

Рис. 71

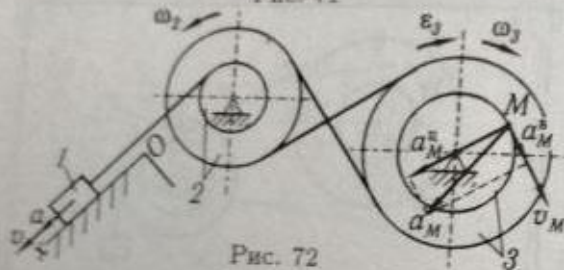


Рис. 72

Ускорение груза 1

$$a = \ddot{x} = 72 \text{ см/с}^2.$$

Для определения скорости и ускорения точки M составляем уравнения, связывающие скорость груза v и угловые скорости колес ω_2 и ω_3 .

В соответствии со схемой механизма

$$\left. \begin{aligned} v &= r_2 \omega_2; \\ R_2 \omega_2 &= R_3 \omega_3, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\omega_3 = v R_2 / (r_2 R_3),$$

или с учетом (6) после подстановки данных

$$\omega_3 = 2,215t + 0,154.$$

Таблица 24

| v, см/с | a, см/с ² | ω_3 , рад/с | ϵ_3 , рад/с ² | v_M , см/с | a_M^u , см/с ² | a_M^b , см/с ² | a_M , см/с ² |
|------------|-------------------------|-----------------------|--------------------------------------|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 77 | 72 | 2,37 | 2,22 | 94,8 | 224 | 88,6 | 241 |

Угловое ускорение колеса 3

$$\epsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2,215 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки M, ее вращательное, центростремительное и полное ускорения определяются по формулам

$$\begin{aligned} v_M &= r_3 \omega_3; \\ a_M^b &= r_3 \epsilon_3; & a_M^u &= r_3 \omega_3^2; \end{aligned}$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^u)^2 + (a_M^b)^2}.$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t_1 = 1 \text{ с}$ приведены в табл. 24.

Скорости и ускорения тела 1 и точки M показаны на рис. 72.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К.3. Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов помещены на рис. 73—75, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 25.

Таблица 25

| Номер варианта (рис. 73-75) | Размеры, см | | | | ω_{OA} рад/с | ω_1 рад/с | ϵ_{OA} рад/с ² | v_A см/с | a_A см/с ² |
|--------------------------------|-------------|----|----|----|------------------------|---------------------|---------------------------------------|---------------|----------------------------|
| | OA | r | AB | AC | | | | | |
| 1 | 40 | 15 | - | 8 | - | - | - | - | |
| 2 | 30 | 15 | - | 8 | 2 | - | - | - | |
| 3 | - | 50 | - | - | 3 | - | 2 | - | |
| 4 | 35 | - | - | - | - | - | 2 | - | |
| 5 | 25 | - | - | 45 | 4 | - | - | - | |
| 6 | 40 | 15 | - | 20 | 1 | - | 8 | 50 | |
| 7 | 35 | - | - | 6 | 1 | - | 1 | - | |
| 8 | - | - | 75 | 60 | 1 | 1 | 0 | - | |
| 9 | - | - | 20 | 10 | 5 | - | 0 | - | |
| 10 | - | - | 45 | 30 | - | - | 10 | - | |
| 11 | 25 | - | 80 | 20 | - | - | - | 40 | |
| 12 | - | - | 30 | 15 | 1 | - | - | 20 | |
| 13 | - | - | 30 | 20 | - | - | - | 10 | |
| 14 | 25 | - | 55 | 40 | - | - | - | 20 | |
| 15 | 45 | 15 | - | 8 | 2 | - | 4 | - | |
| 16 | 40 | 15 | - | 8 | 3 | 12 | 0 | - | |
| 17 | 55 | 20 | - | - | 1 | - | 1 | - | |
| 18 | - | 30 | - | 10 | 2 | - | 5 | - | |
| 19 | 10 | - | 10 | 5 | - | - | - | 80 | |
| 20 | 20 | 15 | - | 10 | 2 | - | 6 | - | |
| 21 | - | - | 20 | 6 | 1 | 2,5 | 0 | - | |
| 22 | 30 | - | 60 | 15 | - | - | - | 10 | |
| 23 | 35 | - | 60 | 40 | 3 | - | 8 | - | |
| 24 | - | - | 60 | 20 | 4 | - | 10 | - | |
| 25 | 25 | - | 35 | 15 | - | - | - | 5 | |
| 26 | 20 | - | 70 | 20 | 2 | - | 3 | - | |
| 27 | 20 | 15 | - | 10 | 1 | - | 2 | - | |
| 28 | - | 15 | - | 5 | 2 | 1,2 | 0 | - | |
| 29 | 20 | - | 50 | 25 | - | - | - | 60 | |
| 30 | 12 | - | 35 | 15 | 1 | - | 1 | - | |
| 31 | 40 | - | - | 20 | 4 | - | 6 | - | |
| 32 | - | - | - | - | 5 | - | 10 | - | |

