

**ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра общей и технической физики

ФИЗИКА

ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

*Методические указания к расчетно-графическим работам
и варианты заданий для студентов направления 21.03.01
«Нефтегазовое дело»*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2017**

УДК 537.1

ФИЗИКА. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ: Методические указания к расчетно-графическим работам и варианты заданий для студентов бакалавриата направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело». *С.С. Прошкин.* «Санкт-Петербургский горный университет». СПб, 2017, 32 с.

Расчетно-графические работы предназначены для студентов бакалавриата направления подготовки 21.03.01 «Нефтегазовое дело» Санкт-Петербургского горного университета. Задания выполняются индивидуально в соответствии с вариантом. Выполнение расчетно-графической работы позволит студенту сформировать следующие компетенции: ОПК-1; ОПК-2; ПК-1 и ПК-2.

Методические указания предназначены для студентов бакалавриата направления подготовки 21.03.01 «Нефтегазовое дело».

Табл. 2. Ил. 9. Библиогр. 8 назв.

Научный редактор проф. *А.С. Мустафаев*

© Санкт-Петербургский горный университет, 2017 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

В условиях значительного сокращения лекций и часов, отводимых на практические занятия по физике, единственным способом улучшить усвоение материала учебной программы является самостоятельная работа студента. В решении этой проблемы может помочь выполнение студентом индивидуального расчетно-графического задания (РГР). При выполнении РГР студенту приходится сочетать теоретические знания и практические навыки решения задач. Кроме того, у него формируется умение определить, описать и объяснить физические понятия, явления, процессы и величины.

При этом студент приобретает следующие навыки:

- проводить самостоятельный поиск необходимой информации с использованием учебных, справочных и научно-популярных изданий, ресурсов Интернета;
- применять математический аппарат для аналитического решения физических задач;
- анализировать, выполнять сравнительную оценку и делать выводы по результатам своей работы;
- использовать в решениях и представлении результатов (в виде рисунков, схем, таблиц и графиков) компьютерное программное обеспечение.

Перечень планируемых результатов после выполнения РГР:

- знать основные понятия, явления и фундаментальные физические законы, лежащие в основе изучаемого явления; уметь формулировать физико-математическую модель изучаемого явления; владеть методами выбора цели, постановки задач и поиска оптимальных путей их решения; (ОПК-1);
- знать основные методы исследования, методы расчета и численной оценки точности результатов измерений физических величин; уметь ставить и решать задачи для осуществления научно-исследовательской деятельности; владеть методами математического моделирования, компьютерной, аналитической и графической обработки результатов ОПК-2
- знать основные профессиональные проблемы, решаемые с помощью физических методов исследования; уметь: самостоятельно

решать конкретные задачи и выявлять новые закономерности; владеть способностью оценки достоверности полученных результатов (ПК-1);

- знать возможности применения современных компьютерных технологий; уметь эффективно использовать научно-техническую аппаратуру при решении конкретных профессиональных задач; владеть основами выполнения исследований с применением современных технологий и статистических методов (ПК-2).

Для повышения эффективности самостоятельной работы студентов в данном пособии приведены краткие теоретические сведения и разобраны примеры решения и оформления задач.

В приложении представлены справочные материалы, рекомендации к решению задач и содержанию отчета по РГР.

Студентам предлагается решить одно расчетно-графическое задание, которое фактически предполагает рассмотрение типовых задач по следующим разделам физики:

1. «Основы молекулярно-кинетической теории газа»;
2. «Функция распределения Максвелла»;
3. «Функция распределения Больцмана».

2. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ ОТЧЕТА И К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

При выполнении расчетно-графических работ по общей физике рекомендуется оформить отчет в печатном виде на листах формата А4 следующего содержания:

1. Титул в соответствии с требованиями вуза.
2. Формулировка задания в соответствии со своим вариантом.
3. Теоретические основы работы.

В краткое содержание теоретической части работы необходимо включить:

- явления или процессы, изучаемые в РГР.
- определения основных физических понятий, объектов, процессов и величин.
- законы и соотношения, описывающие изучаемые процессы.

- пояснение к физическим величинам, входящим в формулы, и единицы их измерения.

4. Решение задач РГР.

При решении задач необходимо:

- выполнить рисунок или начертить схему;
- сопровождать применяемые формулы и законы пояснениями, мотивирующими решение;
- представить результат в общем виде, т. е. преобразовать выражение для определяемой величины так, чтобы в него входили лишь буквенные обозначения величин, заданных в условии задачи, и необходимые физические константы;
- проверить размерность полученного результата;
- выполнить необходимые вычисления и представить результат в Международной системе единиц;
- сформулировать полный ответ в соответствии с вопросом задачи.

5. Графический материал.

- представить таблицы с данными для построения графиков;
- указать аналитическое выражение функциональной зависимости, которую необходимо построить;
- указать на осях координат физические величины и единицы их измерения.

6. Привести анализ и выводы по результатам работы.

3. УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К РАЗДЕЛУ «Молекулярно-кинетическая теория. Функции распределения»¹

3.1. Основы молекулярно-кинетической теории

Молекулярно-кинетическая теория (МКТ) - теория, возникшая в XIX в. и рассматривающая строение вещества, в основном газов, с точки зрения трех основных положений:

1. все тела состоят из частиц: атомов, молекул и ионов;
2. частицы находятся в непрерывном хаотичном тепловом движении;

¹ В данном разделе приведены только те формулы и законы, которые могут оказаться полезными при решении данного РГР.

3. частицы взаимодействуют друг с другом путем абсолютно упругих столкновений. Взаимодействие между молекулами зависит от типа молекул и от расстояния между ними.

