрирования по частям.

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$.

Примеры:

1) вычислить интеграл $\int (3x+1) \sin 4x dx$.

$$\int (3x+1)\sin 4x dx = \left\langle \begin{array}{l} u = 3x+1, \quad dv = \sin 4x dx \\ du = 3dx, \quad v = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{4}(3x+1)\cos 4x + \int \frac{1}{4}\cos 4x \cdot 3dx = -\frac{3x+1}{4}\cos 4x + \frac{3}{16}\sin 4x + C.$$

2) вычислить интеграл $\int (x^2 + 3)\ln x dx$.

$$\int (x^2 + 3)\ln x dx = \left\langle \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = (x^2 + 3)dx \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int (x^2 + 3)dx = \frac{x^3}{3} + 3x \end{array} \right\rangle =$$

$$= \frac{x^3 + 9x}{3}\ln x - \int \frac{x^3 + 9x}{3x} dx = \frac{x^3 + 9x}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} - 3x + C.$$

3.3. Определенный интеграл и методы его вычисления

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $x \in [a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n частей, то *интегральной суммой функции $f(x)$ на $[a, b]$* называется сумма вида $S_n = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \Delta x_k$, где $x_{k-1} \leq \bar{x}_k \leq x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

$k=1, 2, 3, \dots, n$. Геометрически S_n есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_k и высоты $f(\bar{x}_k)$.

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при условии, что наибольшая из разностей Δx_k стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части $[x_{k-1}, x_k]$, ни от выбора точек \bar{x}_k на этих отрезках, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$

в пределах от a до b и обозначается символом $\int_a^b f(x) dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \Delta x_k.$$

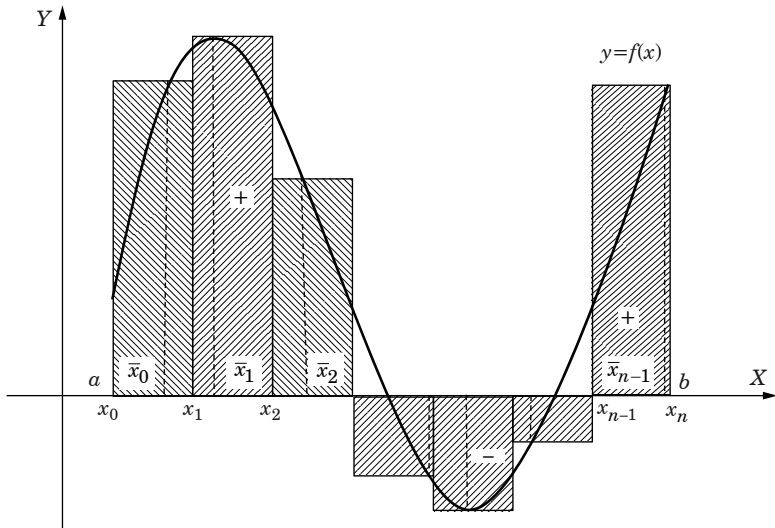


Рис. 3. Геометрический смысл определенного интеграла

Геометрически определенный интеграл представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, причем площади, расположенные выше оси Ox , входят в эту сумму со знаком «плюс», а площади, расположенные ниже оси Ox , со знаком «минус» (рис. 3).

Если $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример: Вычислить $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{4} \right) - \frac{\sin 0}{4} = \frac{\pi - 2}{8}. \end{aligned}$$

Свойства определенного интеграла:

1. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

3. Если функция $f(x)$ четная, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, если функция $f(x)$ нечетная, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

4. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл с верхним переменным пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ является первообразной для функции $f(x)$, т. е. $\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Методы вычисления определенного интеграла

a) Замена переменной в определенном интеграле.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, причем $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$. Для вычисления определенного интеграла не требуется возвращаться к исходной переменной.

Пример: Вычислить $\int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}}$.

$$\begin{aligned} \int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}} &= \left\langle \begin{array}{l} 3x - 2 = t^2, \quad 3dx = 2tdt \\ \text{при } x = 1 \quad t = 1, \quad \text{при } x = 6 \quad t = 4 \end{array} \right\rangle = \\ &= \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{tdt}{1 + t} = \frac{2}{3} \int_1^4 \left(1 - \frac{1}{1 + t} \right) dt = \\ &= \frac{2}{3} (t - \ln|1 + t|) \Big|_1^4 = \frac{2}{3} ((4 - \ln 5) - (1 - \ln 2)) = \frac{2}{3} \left(3 + \ln \frac{2}{5} \right). \end{aligned}$$

б) Интегрирование по частям.

Если функции $u(x)$, $v(x)$ и их производные $u'(x)$, $v'(x)$ непрерывны

на отрезке $[a, b]$, то
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример: Вычислить $\int_1^e x \ln x dx$.

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \left\langle \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\rangle = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

3.4. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Вычисление площади плоской фигуры

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

2. Определение длины дуги кривой

Если гладкая кривая задана уравнением $y=f(x)$, то длина l ее дуги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, \text{ где } a \text{ и } b \text{ - абсциссы концов дуги.}$$

3. Нахождение объема тела

Если площадь сечения тела $S(x)$ плоскостью, перпендикулярной оси Ox , является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, то объем

тела вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x) dx$ (формула для нахождения объема тела по известным площадям параллельных сечений).

Если криволинейная трапеция с основанием на оси Ox , ограниченная кривой $y=f(x)$, $x \in [a, b]$, вращается вокруг оси Ox или оси Oy , то объемы тел вращения вычисляются соответственно по формулам

$$V_x = \pi \int_a^b (y(x))^2 dx, \quad V_y = 2\pi \int_a^b x |y(x)| dx, \quad a \geq 0.$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Основные понятия

Определение. Функциональное уравнение $F(x,y,y')=0$ (или в виде, разрешенном относительно производной, $y' = f(x,y)$), связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$ называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Определение. Решением дифференциального уравнения называется функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y=\varphi(x)$ называется в этом случае *интегральной кривой*.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y=\varphi(x,C)$, которая при любом значении параметра C является решением этого дифференциального уравнения.

