

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”  
Кафедра «Высшая математика»

---

**Р.С. Кударов**

**Задание**  
**для контрольной работы**  
*по дисциплине*  
**«МАТЕМАТИКА» (Б1.О.7)**

для специальности

(23.05.04) «Эксплуатация железных дорог»

по специализациям  
«Магистральный транспорт»  
«Грузовая и коммерческая работа»  
«Пассажирский комплекс железнодорожного транспорта»  
«Транспортный бизнес и логистика»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 6 – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Санкт-Петербург 2022

**Контрольная работа состоит из 10 задач.**

**Работа допускается к защите, если она содержит пять (и более) полностью и правильно решённых задач.**

**Работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится менее пяти решённых задач.**

**Номер упражнения выбирается по последней цифре зачетной книжки.**

### Задача 1

6.01-6.10 (а, б). Решить задачу Коши.

6.01. а)  $y' = \frac{5}{2x+3}$ ,  $y(-1) = 1$ .

б)  $y'' = 3x^2 - x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

6.02. а)  $y' = \frac{10}{1+x^2}$ ,  $y(0) = 1$ .

б)  $y'' = \sin 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

6.03. а)  $y' = \frac{11}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $y(0) = 1$ .

б)  $y'' = 2x - 5$ ,  $y(1) = 7$ ,  $y'(1) = 3$ .

6.04. а)  $y' = 3e^x + 1$ ,  $y(0) = 1$ .

б)  $y'' = \frac{x}{6} + \sin x$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 1$ .

6.05. а)  $y' = \frac{11}{x-4}$ ,  $y(5) = 1$ .

б)  $y'' = x^3 + 2x - 3$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

6.06. а)  $y' = \frac{5}{\cos^2 2x}$ ,  $y(0) = 3$ .

б)  $y'' = \cos 2x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

6.07. а)  $(x+1)dx + ydy = 0$ ,  $y(0) = 1$ .

б)  $y'' = 2x^2 - 3x + 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

6.08. а)  $(x^2 + 3)dx + dy = 0$ ,  $y(0) = 2$ .

б)  $y'' = 6x + x^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

6.09. а)  $\frac{dx}{x} - 2dy = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

б)  $y'' = \sin 3x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

6.10. а)  $3x^3 dx = 2x^2 dy$ ,  $y(1) = 2$ .

б)  $y'' = 7x + 3\sin x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

## Задача 2

6.11-6.20. Составить таблицу численного решения методом Эйлера дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$  при начальном условии  $y(x_0)=y_0$  на отрезке  $[a,b]$  с шагом  $h$ . По полученным данным построить интегральную кривую.

Задачи	$f(x,y)$	$[a,b]$	$x_0$	$y_0$	$h$
6.101.	$\frac{\left(\frac{1}{y} - 2y\right)}{(4x + 2)}$	[2,4]	2	1	0.2
6.102.	$\frac{\left(\frac{3}{y} - y\right)}{(2x + 3)}$	[2,3]	2	2	0.1
6.103.	$\frac{\left(\frac{1}{y} - 3y\right)}{(6x + 4)}$	[3,5]	3	2	0.2
6.104.	$\frac{\left(\frac{2}{y} - 2y\right)}{(4x + 5)}$	[1,2]	1	3	0.1
6.105.	$\frac{\left(\frac{6}{y} - y\right)}{(2x + 6)}$	[1,3]	1	6	0.2
6.106.	$\frac{\left(\frac{2}{y} - 3y\right)}{(6x + 7)}$	[2,3]	2	4	0.1
6.107.	$\frac{\left(\frac{1}{y} - 2y\right)}{(4x + 1)}$	[2,4]	2	2	0.2
6.108.	$\frac{\left(\frac{2}{y} - y\right)}{(2x + 2)}$	[2,3]	2	1	0.1
<b>6.109.</b>	$\frac{\left(\frac{1}{y} - 3y\right)}{(6x + 2)}$	<b>[3,5]</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>0.2</b>
6.110.	$\frac{\left(\frac{2}{y} - 2y\right)}{(4x + 4)}$	[1,2]	1	2	0.1

### Задача 3

6.21-6.30 (а, б, в). Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений.