Основы МКТ были заложены в 1738 году в книге Д. Бернулли «Гидродинамика». Началом становления МКТ послужила теория М. В. Ломоносова, который опытным путем опроверг теории о теплороде и флогистоне. Дальнейшее развитие МКТ получила в XIX века в работах Р. Клаузиуса, Л. Больцмана и Дж. Максвелла.

Молекулы так малы, что увидеть их нельзя. Поэтому молекулярно-кинетическое строение вещества обычно подтверждается косвенными, опытными доказательствами. К ним относятся:

- броуновское движение;
- диффузия в газах и жидкостях;
- высокая сжимаемость газов, что свидетельствует о наличии больших расстояний между молекулами газа;
- давление газа на стенки сосуда объясняется ударами молекул газа. При увеличении плотности газа увеличивается число ударов и увеличивается давление. При увеличении температуры увеличивается скорость молекул, увеличивается число ударов о стенку и увеличивается давление;
- растворение твердых тел в жидкостях, испарение жидких и твердых тел.

На основе МКТ развит целый ряд разделов современной физики, в частности, физическая кинетика и статистическая механика. В этих разделах физики изучаются не только молекулярные (атомные или ионные) системы, находящиеся не только в «тепловом» движении, и взаимодействующие не только через абсолютно упругие столкновения.

Согласно молекулярно – кинетическим представлениям все вещества состоят из большого числа молекул (атомов). Для изучения таких систем, которые называются *макроскопическими системами*, используют два метода: статистический и термодинамический. *Статистический метод* основан на законах теории вероятности и математической статистики. *Термодинамический метод* основан на законе сохранения и превращения энергии. Этот метод описывает равновесные состояния термодинамической системы. *Термо-*

динамической системой называется система, состоящая из большого числа атомов или молекул. Для описания поведения термодинамической системы используют термодинамические параметры: давление – p , температуру – T и объем V . Для *равновесных состояний* эти параметры постоянны и одинаковы по всему объему вещества.

Простейшей термодинамической системой является *идеальный газ*, т. е. газ, молекулы (атомы) которого рассматриваются как материальные точки, между которыми отсутствуют силы взаимодействия. Чем более разрежен газ, тем его свойства ближе к идеальному газу.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

$$pV = \frac{2}{3}W_k,$$

где W_k – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул идеального газа, $W_k = N\langle\varepsilon_0\rangle$; $\langle\varepsilon_0\rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа; N – число молекул в объеме газа.

Зависимость давления идеального газа от концентрации и температуры

$$p = nkT,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; n – концентрация молекул.

Закон Больцмана равномерного распределения энергии по степеням свободы:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где $\langle\varepsilon\rangle$ – средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа; i – сумма поступательного, вращательного и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы, $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Числом степеней свободы i называется количество независимых координат, определяющих положение молекулы в пространстве.

Для всех молекул число степеней свободы поступательного движения $i_{\text{пост}} = 3$. Для линейных молекул число степеней свободы вращательного движения $i_{\text{вр}} = 2$, а для объемных – $i_{\text{вр}} = 3$. Число колебательных степеней свободы движения атомов в молекуле

$$i_{\text{кол}} = 3N - (i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}}),$$

где N – число атомов в молекуле; Таким образом, для атомов в линейной молекуле $i_{\text{кол}} = 3N - 5$, а в объемной – $i_{\text{кол}} = 3N - 6$.

3.2. Общие сведения из статистической физики

Для того чтобы понять суть функций распределения Максвелла и Больцмана, необходимо ввести некоторые понятия и определения, на которых базируется статистическая физика.

Случайная величина – это такая переменная величина, которая в результате испытаний может принять некоторое заранее неизвестное значение, зависящее от различных случайных обстоятельств. К таким величинам относятся, например: скорость молекулы газа; температура атмосферного воздуха, дальность полета снаряда; продолжительность человеческой жизни и т. д.

Значения случайной величины образуют некоторое множество, в зависимости от типа которого случайные величины классифицируются на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная величина принимает только отдельные, изолированные значения, которые можно перечислить. Если множество значений случайной величины не счетно, то такая величина называется непрерывной. Другими словами, непрерывная случайная величина принимает любые значения из некоторого промежутка, конечного или бесконечного.

Для характеристики дискретной случайной величины нужно знать множество возможных значений этой величины и вероятности, с которыми она может принимать эти значения. Эти данные образуют *закон распределения* случайной дискретной величины, кото-

рый чаще всего представляют в виде таблицы. Такая таблица может быть как конечной, так и бесконечной.

Непрерывную случайную величину следует задавать не указанием вероятностей ее отдельных значений, а непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией $\rho(x)$, называемой *плотностью распределения вероятностей* случайной величины X . При этом вероятность того, что значения величины X находятся в промежутке от x до $x + \Delta x$, равна

$$P(x) = \int_x^{x+\Delta x} \rho(x) dx.$$

При малой величине промежутка $\Delta x = dx$, т. е. при $\Delta x \rightarrow 0$, элементарная вероятность попадания значения X в этот промежуток равна

$$dP = \rho(x) dx.$$

В физике $\rho(x)$ принято называть *функцией распределения* случайной величины.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет какое-нибудь значение из интервала (a, b) равна определенному интегралу от плотности вероятности в пределах от a до b

$$P(x) = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Функция распределения случайной величины обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$. (правило нормировки) (1)

В физике, технике измерений и расчетов чаще всего встречается *нормальное распределение* или *распределение Гаусса*, которое выражается формулой

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где \bar{x} – математическое ожидание случайной величины, характеризующее наиболее вероятное значение случайной величины; σ – среднее квадратическое отклонение, характеризующее уширение функции Гаусса. Функция Гаусса играет большую роль в теории вероятностей и занимает среди других распределений особое положение. Нормальный закон распределения является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при часто встречающихся аналогичных условиях.