Определение. Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C_0)$, получаемая из общего решения при конкретном значении параметра $C=C_0$.

Если решение дифференциального уравнения получено в виде, неразрешенном относительно искомой функции $\Phi(x,y,C)=0$, ($\Phi(x,y,C_0)=0$), то его называют *общим (частным) интегралом* дифференциального уравнения.

Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданному *начальному условию* $y_0=y(x_0)$, называется *задачей Коши*. Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую этого уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0)$. Чтобы решить задачу Коши, надо в общее решение подставить начальное условие и найти значение параметра C .

Теорема. Пусть в дифференциальном уравнении $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy . Тогда для любой точки $M_0(x_0,y_0) \in D$ существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

4.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0$ называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Путем деления этого уравнения на произведение $M_2(x) \cdot N_1(y)$ оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными (коэффициент при dx зависит только от x , а при dy – только от y)

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0.$$

Общий интеграл полученного уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C.$$

Если функции $M_2(x)$ и $N_1(y)$ имеют действительные корни, то при интегрировании могут быть потеряны интегральные кривые $x(x)=x_0$ и $y(y)=y_0$, где x_0 – действительный корень функции $M_2(x)$, y_0 – действительный корень функции $N_1(y)$.

Поэтому, получив указанным выше методом разделения переменных общий интеграл уравнения, надо проверить, входят ли в его состав (при подходящих числовых значениях параметра C) упомянутые частные решения. Если входят, то потери решения нет. Если не входят, то их следует включить в состав интеграла.

Пример. Решить уравнение $xydx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$.

Поделим обе части уравнения на $y\sqrt{1-x^2}$, получим $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{dy}{y} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Проинте-

грируем его $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$, $\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C$.

Получим $\ln|y| - \sqrt{1-x^2} = C$ или $y = C_1 e^{\sqrt{1-x^2}}$.

При делении на $y\sqrt{1-x^2}$ мы могли потерять решения: $y=0$, $x=\pm 1$. Решение $y=0$ входит в запись полученного решения при $C_1=0$, а решения $x=\pm 1$ необходимо добавить к общему решению.

Ответ: $y = C_1 e^{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \pm 1$.

Пример. Решить задачу Коши: $y' = (4x+y+1)^2$, $y(0)=1$.

Сделаем подстановку $u(x)=4x+y+1$, тогда учитывая, что $u'=4+y'$ или $y'=u'-4$, приходим к уравнению $\frac{du}{dx}-4=u^2$ или $\frac{du}{u^2+4}=dx$.

Это уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получим:

$$\int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2} \arctg \frac{u}{2} + C, \quad \int dx = x + C \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \arctg \frac{4x+y+1}{2} - x = C_1.$$

Подставляя в общий интеграл начальное условие $y(0)=1$ найдем значение произвольной постоянной $C_1 = \frac{\pi}{8}$. Получим искомый частный

интеграл или решение задачи Коши: $\arctg \frac{4x+y+1}{2} - 2x = \frac{\pi}{4}$.

4.3. Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

С помощью подстановки $\frac{y}{x} = u(x)$ однородное уравнение можно преобразовать в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$.

Поделим обе части уравнения на x^2 , получим $\left(1 + \frac{y}{x}\right)y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

Сделаем подстановку $\frac{y}{x} = u(x)$. Учитывая, что $y' = (xu)' = u + xu'$, получим $(1+u)(u+xu') = \sqrt{1-u^2} + u + u^2$ или $(1+u)xu' = \sqrt{1-u^2}$.

Разделяя переменные, получим $\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{dx}{x}$. Интегрируем это уравнение: $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \int \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u - \sqrt{1-u^2} + C, \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Получаем $\arcsin u - \sqrt{1-u^2} = \ln|x| + C_1$.

Возвращаясь к исходной переменной находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения $\arcsin \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - y^2} - \ln|x| = C_1$.

При решении уравнения с разделяющимися переменными мы делили обе части уравнения на $x\sqrt{1-u^2}$, следовательно, могли потерять решения: $x=0$ и $u=\pm 1$ ($y=\pm x$). Функция $x=0$ не является решением исходного уравнения, а функции $y=\pm x$ удовлетворяют исходному уравнению. Их нельзя получить из найденного общего интеграла и, следовательно, необходимо добавить в запись решения.

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - y^2} - \ln|x| = C_1, y = \pm x.$$

4.4. Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно содержит искомую функцию и ее производную в первой степени, т. е. имеет вид $y' + P(x)y = f(x)$.

При $f(x) \equiv 0$ уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае, *линейным неоднородным*. Если уравнение линейное однородное, то оно является уравнением с разделяющимися переменными, и способ решения таких уравнений рассмотрен выше.

Линейное неоднородное уравнение можно решить с помощью подстановки $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ (здесь u и v две новые функции). Этот метод решения называют также *методом Бернулли*.

Учитывая, что $y' = u'v + uv'$, приведем неоднородное уравнение к виду $v(u' + P(x)u) + (v'u - f(x)) = 0$. За счет выбора функции $u(x)$ можно обратить в ноль первую скобку такого уравнения, для этого надо решить уравнение $u' + P(x)u = 0$ и выбрать частное решение. Затем подставим найденную функцию $u(x)$ во вторую скобку, и решив полученное уравнение, найдем общее решение для функции $v(x)$, тем самым, найдем общее решение исходного уравнения.

Пример. Решить уравнение $(1+x^2) \cdot y' = 2xy + (1+x^2)^2$.