6.21.

а)  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,

б)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ,

в)  $y'' + y = 0$ .

6.22.

а)  $y'' - 5y' - 6y = 0$ ,

б)  $y'' - 10y' + 25y = 0$ ,

в)  $y'' - 2y' + 10y = 0$ .

6.23.

а)  $y'' + y' - 6y = 0$ ,

б)  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ,

в)  $y'' + 4y = 0$ .

6.24.

а)  $y'' - 8y' + 25y = 0$ ,

б)  $y'' + 5y' + 6y = 0$ ,

в)  $y'' - 2y' + y = 0$ .

6.25.

а)  $y'' + 3y' = 0$ ,

б)  $y'' - 8y' + 16y = 0$ ,

в)  $y'' + 6y' + 25y = 0$ .

6.26.

а)  $y'' - 5y = 0$ ,

б)  $y'' - 14y' + 49y = 0$ ,

в)  $y'' + 9y = 0$ .

6.27.

а)  $y'' + 5y' - 6y = 0$ ,

б)  $y'' + 12y' + 36y = 0$ ,

в)  $y'' + 4y' + 8y = 0$ .

6.28.

а)  $y'' + 5y' + 4y = 0$ ,

б)  $y'' + 22y' + 121y = 0$ ,

в)  $y'' + 16y = 0$ .

6.29.

а)  $y'' - 5y' + 4y = 0$ ,

б)  $y'' - 26y' + 169y = 0$ ,

в)  $y'' - 4y' + 8y = 0$ .

6.30.

а)  $y'' - 100y = 0$ ,

б)  $y'' + 14y' + 49y = 0$ ,

в)  $y'' - 6y' + 25y = 0$ .

### Задача 4

6.31-6.40 (а, б). Найти общее решение дифференциальных уравнений.

6.31. а)  $(2y+1)\sin^2x dy + 5y dx = 0$ ;

б)  $y' \sin x + y \cos x = 2x$ .

6.32. а)  $(x+2)\cos^2(2y) dx + 3x dy = 0$ ;

б)  $xy' - 2y = x^4 \cos x$ .

6.33. а)  $3y dx - (y+3)\operatorname{tg}(2x) dy = 0$ ;

б)  $y' x - y = x^3 e^x$ .

6.34. а)  $2x dy - (2x+1)\operatorname{tg}(3y) dx = 0$ ;

б)  $xy' + x^2 = 3y$ .

6.35. а)  $(5y-2)\operatorname{tg}(7x) dy - 2y dx = 0$ ;

б)  $xy' - y = 5x^2 \cos(3x)$ .

6.36. а)  $(2x^2-5)\operatorname{ctg}(4y) dx + 3x dy = 0$ ;

б)  $x dy = (2x \ln x - y) dx$ .

6.37. а)  $-3y dx + (y^2-3y)\cos^2(6x) dy = 0$ ;

б)  $(x \ln x - y) dx + x dy = 0$ .

6.38. а)  $(y^2-3)e^x dy - 5y dx = 0$ ;

б)  $xy' - y = 2 \ln x$ .

6.39. а)  $-5xdy+(x^2-x)\sin^2(3y)dx=0$ ; б)  $y'-y=4xe^x$ .

6.40. а)  $2xdy+(x^2-4)e^ydx=0$ ; б)  $xy'-3y=x^5\sin(2x)$ .

### Задача 5

6.41-6.50 (а, б). Решить задачу Коши.

6.41. а)  $y'=(2x+3)/(4y+5)$ ,  $y(0)=1$ ;

б)  $(y-2x+3)dx+(x-y+3)dy=0$ ,  $y(1)=2$ .