В физике кроме нормального распределения встречаются специфические физические законы распределения (функции Больцмана, Максвелла, Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна и др.).

3.3. Функция распределения Максвелла

Закон распределения по скоростям молекул идеального газа, находящегося в термодинамическом равновесии (функция распределения Максвелла), был найден Дж. К. Максвеллом (1831-1879 гг) в 1859 г.

Распределение Максвелла лежит в основе кинетической теории газов, которая объясняет многие фундаментальные свойства газов, включая давление и явления переноса.

При выводе своего закона Максвелл считал, что газ состоит из большого числа N одинаковых молекул, его температура постоянна, а молекулы совершают хаотическое тепловое движение, испытывая только упругие столкновения, которые подчиняются законам классической механики. При этом на газ не действуют никакие силовые поля.

Так как взаимодействие между молекулами в газе обычно является весьма небольшим, распределение Максвелла довольно хорошо описывает ситуацию, существующую в газе. Также следует отметить, что полученные Максвеллом распределения по скоростям не зависят ни от структуры молекул, ни от того, как они взаимодействуют друг с другом. Поэтому они применимы не только к газам, но и к другим агрегатным состояниям вещества, например, жидко-

стям. Также распределение Максвелла можно применять для случая броуновского движения частиц, взвешенных в газе или жидкости.

Вообще говоря, существует большое количество различных вариантов функции распределения Максвелла, в зависимости от того, для какой величины оно применяется. Перечислим некоторые из них:

- распределение по проекции скорости молекул на заданное направление;
- распределение по абсолютному значению скорости молекул;
- распределение по относительной скорости молекул
- распределение по абсолютному значению импульса молекул;
- распределение по кинетической энергии молекул.

Рассмотрим первое из упомянутых распределений, для чего выделим в пространстве некоторое направление (заданное, например, осью x). Тогда число молекул, x -проекция скорости которых находится в интервале $d v_x$, можно представить в виде

$$d N_x = N f(v_x) d v_x ,$$

где $f(v_x) = \frac{d N_x}{N d v_x}$ – функция, имеющая смысл вероятности нахождения проекции скорости молекулы в заданном интервале скоростей, отнесенной к величине этого интервала, т. е. плотности вероятности (функции распределения); N – полное число молекул.

Аналитический вид функции распределения $f(v_x)$ называется законом Максвелла для распределения молекул идеального газа по x -проекциям скорости и определяется выражением:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi k T}} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2k T}\right),$$

где v_x – проекция скорости молекулы на ось x ; m_0 – масса одной молекулы; T – абсолютная температура газа, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К –

постоянная Больцмана. График такой функции при заданной температуре приведен на рисунке 1.

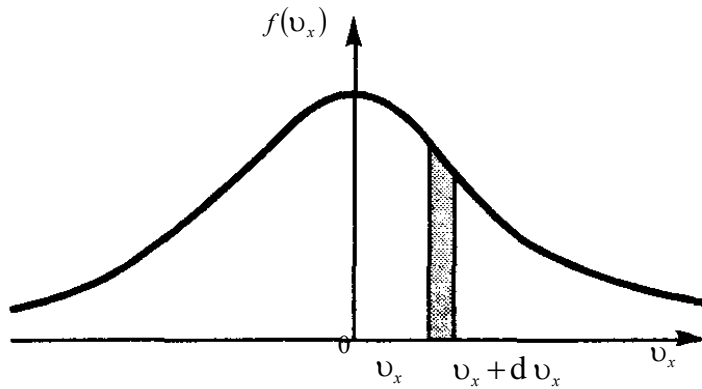


Рис. 1. График функции распределения $f(v_x)$ при заданных температуре и массе молекул газа. Заштрихованная полоска пропорциональна относительному числу молекул, чьи проекции скорости лежат в интервале $d v_x$

Поскольку все пространственные направления в газе равновероятны, аналогичные выражения можно записать для двух других проекций:

$$f(v_y) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m_0 v_y^2}{2kT}\right);$$

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m_0 v_z^2}{2kT}\right),$$

где v_y – проекция скорости молекулы на ось y ; v_z – проекция скорости молекулы на ось z .

Из представленных выражений следует, что значение функции распределения $f(v_x)$ зависит от рода газа (от массы молекул) и от абсолютной температуры. Так при увеличении температуры газа

максимум функции распределения $f(v_x)$ уменьшается, а сама функция «расплывается» (см. рис. 2)².

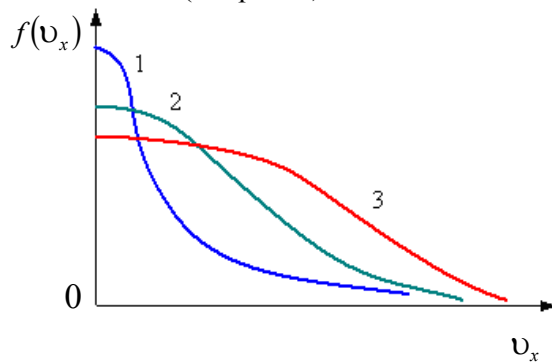


Рис. 2. График зависимости функции распределения $f(v_x)$ от температуры. Цифры соответствуют графикам с температурами: $T_1 > T_2 > T_3$.

При решении задач наибольший практический интерес представляет функция распределения молекул по абсолютной величине скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. В этом случае функция позволяет определять относительное число тех молекул, чьи скорости попадают в интервал скоростей от v до $v + dv$.

Соответствующий закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по модулям скорости записывается следующим образом:

$$F(v) = 4\pi \sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right),$$

где v – модуль скорости молекулы; m_0 – масса одной молекулы; T – абсолютная температура газа, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная

² На рисунке изображена только правая сторона графика (для положительных проекций скорости).