Поделим обе части уравнения на $(1+x^2)$ и запишем уравнение в виде $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$. Это линейное неоднородное уравнение. Сделаем подстановку $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u'v + uv'$ и запишем уравнение в виде

$$v(u' - \frac{2x}{1+x^2}u) + (v'u - 1 - x^2) = 0. \quad (*)$$

Найдем $u(x)$ как частное решение уравнения $u' - \frac{2x}{1+x^2}u = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Имеем $\frac{du}{u} = \frac{2xdx}{1+x^2}$. Ин-

тегрируя, получим $u(x)=C \cdot (1+x^2)$. Возьмем в качестве функции $u(x)$ частное решение при $C=1$ $u(x)=(1+x^2)$ и подставим его в уравнение (*), получим $v'=1$. Общее решение этого уравнения есть $v(x)=x+C$. Таким образом общее решение исходного уравнения будет $y=(x+C)(1+x^2)$.

Указанным способом можно решить и уравнение Бернулли, которое имеет вид $y'+P(x)y=Q(x) \cdot y^m$, $m \neq 0$, $m \neq 1$.

4.5. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка

Уравнение вида $y^{(n)}+p_1(x) \cdot y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x) \cdot y'+p_n(x) \cdot y=f(x)$ где $p_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ непрерывные функции на некотором интервале, называется *линейным неоднородным уравнением n -го порядка* (искомая функция и все ее производные входят в запись уравнения в первой степени).

Если на рассматриваемом интервале $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*.

Отметим, что линейное уравнение, согласно теореме Коши, имеет единственное решение при любых начальных условиях

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

если x_0 принадлежит рассматриваемому интервалу.

4.5.1 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)}+a_1 \cdot y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1} \cdot y'+a_n \cdot y=0$$

где a_i , $i = \overline{1, n}$ – действительные постоянные.

Для уравнений этого вида есть простой алгоритм отыскания n линейно независимых решений или фундаментальной системы решений. Для этого заменяем $y^{(i)}$ ($i = \overline{0, n}$), $y^{(0)}=y$ на λ^i и получаем уравнение

$$\lambda^n+a_1 \cdot \lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1} \cdot \lambda+a_n=0,$$

которое называется характеристическим уравнением.

Это уравнение n -й степени с действительными коэффициентами и, следовательно, имеет n корней.

• Каждому действительному корню λ_0 кратности r соответствует r линейно независимых решений вида

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{r-1}e^{\lambda_0 x}.$$

• Каждой паре комплексно-сопряженных корней вида $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности s соответствует $2s$ линейно независимых решений вида

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{s-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{s-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Таким образом, если мы найдем все корни характеристического уравнения, то сможем записать общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Остановимся несколько подробнее на однородных уравнениях второго порядка $y'' + py' + q = 0$.

Его характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. При отыскании корней этого квадратного уравнения могут встретиться три случая:

• корни действительные и различные: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), тогда

$$y_{o.o} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

• корни действительные равные: $\lambda_1 = \lambda_2$, тогда

$$y_{o.o} = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x);$$

• корни комплексно-сопряженные $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, тогда

$$y_{o.o} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример. Решить уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, его корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$. Тогда $y_{o.o} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Тогда $y_{o.o} = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$.

Пример. Решить уравнение $y'' + y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Тогда $y_{o.o} = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$.

4.5.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Структура общего решения неоднородного линейного уравнения следующая $y_{o.n} = y_{o.o} + y_{ч.н}$, где $y_{o.o}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_{ч.н}$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения.

Остановимся на случае, когда правая часть уравнения имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m , соответственно.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения с такой правой частью можно применить метод неопределенных коэффициентов. Он заключается в том, что частное решение ищется «в том же виде, какова правая часть», только многочлены берутся с неопределенными коэффициентами, а именно:

- Если $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y_{ч.н} = e^{\alpha x} [P_N(x) \cos \beta x + Q_N(x) \sin \beta x]$, где $N = \max(n, m)$, $P_N(x)$ и $Q_N(x)$ многочлены степени N с неопределенными коэффициентами.

- Если $\alpha \pm \beta i$ – корни характеристического уравнения кратности k , то частное решение ищем в виде $y_{ч.н} = x^k \cdot e^{\alpha x} [P_N(x) \cos \beta x + Q_N(x) \sin \beta x]$, где $N = \max(n, m)$, $P_N(x)$ и $Q_N(x)$ многочлены степени N с неопределенными коэффициентами.

После подстановки такого решения в уравнение, для нахождения неопределенных коэффициентов надо приравнять коэффициенты при одинаковых линейно независимых функциях, имеющих в левой и правой частях уравнения.

Пример. Решить уравнение $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.

Для функции $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ имеем $\alpha = 0, \beta = 0, n = 2$.

Характеристическое уравнение есть $2\lambda^2 + 5\lambda = 0$, его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{5}{2}$, т. е. $\alpha \pm i\beta = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности. Частное решение будем искать в виде $y_{ч.н} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$.

Найдем $y'_{ч.н} = 3Ax^2 + 2Bx + C, y'' = 6Ax + 2B$.

Подставляем в уравнение $12Ax + 4B + 15Ax^2 + 10Bx + 5C = 5x^2 - 2x - 1$, или $15Ax^2 + (12A + 10B)x + (4B + 5C) = 5x^2 - 2x - 1$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (x^0, x^1, x^2 – линейно независимые функции), получим

$$\begin{cases} 15A = 5 \\ 12A + 10B = -2. \\ 4B + 5C = -1 \end{cases}$$

Решая систему, находим $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{5}$, $C = \frac{7}{25}$. Таким образом,

общее решение исходного уравнения будет $y_{o.н} = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$.

Пример. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$.

Правая часть уравнения запишется $2\sin x = e^{0x} \cdot (0\cos x + 2\sin x)$, и в предыдущих обозначениях имеем $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_n(x) = 0$, $m = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{ч.н} = A\cos x + B\sin x$.

Имеем $y' = -A\sin x + B\cos x$, $y'' = -A\cos x - B\sin x$.