6.42. а)  $y'=(3x+4)/(2y+5)$ ,  $y(0)=2$ ;

б)  $(4x+2y+3)dx+(2x+2y+2)dy=0$ ,  $y(1)=1$ .

6.43. а)  $y'=(4x+3)/(3y+1)$ ,  $y(0)=1$ ;

б)  $(2y-3x+1)dx+(2x-y+2)dy=0$ ,  $y(1)=0$ .

6.44. а)  $y'(2y+3)=2x+5$ ,  $y(0)=1$ ;

б)  $(x-2y+3)dx+(3y-2x+4)dy=0$ ,  $y(1)=2$ .

6.45. а)  $y'(7y-2)=2x+3$ ,  $y(0)=2$ ;

б)  $(x+4y+3)dx+(4x-y+2)dy=0$ ,  $y(1)=1$ .

6.46. а)  $y'=(2x-3)/(2y+8)$ ,  $y(1)=1$ ;

б)  $(3y-2x-2)dx+(3x-3y+2)dy=0$ ,  $y(0)=2$ .

6.47. а)  $y'=(6x+5)/(4y+3)$ ,  $y(1)=2$ ;

б)  $(3x-2y+3)dx+(4y-2x-1)dy=0$ ,  $y(0)=1$ .

6.48. а)  $y'=(4x-1)/(2y+5)$ ,  $y(1)=0$ ;

б)  $(4y-3x+2)dx+(4x-3y+2)dy=0$ ,  $y(0)=2$ .

6.49. а)  $y'(3y-7)=x+4$ ,  $y(1)=1$ ;

б)  $(4x-y+6)dx+(3-x-2y)dy=0$ ,  $y(0)=1$ .

6.50. а)  $y'(y-2)=5x+3$ ,  $y(1)=2$ ;

б)  $(2y-2x+3)dx+(2x-y+5)dy=0$ ,  $y(0)=2$ .

### Задача 6

6.51-6.60 (а, б). Найти общие решения дифференциальных уравнений.

6.51. а)  $y''=y'/x$ ,

б)  $y''+4y=1/\sin(2x)$ .

6.52. а)  $xy''+1=y'$ ,

б)  $y''+9y=1/\cos(3x)$ .

6.53. а)  $2y'+xy''=0$ ,

б)  $y''-6y'+9y=e^{3x}/x$ .

6.54. а)  $xy''+y'=4x$ ,

б)  $y''+16y=\cos 4x/\sin^2 4x$ .

6.55. а)  $(1+x^2)y''+2xy'=0$ ,

б)  $y''-2y'+y=e^x/x$ .

6.56. а)  $xy''+x+y'=0$ ,

б)  $y''+y=1/\sin^3 x$ .

- 6.57. а)  $y'' - y'/x = x^3$ , б)  $y'' + y = 1/\cos^2 x$ .  
 6.58. а)  $yy'' = (y')^2$ , б)  $y'' - 2y' + y = e^x/(9+x^2)$ .  
 6.59. а)  $x^3y'' + x^2y' = 1$ , б)  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}/x^3$ .  
 6.60. а)  $xy'' - y' = 2x^2$ , б)  $y'' + y = 1/\cos^3 x$ .

### Задача 7

6.61-6.70 (а, б). Решить задачу Коши.

- 6.61. а)  $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 4x + 6$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' - 5y' + 6y = -e^{2x}$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.62. а)  $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 2x + 7$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' - y' = e^x$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.63. а)  $y'' + y' = 2x + 3$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' - 6y' + 8y = 3e^x$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.64. а)  $y'' - y' = -2x + 1$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' - 4y' + 3y = -3e^{2x}$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.65. а)  $y'' - 2y' = -4x$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' - 2y' + y = -e^{2x}$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.66. а)  $y'' + 2y' = 4x + 4$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' + 4y' + 4y = 9e^x$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.67. а)  $y'' - 3y' = -6x - 1$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' - 6y' + 9y = 4e^x$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.68. а)  $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 5x + 8$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' - 2y' = 2e^{2x}$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.69. а)  $y'' + 2y' + y = 4x^2 + 2x + 3$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' + 2y' = -e^{-2x}$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .  
 6.70. а)  $y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 6x + 11$ ,  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .  
 б)  $y'' + 3y' + 2y = -e^{2x}$ ,  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ .

### Задача 8

6.71-6.80. Найти общее решение дифференциального уравнения.

- 6.71.  $y'' - 2y' = (x+1)e^{2x} + 2xe^{3x}$ . 6.72.  $y'' + y = x \sin x$ .  
 6.73.  $y'' + 4y = \sin^2 x$ . 6.74.  $y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$ .  
 6.75.  $y'' + 2y' + 5y = x \cos 2x$ . 6.76.  $y'' - 5y' + 4y = 3x^2 e^{4x}$ .

6.77.  $y''+9y=x\cos 3x$ .

6.78.  $y''+6y'+9y=x^2e^{-3x}$ .

6.79.  $y''+2y'-3y=xe^{-3x}+4xe^{2x}$ .

6.80.  $y''+2y'-3y=x^2e^{-3x}+xe^{3x}$ .

### Задача 9

6.81. Локомотив уменьшил скорость с 10 м/с до 5 м/с за 60 с. Полагая силу торможения пропорциональной квадрату скорости движения локомотива, определить время, необходимое для достижения скорости 2 м/с.

6.82. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству. Определить, какая часть вещества останется через 200 лет, если период полураспада составляет 1600 лет.

6.83. Заряженный конденсатор теряет заряд по причине несовершенства изоляции со скоростью пропорциональной наличному заряду. Определить время, через которое конденсатор разрядится на 75%, если на 50% он разряжается за 3 ч.

6.84. В сосуде 100 л водного раствора соли. В сосуд втекает чистая вода со скоростью 5 л/мин, а смесь вытекает с той же скоростью, причем перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора. В начальный момент в растворе содержалось 10 кг соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса?

6.85. Через щель в дне цилиндрического резервуара вытекает жидкость. В течение первых суток вытекло 20% жидкости. Определить время, через которое из резервуара вытечет половина всей жидкости, если скорость истечения пропорциональна уровню жидкости в резервуаре.

6.86. Подогреватель, имея начальную температуру  $100^{\circ}\text{C}$ , охлаждается в среде с температурой  $20^{\circ}\text{C}$ . Скорость охлаждения пропорциональна разности температур подогревателя и окружающей среды. Через какое время подогреватель охладится до  $30^{\circ}\text{C}$ , если за 20 мин его температура снизилась до  $60^{\circ}\text{C}$ ?

6.87. Моторная лодка двигалась в спокойной воде со скоростью 12 км/ч. Через 10 с после выключения мотора скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки. Найти скорость лодки через одну минуту после остановки мотора.

6.88. Пуля, двигаясь со скоростью 400 м/с, ударяется о достаточно толстую стену и начинает углубляться в нее. При этом сила сопротивления стены придает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности  $7\text{ м}^{-1}$ . Найти скорость пули через 0.001 с после вхождения ее в стену.

6.89. Конденсатор колебательного контура, состоящего из индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и сопротивления  $R$ , заряжен до напряжения  $U_0$ . Как меняется напряжение  $U$  на конденсаторе в процессе его разрядки?

6.90. Материальная точка движется под действием постоянной силы, сообщающей точке ускорение  $a$ . Сопротивление окружающей среды пропорционально скорости движения точки. С какой скоростью будет двигаться точка через 20 мин, если в начальный момент она находилась в покое?

### Задача 10

6.91-6.100. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$6.91. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$6.92. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$$

$$6.93. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$$

$$6.94. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y \end{cases}$$

$$6.95. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$6.96. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

$$6.97. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}$$

$$6.98. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

$$6.99. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y \end{cases}$$

$$6.100. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

\*\*\*