Больцмана. График такой функции при заданной температуре приведен на рис. 3.

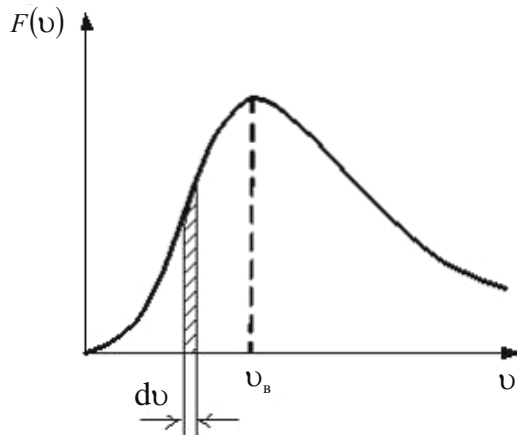


Рис. 3. График функции распределения $F(v)$ при заданных температуре и массе молекул газа. Заштрихованная полоска пропорциональна относительному числу молекул, чьи проекции скорости лежат в интервале dv

Из рисунка видно, что график обладает ярко выраженным максимумом, которому соответствует скорость молекул, называемая наиболее вероятной:

$$v_B = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}},$$

где $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная; M – молярная масса газа.

Как и в случае $f(v_x)$, функция распределения $F(v)$ зависит от температуры и массы молекул газа. Сказанное можно проиллюстрировать графиком, представленным на рис. 4.

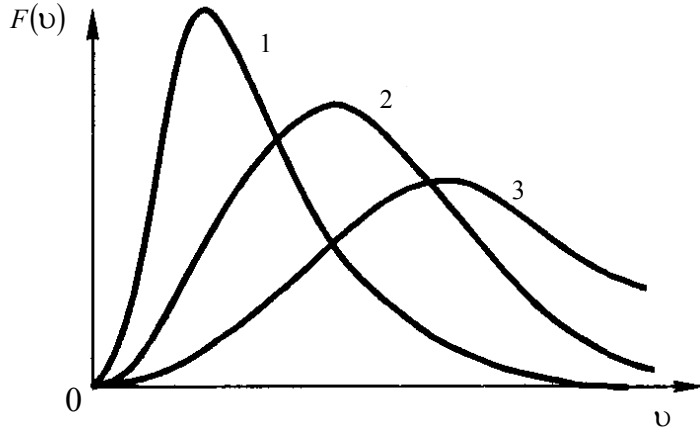


Рис. 4. График зависимости функции $F(v)$ от температуры ($T_3 > T_2 > T_1$).

Функция распределения $F(v)$ позволяет находить вероятность того, что модуль скорости молекулы заключен в интервале $[v, v + dv]$ по формуле:

$$dP(v) = F(v)dv = 4\pi \sqrt{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^3} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) dv.$$

Также с помощью функции распределения Максвелла можно находить средние значения самых различных величин. Так, например, можно вычислить средние значения скоростей молекул и любых функций этих скоростей. В частности, средняя скорость и средняя квадратичная скорость молекулы оказываются равными:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}, \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Фактически это означает, что один и тот же газ может быть охарактеризован тремя различными скоростями. Однако, это разли-

чие сводится только к разнице в их численных значениях. Легко заметить, что указанные скорости связаны друг с другом следующим соотношением:

$$v_B : \langle v \rangle : v_{KB} = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3} = 1 : 1,13 : 1,22 .$$

Данное соотношение наглядно отражено на рис. 5.

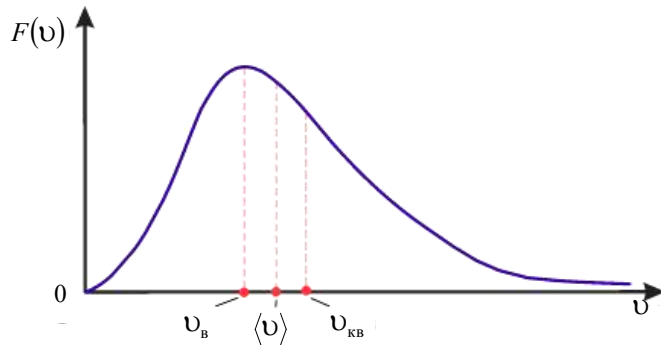


Рис. 5. Соотношение численных значений скоростей молекул газа

При решении некоторых задач удобнее использовать закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по модулям относительной скорости $u = v/v_B$ ³, где v_B – наиболее вероятная скорость. В этом случае закон распределения Максвелла имеет следующий вид:

$$F(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2).$$

Перечисленные выше функции распределения нужны, прежде всего, для определения числа молекул (или относительного числа молекул), чьи скорости заключены в некотором интервале. Так, на-

³ Данное название является не совсем удачным, поскольку фактически речь идет о безразмерной скорости.

пример, число молекул, скорости которых заключены в интервале $[\nu, \nu + d\nu]$, можно найти из следующего выражения:

$$dN = N dP(\nu) = NF(\nu) d\nu = NF(u) du,$$

где N – общее число молекул.