Подставляя эти выражения в уравнение, получаем:

$$-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x = 2\sin x$$

или

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 2\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в правой и левой частях уравнения, получим $\begin{cases} A - 3B = 0 \\ 3A + B = 2 \end{cases}$. Находим: $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{1}{5}$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения будет

$$y_{o.н} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

5. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. Найти пределы (табл. 4).
2. Найти производные первого порядка заданных функций (табл. 5, а) и производную второго порядка (табл. 5, б).
3. Найти производную второго порядка параметрически заданной функции (табл. 6).
4. Исследовать функцию, построить ее график (табл. 7).
5. Найти неопределенные интегралы (табл. 8).
6. Вычислить определенный интеграл (табл. 9).
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (табл. 10).
8. Определить типы дифференциальных уравнений и решить их (табл. 11).
9. Решить задачу Коши (табл. 12).
10. Найти частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами при заданных начальных условиях (табл. 13).

5.1. Варианты заданий контрольной работы

Таблица 4

Задание 1

Номера задач	а)	б)
1	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{4 - x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}$
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x + 7}{4x^2 + 7x - 9}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$
3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x + 9}{8x^2 + 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} 4x}$
4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 9}{6x^3 + 8x + 7}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{3x^2}$
5	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 8x}{\arcsin 7x}$

Номера задач	а)	б)
6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x^2 + 8}{4x^4 + 6x^2 + 2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{6x}$
7	$\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{1}{x-8} - \frac{16}{x^2-64} \right)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 3x}$
8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 3}{4x^3 - 5x + 6}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$
9	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{arctg} 3x}$
10	$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

Таблица 5

Задание 2

Номера задач	а)	б)
1	$y = \log_3 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) \right)$	$y = e^{\sin x}$
2	$y = 4^{\cos x^2} \cdot \operatorname{arctg}(\ln(\operatorname{tg} x))$	$y = \arcsin 8x$
3	$y = \log_6 \left(\operatorname{tg} \left(\sqrt{9x - x^2} \right) \right)$	$y = x \cdot \sin x 2x$
4	$y = (\cos \sqrt{x^2 - 3x + 5})^9$	$y = \operatorname{arctg} 3x$
5	$y = \operatorname{arctg} \sqrt[4]{4x^4 + 4}$	$y = x \cdot \sin x 2x$
6	$y = \cos \left(5x^3 - 3x^2 + 2x \right)$	$y = \left(1 + x^2 \right)^{\operatorname{arctg} x}$

Таблица 5

Номера задач	а)	б)
7	$y = \ln\left(\sin\left(\sqrt{3x - x^2}\right)\right)$	$y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
8	$y = \sin\left(\log_9\left(\sqrt{\cos x}\right)\right)$	$y = \ln \operatorname{tg} x$
9	$y = \operatorname{arctg}\left(4^{\cos x}\right)$	$y = xe^x$
10	$y = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln(\operatorname{arctg} x)$	$y = x\sqrt{1 + x^2}$

Таблица 6

Задание 3

Номера задач	$y'' - ?$	Номера задач	$y'' - ?$
1	$\begin{cases} y = \ln(1 + t^2) \\ x = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$	2	$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = \sqrt[4]{t} \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \\ y = \arcsin t \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$	6	$\begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = \operatorname{arctg} x \end{cases}$	8	$\begin{cases} x = t^3 + 8t \\ y = t^5 + 2t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = 2^{-t} \sin t \\ y = 2^t \cos t \end{cases}$	10	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{1 + t^2} \end{cases}$

Задание 4

Номера задач	Функция	Номера задач	Функция
1	$y = x^2 + 8 \ln x$	2	$y = \ln \frac{1}{1+x^2}$
3	$y = e^x - e^{-x}$	4	$y = 3x + \frac{1}{3x}$
5	$y = \frac{x}{x^2 + 4}$	6	$y = \ln^2 x$
7	$y = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \cos x$	8	$y = \frac{x}{x^2 - 4}$
9	$y = \ln x + 0,4x + 149$	10	$y = e^x - x - 16$

Задание 5

Номера задач	Интегралы	Номера задач	Интегралы
1	а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$ б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$	2	а) $\int e^x \ln(1+x) dx$ б) $\int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg} x + 1)}$
3	а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$ б) $\int x 3^x dx$	4	а) $\int \frac{\cos 3x}{4 + \sin 3x} dx$ б) $\int \frac{dx}{\cos^3 x (3 \operatorname{tg} x + 1)}$
5	а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ б) $\int x^2 e^{3x} dx$	6	а) $\int \frac{\cos 3x dx}{4 + \sin 3x}$ б) $\int x \cdot \arcsin x dx$
7	а) $\int \frac{(x + \operatorname{arctg} x) dx}{1+x^2}$ б) $\int x \ln(x^2 + 1) dx$	8	а) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ б) $\int x \sin x \cos x dx$
9	а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2 \cos x}}$ б) $\int x^2 \sin 4x dx$	10	а) $\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x} dx$ б) $\int x \ln^2 x dx$

Задание 6

Номера задач	Интеграл	Номера задач	Интеграл
1	$\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$	2	$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$
3	$\int_0^{\pi/2} e^x \sin 2x dx$	4	$\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctg x dx$
5	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$	6	$\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$
7	$\int_1^e \ln^2 x dx$	8	$\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$
9	$\int_1^{e^4} \sqrt{x} \ln x dx$	10	$\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$

Задание 7

Номера задач	Уравнения границ	Номера задач	Уравнения границ
1	$y = x^2, y = 6 - x, y = 0$	2	$y^2 = 9x, y = x + 2$
3	$y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{1}{2}x^2$	4	$y = x^2 + 3x, y = -x^3 - 3x$
5	$y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$	6	$y = x^2, y = \frac{x^3}{3}$
7	$y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$	8	$y^2 = x + 1, y = x^2 + 2x + 1$
9	$y^2 = 4x, x^2 = 4y$	10	$y = \frac{1}{2+x^2}, y = \frac{x^2}{24}$