Примечание. ω_{OA} и ϵ_{OA} — угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_1 — угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A — скорость и ускорение точки A. Качение колес происходит без скольжения.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 76); исходные данные (табл. 26).

Таблица 26

| Размеры, см | | | ω_{OA} , рад/с | ϵ_{OA} , рад/с ² |
|-------------|----|----|-----------------------|--------------------------------------|
| OA | AB | AC | | |
| 10 | 60 | 20 | 1,5 | 2 |

Решение. 1. Определение скоростей точек и угловой скорости звена (рис. 77). Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

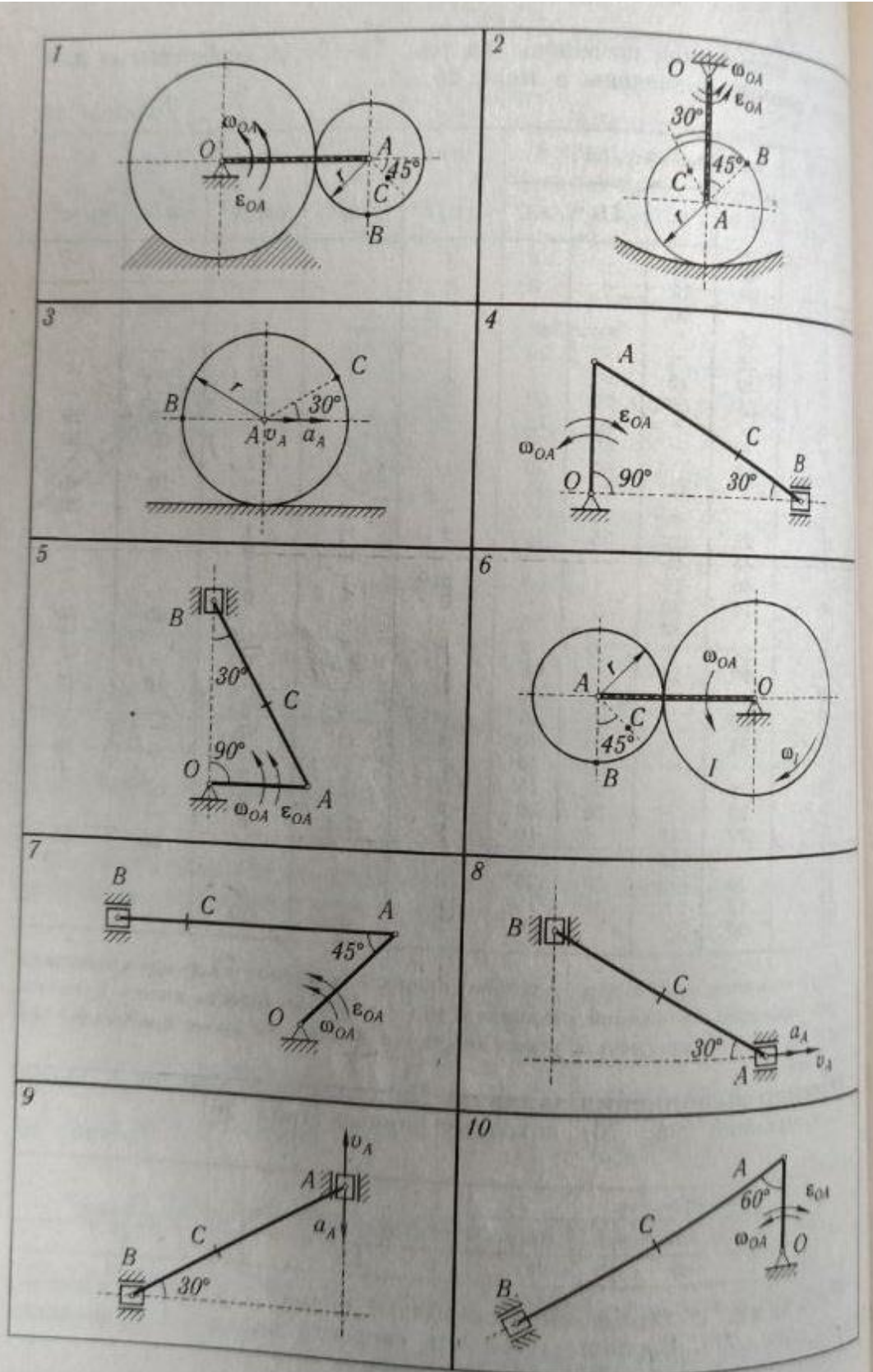


Рис. 73

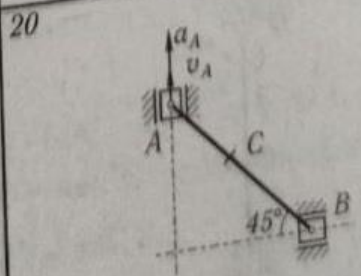
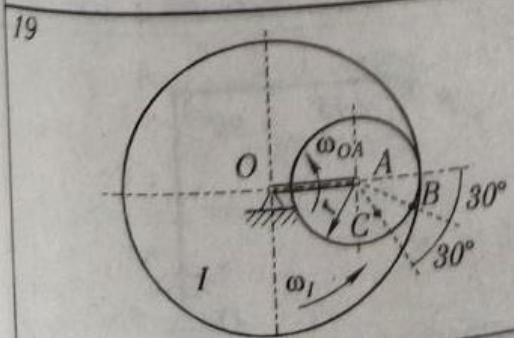
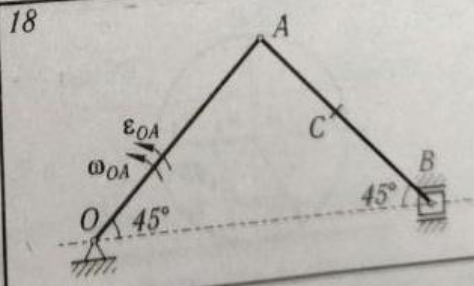
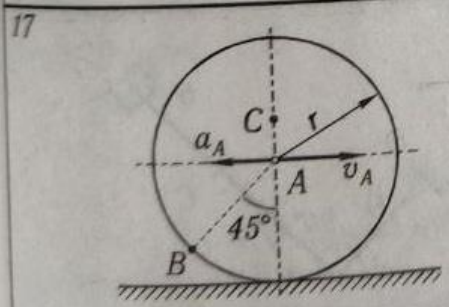