Число молекул, скорости которых заключены в интервале $[\nu_1, \nu_2]$, определяется формулой:

$$\Delta N = \int_{\nu_1}^{\nu_2} N dP(\nu) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} NF(\nu) d\nu = \int_{u_1}^{u_2} NF(u) du.$$

Если ширина интервала скоростей $[\nu, \nu + \Delta \nu]$ удовлетворяет следующему условию: $\Delta \nu \leq 0,02 \nu$, то с погрешностью менее 1 % число молекул ΔN , скорости, которых заключены в этом интервале, можно рассчитать по следующей формуле:

$$\Delta N \cong NF(\nu) \Delta \nu.$$

Число молекул N_x , скорости которых превышают заданное значение скорости ν_1 ,

$$N_x = \int_{\nu_1}^{\infty} N dP(\nu) = \int_{\nu_1}^{\infty} NF(\nu) d\nu = \int_{u_1}^{\infty} NF(u) du. \quad (2)$$

Для расчета числа молекул N_x удобно пользоваться графиком $N_x/N = \varphi(u)$ (где u – относительная скорость, $u = \nu/\nu_B$), который построен методом численного интегрирования формулы (2) (рис. 6).

Ранее было отмечено, что функция Максвелла может быть получена не только для распределения по скоростям. Так, например, используя выражение классической механики для кинетической энергии молекулы:

$$W_k = \frac{m_0 \nu^2}{2},$$

можно получить выражение для функции распределения по соответствующей энергии молекул (рис. 7):

$$F(W_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left(\frac{1}{kT}\right)^3} \sqrt{W_k} \exp\left(-\frac{W_k}{kT}\right).$$

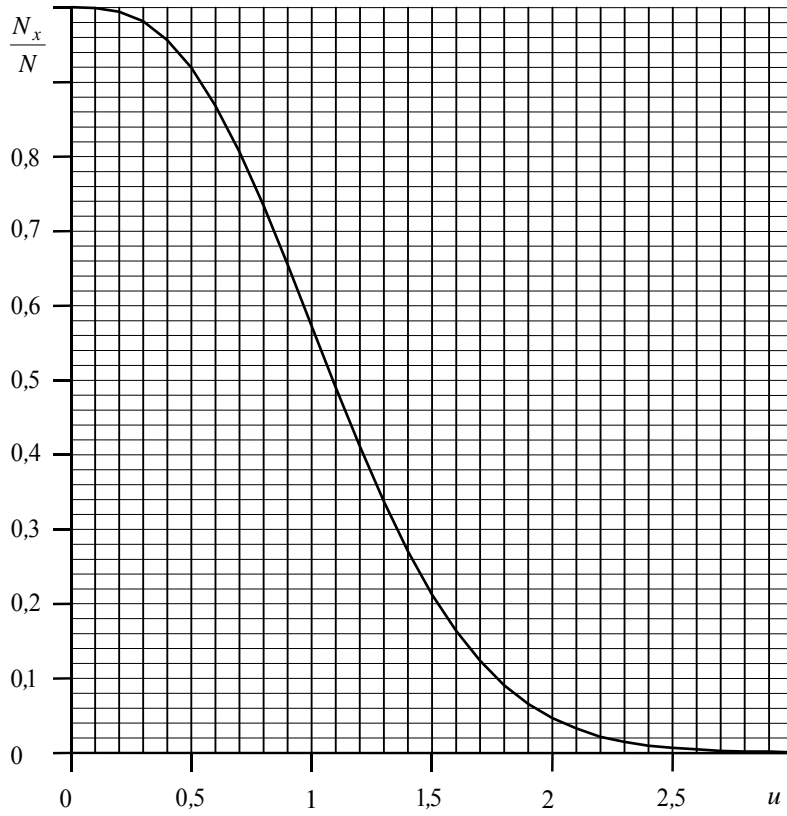


Рис. 6. График зависимости $N_x/N = \varphi(u)$

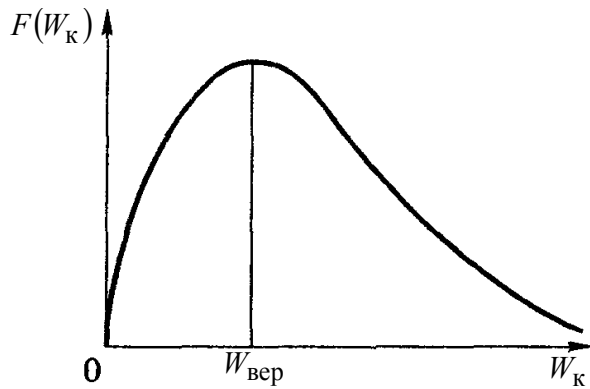


Рис. 7. График функции распределения $F(W_k)$

Как доказывается в современной статистической физике, распределение Максвелла может быть получено из канонического распределения Гиббса в том случае, когда поступательное движение частиц можно рассматривать в классическом приближении, учитывая, что распределение по скоростям не зависит от распределения по пространственным координатам. Также распределение Максвелла является частным решением кинетического уравнения Больцмана для случая статистического равновесия в отсутствии внешних полей.

3.4. Функция распределения Больцмана

В отсутствие внешних сил концентрация n молекул газа в состоянии термодинамического равновесия в любой точке объема должна быть одинакова. Если же газ находится во внешнем силовом поле, ситуация изменяется.

Рассмотрим случай, когда газ находится во внешнем поле потенциальных (консервативных) сил, действующих для простоты в одном направлении и зависящих только от координаты x . Также будем считать, что газ находится в состоянии теплового равновесия, т. е. его температура T одинакова по всей толщине газа. Такое предположение позволит не рассматривать потоки тепла в силу кон-

векции. Тогда зависимость концентрации числа молекул газа во внешнем поле от координаты x определяется распределением Л. Больцмана (1844–1906):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{W_n}{kT}\right),$$

где n_0 – концентрация, соответствующая положению с нулевой потенциальной энергией; W_n – потенциальная энергия молекулы во внешнем потенциальном поле; T – абсолютная температура газа.