Задание 8

Номера задач	Уравнения	Номера задач	Уравнения
1	а) $y' = a^{x+y}$ ($a > 0, a \neq 1$) б) $xy' = y(\ln y - \ln x)$	2	а) $y \ln y dx + x dy = 0$ б) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$
3	а) $yy' - 2y + x = 0$ б) $y'(x + y) = x - y$	4	а) $(1 + y^2)dx = x dy$ б) $(x - y)dx + x dy = 0$
5	а) $yy' + xe^{-y} = 0$ б) $(x + y + 1) = (2x + 2y - 1)y'$	6	а) $y' - 2y \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x$ б) $xyy' = x^2 + y^2$
7	а) $y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y = 0$ б) $(2x^2 + xy)y' = xy + y^2$	8	а) $e^x \sin^3 y = -(1 + e^{2x}) \cos x \cdot y'$ б) $xy' = y + 2\sqrt{xy}$
9	а) $2x\sqrt{1 - y^2} = y'(1 + x^2)$ б) $xy' = y(\ln y - \ln x)$	10	а) $e^y(1 + x^2)dy = 2x(1 + e^y)dx$ б) $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$

Задание 9

Номера задач	Уравнение	Номера задач	Уравнение
1	$y' \cos x - y \sin x = 2x,$ $y(0) = 0$	2	$y' \sin x - y \cos x = 1,$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
3	$xy' - y - x^3 = 0,$ $y(2) = 4$	4	$y' - \frac{1}{x}y = -y^2,$ $y(1) = -1$
5	$y' - y \cos x = y^2 \cos x,$ $y(0) = 1$	6	$xy' - 2y = x^3 \cos x,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi^2$
7	$y' + \frac{2}{x}y = 3x^2 \sqrt[4]{y^3},$ $y(1) = 1$	8	$y' - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$ $y(0) = 1$
9	$x^3 y^2 y' + x^2 y^3 = 1,$ $y(2) = 1$	10	$y' + y \cos x = \cos x,$ $y(0) = 1$

Задание 10

Номера задач	Уравнение	Номера задач	Уравнение
1	$y'' + 5y' + 6 = 2xe^{-3x}$	2	$y'' - 8y + 16 = 2 \cos 4x$
3	$y'' + 16y = 2 \sin 4x$	4	$y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x} \sin x$
5	$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$	6	$y'' - 5y + 6y = xe^{2x}$
7	$y'' + y = 4x \cos x$	8	$y'' + 4y = \cos 2x$
9	$y'' - 3y' = e^{3x}$	10	$y'' - 2y' = 3xe^{2x}$

5.2. Пример выполнения контрольной работы

Задания:

№ 1. Найти пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot x}{1 - \cos 8x}$.

№ 2. Найти производные заданных функций:

а) $y = 2^{\operatorname{ctg} \sqrt{x}} \cdot \arcsin(\operatorname{tg}^3(x^2 - 5x))$ - y' , б) $y = x^2 \cdot \ln x$ - y'' ?

№ 3. Найти вторую производную параметрически заданной функции $y(x)$:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = t \cdot \arcsin t \end{cases}$$

№ 4. Исследовать функцию, построить график функции

№ 5. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$, б) $x^3 \ln 2x dx$.

№ 6. Вычислить определенный интеграл $\int_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$.

№ 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $(y-2)^2 = x-1$, касательной к ней в точке с ординатой $y_0=3$ и осью Ox .

№ 8. Определить типы дифференциальных уравнений и решить их

а) $(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$; б) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

№ 9. Решить задачу Коши $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

№ 10. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y'' - 3y' + 2y = 3xe^{2x} + 2\sin x$.

Решение:

Задание № 1.

Найти пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot x}{1 - \cos 8x}$.

Решение:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6}$. При подстановке $x=2$ получаем неопределен-

ность « $\frac{0}{0}$ ». Следовательно, $x=2$ – корень многочленов в числителе и знаменателе. Разложим их на множители: $x^2 + 3x - 10 = 0$ по теореме Виета $x_1 = -5$, $x_2 = 2$. Следовательно, $x^2 + 3x - 10 = (x - 5) \cdot (x - 2)$.

$x^2 + x - 6 = 0$, по теореме Виета $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Получаем $x^2 + x - 6 = (x + 3) \cdot (x - 2)$.

Тогда: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 5)(x - 2)}{(x + 3)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{x + 3} = \frac{7}{5}$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot x}{1 - \cos 8x}$.

При подстановке $x=0$ получаем неопределенность « $\frac{0}{0}$ ». Приме-

ним формулу понижения степени в знаменателе $1 - \cos 8x = 2\sin^2 4x$ и умножим числитель и знаменатель на x :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot x}{1 - \cos 8x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot x^2}{2\sin^2 4x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot x^2}{x \cdot 2\sin^2 4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2\sin^2 4x} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{используем следствие из первого} \\ \text{замечательного предела : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \end{array} \right] = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2\sin^2 4x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16x^2}{16\sin^2 4x} = \frac{1}{32} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{4x}{\sin 4x} \right]^2 = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Используем 1}^{\text{й}} \text{ замечательный предел} \\ \lim_{U \rightarrow 0} \frac{\sin U}{U} = 1, \text{ где } U - \text{непрерывная функция} \end{array} \right] = \frac{1}{32} \cdot 1^2 = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Задание № 2

Найти производные заданных функций:

а) $y = 2^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}} \cdot \arcsin(\operatorname{tg}^3(x^2 - 5x)) - y'$?

б) $y = x^2 \cdot \ln x - y''$?

Решение:

а) $y = 2^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}} \cdot \arcsin(\operatorname{tg}^3(x^2 - 5x))$.