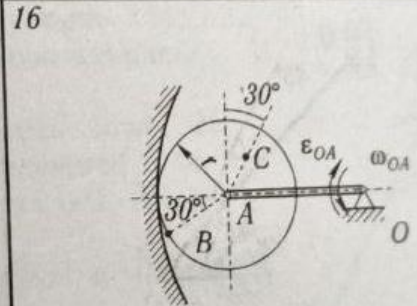
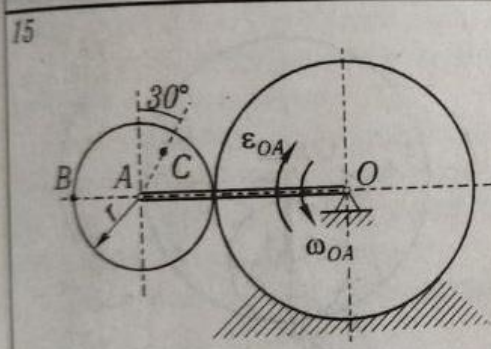
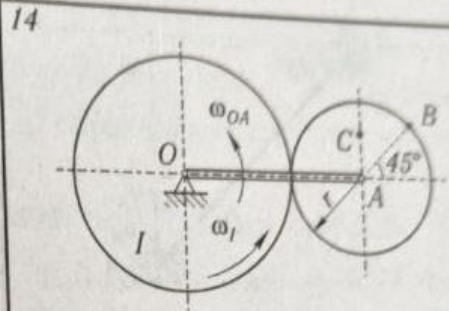
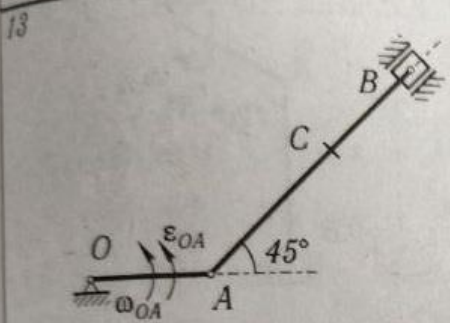
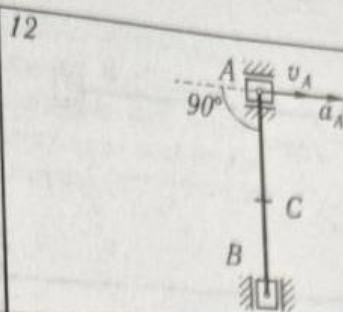
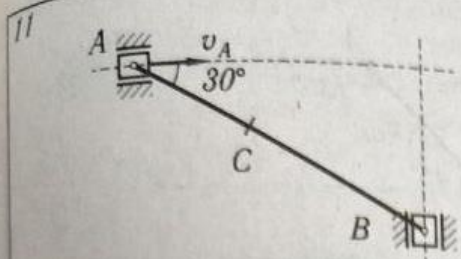


Рис. 74

Скорость точки A перпендикулярна кривошипу OA . Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}.$$

Модули скоростей точек B и C

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Расстояния AP_{AB} , BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB} .

$$AP_{AB} = 52,0 \text{ см}; \quad BP_{AB} = 30,0 \text{ см}; \quad CP_{AB} = 36,1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим $v_A = 15,0 \text{ см/с}$, $\omega_{AB} = 0,29 \text{ рад/с}$, $v_B = 8,7 \text{ см/с}$, $v_C = 10,5 \text{ см/с}$.

Вектор \vec{v}_C направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB .

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

Направим ось x вдоль шатуна AB в направлении от B к A .

Имеем $v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x)$, или, как видно из рис. 77,

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Отсюда

$$v_B = 8,7 \text{ см}.$$

Полнее убедиться, что в найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

2. *Определим ускорения точек в равном ускорения механизма (рис. 78). Ускорения точек A складываются из вращательного и поступательного ускорений:*

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^* + \vec{a}_A^{\omega}; \quad a_A^* = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^{\omega} = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^* + \vec{a}_{AB}^{\omega}.$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_A^* + \vec{a}_{AB}^* + \vec{a}_{AB}^{\omega}.$$