Если в качестве потенциального поля рассматривать гравитационное поле Земли, то можно получить другое выражение для распределения Больцмана (при условии, что температура и ускорение свободного падения не изменяются с высотой):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0gh}{kT}\right),$$

где n – концентрация идеального газа на высоте h ; n_0 – концентрация на высоте $h=0$; M – молярная масса; g – ускорение свободного падения; m_0 – масса одной молекулы. График такой функции представлен на рис. 8, из которого видно, что с ростом температуры происходит уменьшение начальной концентрации молекул n_0 и «расползание» графика в область больших значений высоты h .

Воспользуемся формулой, связывающей давление идеального газа p с его концентрацией: $p = nkT$, тогда можно выразить зависимость давления изотермической атмосферы от ее высоты над Землей. Такая зависимость носит названия *барометрическая формула* и справедлива при $T = \text{const}$, $g = \text{const}$ (см. рис. 9):

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{m_0gh}{kT}\right),$$

где p – давление идеального газа на высоте h ; p_0 – давление на высоте $h=0$.

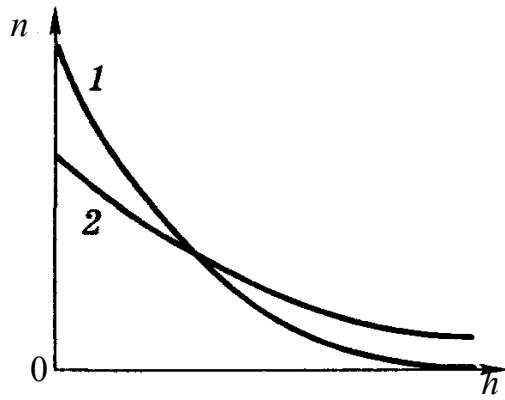


Рис. 8. График функции распределения Больцмана $n(h)$ при различных температурах ($T_2 > T_1$)

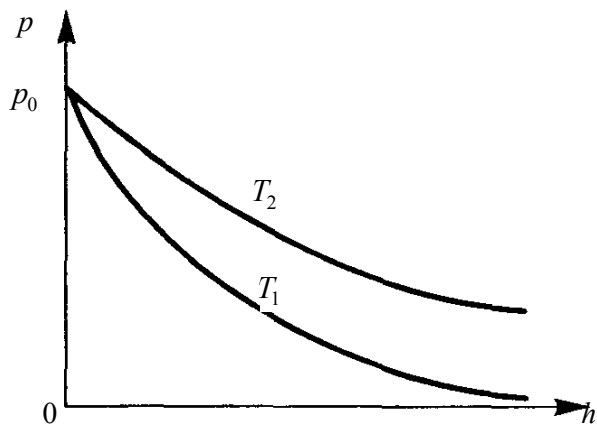


Рис. 9. График зависимости атмосферного давления от высоты над поверхностью Земли $p(h)$ при различных температурах ($T_2 > T_1$)

Следует обратить внимание на то, что в отличие от распределений $n(h)$ кривые $p(h)$ начинаются в одной точке, независимо от температуры.

Все перечисленные выше функции могут быть сведены к единственной функции распределения Больцмана, которая определяется формулой:

$$f_B(x) = B \exp\left(-\frac{W_n(x)}{kT}\right),$$

где W_n – потенциальная энергия частицы во внешнем потенциальном поле; B – постоянная.

Постоянная B находится из следующего условия (условия нормировки):

$$\int_0^{\infty} B \exp\left(-\frac{W_n(x)}{kT}\right) dx = 1.$$

Функция $f_B(x)$ позволяет вычислить вероятность того, что число частиц dN из всех N частиц находится в слое $[x, x + dx]$, по формуле:

$$dP(x) = \frac{dN}{N} = f_B(x) dx = B \exp\left(-\frac{W_n(x)}{kT}\right) dx.$$

Число частиц, находящихся в тонком слое $[x, x + dx]$, определяется выражением:

$$dN = N dP(x) = N f_B(x) dx,$$

где N – общее число молекул.

Число частиц, находящихся в слое $[x_1, x_2]$,

$$\Delta N = \int_{x_1}^{x_2} N dP(x) = \int_{x_1}^{x_2} N f_B(x) dx.$$

4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задача.

Идеальный газ X находится при температуре T . Постройте графики функции распределения Максвелла для модуля скорости молекул газа при температурах T и αT .

Вычислите значения скоростей: v_B ; $\langle v \rangle$; $v_{кв}$. Определите с помощью функции распределения значение v^m .

Найти относительное число молекул идеального газа, скорости которых отличаются не более чем на $\pm n$ % от значения наиболее вероятной скорости.

В таблице 1 приведены численные значения известных величин.

Таблица 1

Параметры задания

Вариант	X	T, K	α	m	n
1	N_2	150	1,25	2	2
2	NH_3	250	1,5	3	2
3	N_2	250	2	0,5	1
4	H_2	325	2,5	0,5	1,5
5	N_2	300	3	0,5	2,5
6	He	275	1,75	2	3
7	H_2	175	2	3	1
8	O_2	225	1,5	2,5	1
9	N_2	375	2	2,5	2
10	CH_4	400	3	2	3
11	Ne	150	4	2	2
12	N_2	250	1,75	3	1
13	H_2	350	1,5	4	1,5
14	CO_2	300	2	3	1,75

Вариант	X	T, K	α	m	n
15	Ne	275	2	2	2
16	O ₂	175	3	0,5	1
17	H ₂	200	4	0,5	2
18	CO ₂	325	1,8	0,5	1,5
19	O ₂	300	1,75	2	1,25
20	H ₂	180	1,5	3	1,25
21	CO ₂	220	1,75	2	1,75
22	Ne	175	2	3	2
23	H ₂	225	2	0,75	2
24	CO ₂	250	3	0,75	3
25	O ₂	315	1,5	2	3

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Какая часть молекул азота $\Delta N/N$ при температуре $t = 150^\circ\text{C}$ обладает скоростями в диапазоне от $v_1 = 300\text{ м/с}$ до $v_2 = 305\text{ м/с}$.