Воспользуемся правилами дифференцирования и формулой производной для сложной функции $(F[f(x)])' = F_f' \cdot f_x'$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(2^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}} \cdot \arcsin(\operatorname{tg}^3(x^2 - 5x)) \right)' = \\ &= \left(2^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}} \right)' \cdot \arcsin(\operatorname{tg}^3(x^2 - 5x)) + 2^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}} \cdot \left(\arcsin(\operatorname{tg}^3(x^2 - 5x)) \right)' = \\ &= 2^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{(-1)}{\sin^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \arcsin(\operatorname{tg}^3(x^2 - 5x)) + \\ &+ 2^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^6(x^2 - 5x)}} \cdot 3\operatorname{tg}^2(x^2 - 5x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 - 5x)} \cdot (2x - 5). \end{aligned}$$

б) $y = x^2 \cdot \ln x$.

Для нахождения второй производной сначала необходимо найти первую производную.

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 \cdot \ln x)' = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = \\ &= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x(2 \ln x + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = (x(2 \ln x + 1))' = (x)' \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot (2 \ln x + 1)' = \\ &= 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot \left(\frac{2}{x} + 0 \right) = 2 \ln x + 3. \end{aligned}$$

Задание № 3.

Найти вторую производную параметрически заданной функции $y(x)$:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = t \cdot \arcsin t \end{cases}$$

Решение:

Для нахождения второй производной необходимо прежде найти первую производную по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t = 1 \cdot \arcsin t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \quad x'_t = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$\text{Получаем } y'_x = \frac{\arcsin t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}} = \frac{-\arcsin t \cdot \sqrt{1-t^2}}{t} - 1.$$

Найдем вторую производную по формуле: $y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

$$\begin{aligned} (y'_x)'_t &= \left(\frac{-\arcsin t \cdot \sqrt{1-t^2}}{t} - 1 \right)' = \\ &= \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \sqrt{1-t^2} + \arcsin t \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right] \cdot t - \arcsin t \cdot \sqrt{1-t^2}}{t^2} = \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\arcsin t \cdot \sqrt{1-t^2}}{t^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_x &= \frac{-\frac{1}{t} + \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\arcsin t \cdot \sqrt{1-t^2}}{t^2}}{\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}} = \\ &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2} - \frac{\arcsin t}{t} - \frac{\arcsin t \cdot (1-t^2)}{t^3}. \end{aligned}$$

Задание № 4. Исследовать функцию, построить график функции

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^3}.$$

Решение:

1. Область определения функции – вся числовая ось, кроме точки $x=0$; $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Найдем в точке $x = 0$ левосторонний и правосторонний пределы функции: $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -\infty$.

Таким образом, в точке $x = 0$ данная функция терпит бесконечный разрыв, а график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

2. Определим, имеет ли график функции наклонные асимптоты. Их уравнение имеет вид $y = kx + b$. Найдем k и b :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-2}{x^4} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-2}{x^3} = 0.$$

Таким образом, и при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

3. Найдем $f(-x) = \frac{3(-x)-2}{(-x)^3} = \frac{3x+2}{x^3}$. Поскольку $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то данная функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида).

4. С осью Oy график данной функции не пересекается, поскольку точка $x = 0$ не входит в область определения функции. Чтобы найти точки пересечения графика с осью Ox , решим уравнение $\frac{3x-2}{x^3} = 0$. Оно имеет единственный корень $x=2/3$. Значит, график функции пересекает ось Ox в точке $(2/3; 0)$.

5. Найдем первую производную:

$$f'(x) = \left(\frac{3x-2}{x^3} \right)' = \frac{3x^3 - 3x^2(3x-2)}{x^6} = \frac{6(1-x)}{x^4}.$$

Первая производная обращается в бесконечность при $x = 0$, но эта точка не входит в область определения функции. Поэтому данная функция имеет единственную критическую точку $x = 1$, в которой $f'(x) = 0$.

Функция возрастает на промежутке, где $f'(x) > 0$. В данном случае промежуток возрастания $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Функция убывает там, где $f'(x) < 0$, т. е. $x \in (1, +\infty)$. Таким образом, в точке $x = 1$ данная функция имеет максимум: $\max f(x) = f(1) = 1$.

6. Найдем вторую производную:

$$f''(x) = 6 \left(\frac{1-x}{x^4} \right)' = 6 \frac{-x^4 - 4x^3(1-x)}{x^8} = \frac{6}{x^5} (3x-4).$$

Как в пункте 5, исследуем лишь точку, в которой $f''(x) = 0$, т. е. точку $x=4/3$. График функции является выпуклым вверх, если $f''(x) < 0$; в данном случае при $x \in (0, 4/3)$. График функции является выпуклым вниз, где $f''(x) > 0$; для данной функции при $x \in (-\infty, 0) \cup (4/3, +\infty)$.

Точка $x=4/3$ является точкой перегиба; $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{27}{32}$. График функции

изображён на рис. 4.

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы

а) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$, б) $\int x^3 \ln 2x dx$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} &= \\ &= \left\langle \begin{aligned} \int \sin 2x dx &= 2 \sin x \cos x dx = -2 \cos x d \cos x = \\ &= -d(\cos^2 x) = -d(1 + \cos^2 x) \\ &\text{т.е. сделав подстановку } t = 1 + \cos^2 x, \text{ получим} \end{aligned} \right\rangle = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{1 + \cos^2 x} + C. \end{aligned}$$

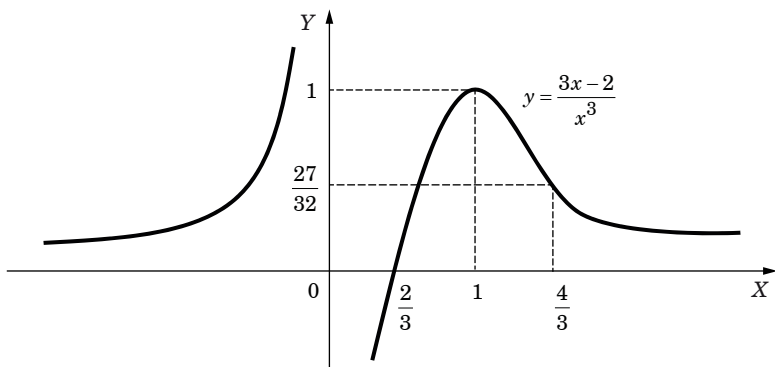


Рис. 4. График функции

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \int x^3 \ln 2x dx &= \left\langle \begin{array}{l} \text{применим формулу интегрирования по частям:} \\ u = \ln 2x, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad dv = x^3 dx, \quad v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\rangle = \\
 &= \frac{x^4}{4} \ln 2x - \int \frac{x^4}{4} \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln 2x - \frac{x^4}{16} + C.
 \end{aligned}$$

Задание № 6. Вычислить определенный интеграл $\int_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$.