Рис. 76

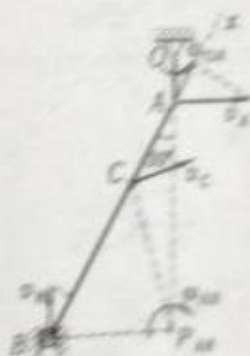


Рис. 77

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a_A^n = 20,0 \text{ см/с}^2; \quad a_A^u = 22,5 \text{ см/с}^2; \quad a_{AB}^n = 5,0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_A^n направлен от A к O . Вектор \vec{a}_A^u перпендикулярен вектору \vec{a}_A^n и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа OA — замедленное).

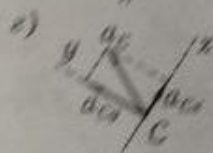
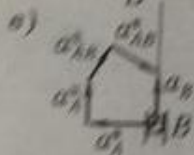
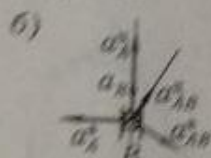
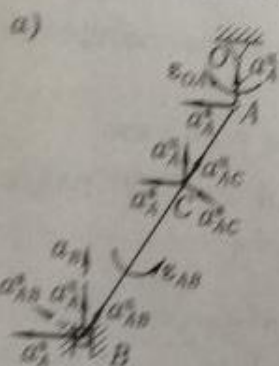


Рис. 78

Ускорение \vec{a}_B и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 78, б.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь a_{AB}^n — влгебраическая величина, определяется по формуле

$$\epsilon_{AB} = |a_{AB}^n|/AB.$$

Вычисляя, находим

$$\epsilon_{AB} = 0,34 \text{ рад/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_{AB}^n направлен от B к A . Что касается ускорения \vec{a}_B точки B и вращательного ускорения \vec{a}_{AB}^n , то известны только линии действия этих векторов: \vec{a}_B — по вертикали вдоль направляющих ползуна, \vec{a}_{AB}^n — перпендикулярно AB .

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 78, а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y , как показано на рис. 78, г, получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^n \cos 60^\circ + a_{AB}^n \cos 30^\circ + a_A^u; \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^n \cos 30^\circ + a_{AB}^n \cos 60^\circ + a_A^u. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим

$$a_B = 16,7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение \vec{a}_B направлено, как показано на рис. 78, а.

Из уравнения (3) получаем

$$a_{AB}^n = -20,2 \text{ см/с}^2.$$

Направление \vec{a}_{AB}^n противоположно показанному на рис. 78, а.

(\vec{r}_B — радиус-вектор точки B , проведенный из центра O),

$$x_B = a = \text{const.} \quad (5)$$

Проецируя (4) на ось x , с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin \alpha + AB \cdot \sin \beta = a. \quad (6)$$

Для определения угловой скорости $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ звена AB и углового ускорения $\varepsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos \alpha / (AB \cdot \cos \beta). \quad (8)$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA}$, имеем

$$OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos \beta \cdot \varepsilon_{AB} = 0;$$

$$\varepsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \operatorname{tg} \beta + OA(\varepsilon_{OA} \cos \alpha - \omega_{OA}^2 \sin \alpha) / (AB \cdot \cos \beta). \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять ω_{AB} и ε_{AB} для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 30^\circ$).

Заметим, что ω_{OA} и ε_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α . В данном случае $\omega_{OA} = 1,5$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = -2,0$ рад/с². Смысл знаков ω_{AB} и ε_{AB} определяется направлением отсчета угла β .

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y , получаем

$$y_B = OA \cdot \cos \alpha + AB \cdot \cos \beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin \alpha \cdot \varepsilon_{OA} - AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin \beta \cdot \varepsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$ на оси x и y .

Задание К.4. Кинематический анализ многозвенного механизма

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1A} = 2$ рад/с. Определить для заданного положения механизма:

1) скорости точек A, B, C, \dots механизма и угловые скорости всех его звеньев с помощью плана скоростей;