Решение.

Вначале рассчитаем наиболее вероятную скорость молекул азота при температуре $T = 423\text{ К}$, при этом учтем, что: $R = 8,31\text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$; $M = 28 \cdot 10^{-3}\text{ кг/моль}$.

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 423}{28 \cdot 10^{-3}}} = 501\text{ м/с}.$$

Теперь найдем относительные скорости молекул азота для заданных скоростей

$$u_1 = \frac{v_1}{v_{\text{в}}} = \frac{300}{501} = 0,599, \quad u_2 = \frac{v_2}{v_{\text{в}}} = \frac{305}{501} = 0,609.$$

Тогда, величина приращения относительной скорости

$$\Delta u = u_2 - u_1 = 0,609 - 0,599 = 0,010 .$$

В итоге получим

$$\frac{\Delta u}{u_1} = \frac{0,010}{0,599} = 1,67 \cdot 10^{-2} = 1,67 \% < 2 \% .$$

Так как эта величина меньше 2 %, то воспользуемся следующей приближенной формулой для вычисления относительного числа молекул

$$\frac{\Delta N}{N} \cong \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) \Delta u .$$

Произведем вычисления

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{3,14}} 0,599^2 \exp(-0,599^2) 0,010 = 5,66 \cdot 10^{-3} .$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 5,66 \cdot 10^{-3} .$

Задача 2.

В баллоне находится $m = 2,50$ г кислорода (O_2). Найти число молекул кислорода N_x , скорости которых превышают значение среднеквадратичной скорости $u_{кв}$. При решении задачи воспользоваться графиком зависимости относительного числа молекул, скорости которых превышают заданное значение (рис. 7).

Решение.

Наиболее вероятная и среднеквадратичная скорости молекул кислорода при температуре T равны соответственно

$$u_B = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad \text{и} \quad u_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} ,$$

то значение относительной скорости равно

$$u = \frac{v_{\text{кв}}}{v_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,22 .$$

По графику, приведенному на рис. 7, находим

$$\frac{N_x}{N} = 0,39 .$$

Общее число молекул в баллоне можно найти из формулы

$$N = \frac{m}{M} N_A ,$$

где m – масса тела; N_A – число Авогадро.

Тогда окончательное число молекул, скорость которых превышает среднеквадратичную, выразится формулой:

$$N_x = 0,39 N = 0,39 \frac{m}{\mu} N_A .$$

В результате вычисления получим

$$N_x = \frac{0,39 \cdot 2,50 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{32 \cdot 10^{-3}} = 1,83 \cdot 10^{22} .$$

Ответ: $N_x = 1,83 \cdot 10^{22}$.

Задача 3.

Какая часть молекул идеального газа обладает скоростями, превышающими наиболее вероятную скорость при заданной температуре газа?

Решение.

Как следует из условия задачи, речь идет о бесконечном интервале скоростей от наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$ до $v_{\text{в}} + \infty$. Поэтому воспользуемся дифференциальной формой закона Максвелла распределения относительных скоростей $u = \frac{v}{v_{\text{в}}}$:

$$dN = \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} \right) N e^{-u^2} u^2 du .$$

Поскольку относительная скорость в задаче изменяется в пределах от $u_1 = \frac{v_B}{v_B} = 1$ до $u_2 = \frac{\infty}{v_B} = \infty$, относительное число молекул выразится следующим интегралом:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-u^2} u^2 \, du. \quad (3)$$

Получившийся интеграл является несобственным, поэтому для упрощения его вычисления воспользуемся математическим приемом. Очевидно, скорости молекул лежат в интервале от 0 до ∞ , поэтому, если обозначить через $\Delta N'$ число молекул, скорости которых меньше наиболее вероятной, т. е. лежат в интервале от 0 до 1, то можно записать

$$\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta N'}{N} = 1.$$

Поэтому можно вначале отыскать интеграл

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-u^2} u^2 \, du, \quad (4)$$

а затем по формуле $\frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{\Delta N'}{N}$ вычислить относительное число молекул.

Однако интеграл (4) в конечном виде не берется, поэтому воспользуемся методом приближенного интегрирования. Для этого разложим подынтегральную функцию $e^{-u^2} u^2$ в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} e^{-u^2} &= 1 - \frac{u^2}{1} + \frac{u^4}{2} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{24} - \dots; \\ e^{-u^2} u^2 &= u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \frac{u^{10}}{24} - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим первые четыре члена ряда (5) в интеграл (4) и произведем интегрирование с погрешностью, не превышающей 0,01:

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left(u^2 - u^4 + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} \right) du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} \right) = 0,420.$$

Тогда искомое относительное число молекул (3) равно

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{\Delta N'}{N} = 1 - 0,420 = 0,580.$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0,580$.

Задача 4.

Определить какие из двух средних величин $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$ или $\frac{1}{\langle v \rangle}$,

больше, и найти их отношение, если v – скорость хаотического теплового движения молекулы идеального газа.

Решение.

Для решения задачи воспользуемся функцией распределения Максвелла для модуля скорости молекул

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) v^2,$$

где m_0 – масса молекулы газа; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура газа.

Как известно, функция распределения позволяет находить средние значения любых величин, так, например, для некоторой величины x , если известна функция распределения $F(x)$:

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x F(x) dx.$$

Тогда, можно записать

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} F(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \frac{v^2}{v} dv.$$

Проведем замену переменной $d(v^2) = 2v dv$, тогда интеграл становится табличным и может быть легко найден

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) d(v^2) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} \left(-\frac{2kT}{m_0} \right) \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поскольку средняя скорость молекул идеального газа равна $\langle v \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$. Тогда, очевидно

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle / \frac{1}{\langle v \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m_0}{2kT}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \frac{4}{\pi} \approx 1,27.$$

Ответ: $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle / \frac{1}{\langle v \rangle} \approx 1,27$.