Решение:

$$\begin{aligned}
 \int_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}} &= \left\langle \begin{array}{l} \text{сделаем подстановку:} \\ x+6=t^2, \quad x=t^2-6, \quad dx=2tdt \\ \text{при } x=3, \quad t=3; \quad \text{при } x=10, \quad t=4 \end{array} \right\rangle = \int_3^4 \frac{2tdt}{t(t^2-7)} = \\
 &= 2 \int_3^4 \frac{dt}{t^2-7} = \frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}} \right| \Big|_3^4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\ln \left| \frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}} \right| - \ln \left| \frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} \right| \right) = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{7}} \left(\ln \frac{4-\sqrt{7}}{9} - \ln \frac{3-\sqrt{7}}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{7}} \ln \frac{2(4-\sqrt{7})}{9(3-\sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \ln \frac{5+\sqrt{7}}{9}.
 \end{aligned}$$

Задание № 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $(y-2)^2 = x-1$, касательной к ней в точке с ординатой $y_0=3$ и осью Ox (рис. 5)

Решение:

Форма фигуры не позволяет непосредственно применить указанные выше формулы. Однако если рассматривать фигуру относительно оси Oy , то можно применить эти формулы. Итак, пусть y – независимая переменная. Уравнение параболы запишем в виде $x=y^2-4y+5$. Найдем

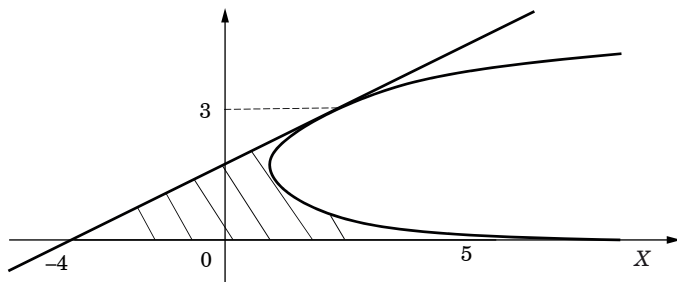


Рис. 5. Площадь фигуры

уравнение касательной к параболе. Оно имеет вид $x - x_0 = x'_0 \cdot (y - y_0)$. Так как $x'_y = 2(y - 2)$, то $x'_0 = x' \Big|_{y=3} = 2$. Найдя абсциссу точки касания $x = 2$, получаем уравнение касательной $x - 2 = 2(y - 3)$, или $x = 2y - 4$. Тогда имеем

$$S = \int_0^3 ((y^2 - 4y + 5) - (2y - 4)) dy = \int_0^3 (y - 3)^2 dy = \frac{1}{3} (y - 3)^3 \Big|_0^3 = 9.$$

Задание № 8. Определить типы дифференциальных уравнений и решить их а) $(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$; б) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение:

а) Перепишем уравнение в виде $(x^2 - 1)dy + 2xydx = 0$ $\left(y' = \frac{dy}{dx} \right)$.

Выражения при dy и dx являются множителями, зависящими только от x или только от y . Значит, это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $(x^2 - 1) \cdot y$, получим уравнение с разделенными переменными

$\frac{dy}{y} + \frac{2xdx}{x^2 - 1} = 0$. Интегрируем

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{2xdx}{x^2 - 1}, \quad \ln|y| = -\ln|x^2 - 1| + \ln C, \quad y = \frac{C}{x^2 - 1} - \text{общее решение}$$

уравнения. При делении на y , мы могли потерять решение $y = 0$, однако оно входит в запись общего решения при $C = 0$.

Ответ: $y = \frac{C}{x^2 - 1}$.

б) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$. Поделим обе части уравнения на x , получим

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}. \quad \text{Это уравнение вида } y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ т. е. однородное.}$$

С помощью подстановки $u(x) = \frac{y}{x}$ его можно свести к уравнению

с разделяющимися переменными. Положим $u = \frac{y}{x}$, или $y = xu$. Тогда

$y' = xu' + u$. Подставляя в уравнение выражения для y и y' , получаем

$$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}. \quad \text{Разделяем переменные } \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}, \text{ интегрируя,}$$

находим $\arcsin u = \ln Cx$ $\left(e^{-\frac{\pi}{2}} \leq Cx \leq e^{\frac{\pi}{2}} \right)$. Подставляя $u = \frac{y}{x}$, найдем

общее решение $y = x \sin(\ln Cx)$. При разделении переменных мы могли потерять решение $\sqrt{1-u^2} = 0$ или $y = \pm x$. Проверка показывает, что $y = \pm x$ являются решениями уравнения и их следует добавить к найденному общему решению.

Ответ: $y = x \sin(\ln Cx)$, $y = \pm x$.