Задача 5.

В вертикальном закрытом цилиндре с площадью основания 100 м^2 и высотой 500 м находится азот (N_2). Давление азота на основании цилиндра $p_0 = 1,50 \text{ МПа}$. Температура газа постоянна по высоте и равна $T = 300 \text{ К}$. Определить число молекул в двух частях цилиндра: между отметками $h_1 = 0 \text{ м}$ и $h_2 = 100 \text{ м}$, а также между отметками $h_3 = 400 \text{ м}$ и $h_4 = 500 \text{ м}$.

Решение.

Газ находится в поле тяготения Земли и распределение его концентрации по высоте подчиняется закону Больцмана

$$n(x) = n_0 \exp\left(-\frac{W_n(x)}{kT}\right),$$

где W_n – потенциальная энергия частицы в силовом поле; n_0 – концентрация при $x = 0$.

Потенциальная энергия молекулы в поле тяготения Земли при условии, что ускорение свободного падения не зависит от высоты,

$$W_{\Pi} = m_0 g x,$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Число молекул, находящихся в слое $[x_1, x_2]$,

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int_V n \, dV = \int_{x_1}^{x_2} n(x) S \, dx = \int_{x_1}^{x_2} n_0 S \exp\left(-\frac{m_0 g x}{k T}\right) dx = \\ &= n_0 S \frac{k T}{m_0 g} \left[\exp\left(-\frac{m_0 g x_1}{k T}\right) - \exp\left(-\frac{m_0 g x_2}{k T}\right) \right]. \end{aligned}$$

Для идеального газа справедливы следующие соотношения:

$$p_0 = n_0 k T, \quad m_0 = \frac{M}{N_A}, \quad \frac{m_0}{k} = \frac{M}{R},$$

где m_0 – масса одной молекулы; k – постоянная Больцмана; M – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; N_A – число Авогадро.

Таким образом, число молекул в цилиндре высотой $\Delta x = x_2 - x_1$ и площадью основания S

$$\begin{aligned} \Delta N &= \frac{p_0 S}{m_0 g} \left[\exp\left(-\frac{M g x_1}{R T}\right) - \exp\left(-\frac{M g x_2}{R T}\right) \right] = \\ &= \frac{p_0 N_A S}{\mu g} \left[\exp\left(-\frac{M g x_1}{R T}\right) - \exp\left(-\frac{M g x_2}{R T}\right) \right]. \end{aligned}$$

Найдем число молекул, находящихся в слое $[h_1, h_2]$,

$$\Delta N_1 = \frac{p_0 N_A S}{\mu g} \left[\exp\left(-\frac{M g h_1}{R T}\right) - \exp\left(-\frac{M g h_2}{R T}\right) \right] =$$

$$= \frac{1,50 \cdot 10^6 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 100}{0,028 \cdot 9,81} \left[1 - \exp\left(-\frac{0,028 \cdot 9,81 \cdot 100}{8,31 \cdot 300}\right) \right] = 3,60 \cdot 10^{30}.$$

Найдем число молекул, находящихся в слое $[h_3, h_4]$,

$$\begin{aligned} \Delta N_2 &= \frac{p_0 N_A S}{\mu g} \left[\exp\left(-\frac{Mgh_3}{RT}\right) - \exp\left(-\frac{Mgh_4}{RT}\right) \right] = \\ &= \frac{1,50 \cdot 10^6 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 100}{0,028 \cdot 9,81} \times \\ &\times \left[\exp\left(-\frac{0,028 \cdot 9,81 \cdot 400}{8,31 \cdot 300}\right) - \exp\left(-\frac{0,028 \cdot 9,81 \cdot 500}{8,31 \cdot 300}\right) \right] = 3,45 \cdot 10^{30}. \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta N_1 = 3,60 \cdot 10^{30}$; $\Delta N_2 = 3,45 \cdot 10^{30}$.

6. РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. СПб., М.: Лань, 2010.
2. *Детлаф А.А.* Курс физики / Детлаф А.А., Яворский Б.М. М.: Высшая школа, 2009.
3. *Прошкин С.С., Ниженский Н.В., Самолетов В.А.* Механика, термодинамика и молекулярная физика. Сборник задач, М: Юрайт, 2017.
4. *Савельев И.В.* Курс физики, Т. 2. СПб., М.: Лань, 2010.
5. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики, Т. 3, М., Наука, 2009.
6. *Трофимова Т.И.* Курс физики. М.: Высшая школа, 2009.
7. *Чертов А.Г.* Задачник по физике. / Чертов А.Г., Воробьев А.А. М.: Высшая школа, 2008.
8. *Яворский Б.М.* Основы физики, Т. 2. / Яворский Б.М., Пинский А.А. М.: Наука, 2009

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 2

Атомные массы некоторых элементов

Элемент	Атомная масса	Элемент	Атомная масса
Азот	14	Олово	119
Аргон	40	Натрий	23
Водород	1	Неон	20
Гелий	4	Ртуть	201
Золото	197	Углерод	12
Кислород	16	Хлор	35,5

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Требования к содержанию отчета и к решению задач по расчетно – графической работе.....	4
2. Учебные материалы к разделу «Молекулярно-кинетическая теория. Функция распределения».....	5
3. Задание для расчетно-графической работы.....	23
4. Примеры решения задач.....	24
Рекомендательный библиографический список.....	31
Приложения.....	32
Содержание	32