Задание № 9. Решить задачу Коши: $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Решение: Данное уравнение линейное, найдем его общее решение методом Бернулли. Сделаем подстановку $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u'v + uv'$. Подставим эти выражения в уравнение, получим

$u(u' + u \cdot \operatorname{tg} x) + uv' = \frac{1}{\cos x}$ (*). Найдем функцию $u(x)$ как частное решение уравнения $u' + u \cdot \operatorname{tg} x = 0$. Это уравнение с разделяющимися

переменными. Разделим переменные $\frac{du}{u} = -\operatorname{tg} x \cdot dx$ и проинтегрируем полученное уравнение $\int \frac{du}{u} = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$, $\ln |u| = \ln |\cos x| + \ln C$,

$u = \cos x$ ($C=1$). Подставляя $u = \cos x$ в уравнение (*), получим второе дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, из

которого найдем функцию $v(x)$: $v' \cos x = \frac{1}{\cos x}$, т. е. $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$, и,

следовательно $v = \operatorname{tg} x + C$. Таким образом, общее решение исходного уравнения $y = uv$ или $y = \cos x \cdot (\operatorname{tg} x + C)$. Для решения задачи Коши, нахождения частного решения уравнения, надо выбрать значение произвольной постоянной C так, чтобы выполнялось начальное условие

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Имеем: $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+C)$, $C=1$. Таким образом, искомое частное решение есть $y = \cos x \cdot (\operatorname{tg} x + 1)$ или $y = \sin x + \cos x$.

Ответ: $y = \sin x + \cos x$.

Задание № 10. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y'' - 3y' + 2y = 3xe^{2x} + 2\sin x$.

Решение: Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ и найдем его корни $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$,

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Общее решение однородного уравнения будет $y_{o.o} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Правую часть неоднородного уравнения запишем в виде

суммы двух функций $f_1(x) = 3x \cdot e^{2x}$ и $f_2(x) = 2\sin x$, для которых частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов. Частное решение, соответствующее правой части $f_1(x)$, ищем в виде $y_{\text{ч.н.1}} = x(Ax + B)e^{2x}$ (т. к. $f_1(x) = P_1(x)e^{\alpha x}$, $P_1(x)$ – многочлен первой степени, $\alpha = 2$ равно корню кратности один характеристического многочлена, поэтому в частном решении добавлен множитель x). Имеем

$$y_{\text{ч.н.1}} = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x},$$

$$y'_{\text{ч.н.1}} = (2Ax + B)e^{2x} + 2(Ax^2 + Bx)e^{2x} = [2Ax^2 + 2(A + B)x + B]e^{2x},$$

$$\begin{aligned} y''_{\text{ч.н.1}} &= (4Ax + 2A + 2B)e^{2x} + 2[2Ax^2 + 2(A + B)x + B]e^{2x} = \\ &= [4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B]e^{2x}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в неоднородное уравнение (с правой частью $f_1(x)$), и сокращая на e^{2x} , получим $4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B - 6Ax^2 - (6A + 6B)x - 3B + 2Ax^2 + 2Bx = 3x$ или $2Ax + 2A + B = 3x$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и находим $A = \frac{3}{2}$, $B = -3$. Таким образом, $y_{\text{ч.н.1}} = \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right)e^{2x}$.

Частное решение, соответствующее правой части $f_2(x)$, ищем в виде $y_{\text{ч.н.2}} = A\cos x + B\sin x$ (т. к. $f_2(x) = e^{0x} \cdot Q_1(x)\sin x$, $Q_1(x)$ – многочлен нулевой степени, числа $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не являются корнями характеристического многочлена, поэтому умножать на x^k не надо). Имеем $y_{\text{ч.н.2}} = A\cos x + B\sin x$, $y'_{\text{ч.н.2}} = -A\sin x + B\cos x$, $y''_{\text{ч.н.2}} = -A\cos x - B\sin x$.

Подставляя эти выражения в неоднородное уравнение (с правой частью $f_2(x)$), получим $-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x = 2\sin x$ или $(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 2\sin x$.

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в обеих частях равенства, получим систему линейных уравнений для нахождения

неопределенных коэффициентов A и B :
$$\begin{cases} A - 3B = 0 \\ 3A + B = 2 \end{cases}$$
 Отсюда находим

$A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{1}{5}$ и $y_{\text{ч.н.2}} = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$. Следовательно, общее

решение исходного дифференциального уравнения есть $y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н.1}} + y_{\text{ч.н.2}}$ или $y_{\text{о.н}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right)e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кудрявцев, В. А.* Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М.: АСТ, 2005.
2. *Бугров, Я. С.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Юрайт, 2020.
3. *Владимирский, Б. М.* Математика. Общий курс / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. – СПб.: Лань, 2002.
4. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Мир и образование, 2023.
5. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М.; Лань, 2023.
6. *Щипачев В. С.* Высшая математика / В. С. Щипачев. – М.: Юрайт, 2019.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. В 2-х т. Т. 1. – СПб.: Лань, 2015.
8. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Требования к оформлению контрольных работ	3
1. Введение в математический анализ. Основные понятия	5
1.1. Понятие функции	5
1.2. Предел функции	6
1.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	7
1.4. Непрерывность функции в точке.....	9
1.5. Точки разрыва функции	10
2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	12
2.1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл	12
2.2. Производная сложной функции	14
2.3. Производная параметрически заданной функции	14
2.4. Производные высших порядков	14
2.5. Дифференциал функции	16
2.6. Правило Лопитала для раскрытия неопределенностей.....	16
2.7. Исследование функций с помощью производных	17
3. Интегральное исчисление функций одной переменной	20
3.1. Основные понятия	20
3.2. Методы интегрирования	21
3.3. Определенный интеграл и методы его вычисления	22
3.4. Геометрические приложения определенного интеграла.....	25
4. Дифференциальные уравнения	26
4.1. Основные понятия	26
4.2. Уравнения с разделяющимися переменными	26
4.3. Однородные уравнения	28
4.4. Линейные уравнения	29
4.5. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка.....	30
4.5.1 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами	30
4.5.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами	31
5. Задания к контрольной работе.....	34
5.1. Варианты заданий контрольной работы.....	34
5.2. Пример выполнения контрольной работы	40
Библиографический список	50

Учебное издание

Пастухова Е. В.,

Романова Ю. С.,

Состина Е. В.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Публикуется в авторской редакции
Компьютерная верстка *С. Б. Мацапуры*

Подписано к печати 13.09.2023. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 0,0. Уч.-изд. л. 0,0.
Тираж 50 экз. Заказ № 000.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А