

4. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание. Груз массой m прикреплен к пружине жесткостью c (рис. 4.1). Начальная деформация пружины λ_0 , начальная скорость груза v_0 . Найти уравнение движения груза; амплитуду, частоту и период колебаний; наибольшее значение модуля силы упругости. Массой пружины, а также сопротивлениями движению груза и пружины пренебречь. Начало координат взять в положении статического равновесия груза на пружине. Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

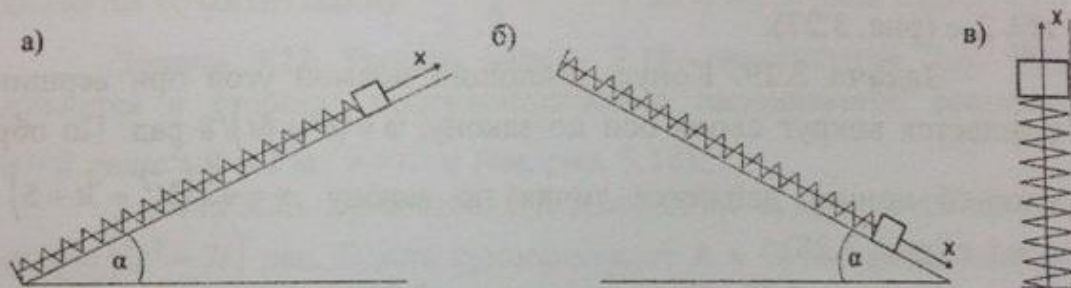


Рис. 4.1.

Пример: Пружина жесткостью 20 Н/см расположена вдоль плоскости, наклоненной к горизонту под углом 30° . В некоторый момент пружину сжимают на $0,5 \text{ см}$, прикрепляют груз массы 10 кг и сообщают ему скорость 56 см/с , направленную вверх параллельно наклонной плоскости.

Решение. Найдем сначала положение O статического равновесия груза (рис. 4.2, а). Пусть A – точка, соответствующая концу недеформированной пружины. Тогда $AO = \lambda_{\text{ст}}$ – статическая деформация, которой соответствует сила упругости $F_{\text{ст}} = c \lambda_{\text{ст}}$.

Рассмотрим равновесие груза. На него действуют три силы \vec{P} , \vec{N} и $\vec{F}_{\text{ст}}$. Выберем ось x параллельно плоскости и напишем уравнение равновесия в проекциях на эту ось:

$$\sum X_i = P \sin 30^\circ - F_{\text{ст}} = 0,$$

откуда $\lambda_{\text{ст}} = P \sin 30^\circ / c = mg \sin 30^\circ / c$.

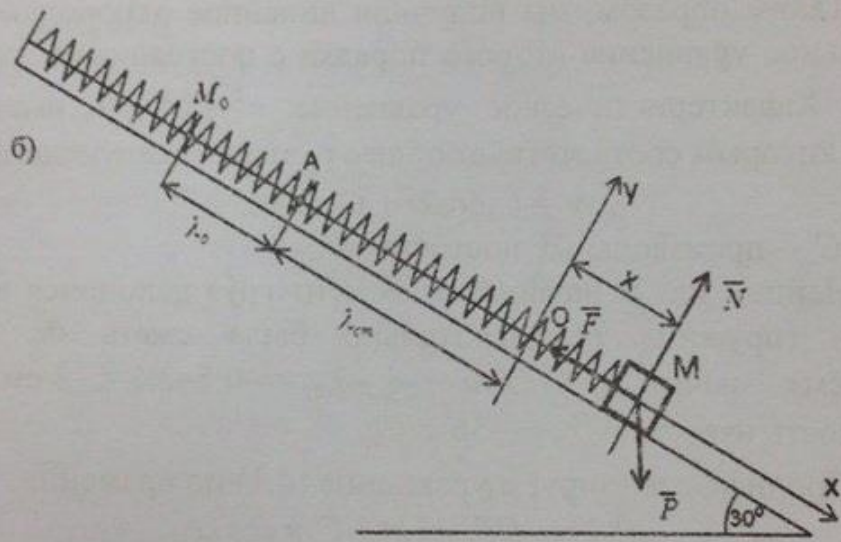
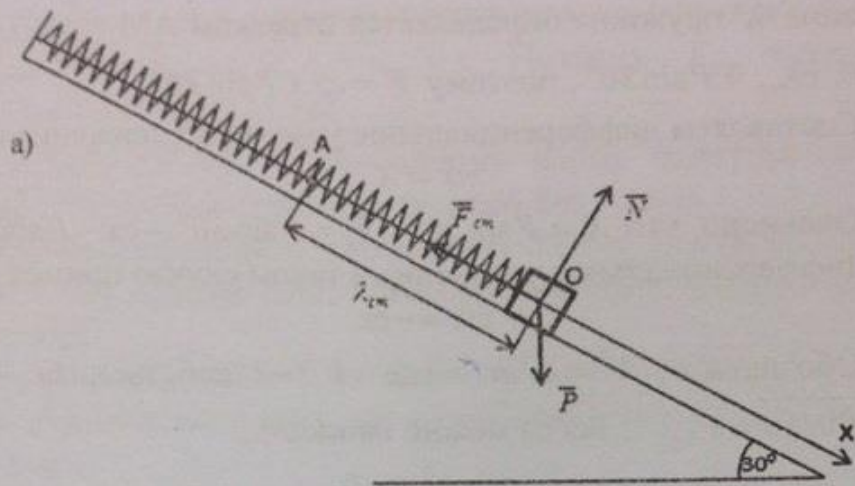


Рис. 4.2

Для вычислений в единицах СИ нужно коэффициент жесткости перевести в Ньютоны на метры. Тогда $c = 2000 \text{ Н/м}$. Примем $g = 10 \text{ м/с}^2$. Таким образом, $\lambda_{\text{ст}} = 10 \cdot 10 \cdot 0,5 / 2000 = 0,025 \text{ м} = 2,5 \text{ см}$.

Начало координат поместим в положении О статического равновесия груза (рис. 4.2, б). Груз изобразим в промежуточном положении М. На груз при его движении действуют силы \bar{P} , \bar{N} и \bar{F} , причем на основании закона Гука $F = c\lambda = c(x + \lambda_{\text{ст}})$, так как полная

деформация λ пружины определяется отрезком $AM = x + \lambda_{ст}$. В то же время $c\lambda_{ст} = P \sin 30^\circ$, поэтому $F = cx + P \sin 30^\circ$.

Составляем дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = X.$$

Очевидно, что $X = P \sin 30^\circ - F = P \sin 30^\circ - cx - P \sin 30^\circ = -cx$. Дифференциальное уравнение в таком случае примет вид:

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Обозначим $k^2 = c/m$, где k — собственная частота, $k = \sqrt{2000/10} \approx 14 \text{ с}^{-1}$. Тогда можно написать:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Таким образом, мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $r^2 + k^2 = 0$ имеет корни $r = \pm ki$, которым соответствует общее решение следующего вида:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (4.1)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Найдем их. В начальный момент груз находился в положении M_0 (пружина предварительно была сжата на величину $\lambda_0 = 0,5 \text{ см}$), значит $x_0 = -OM_0 = -\lambda_0 - \lambda_{ст} = -0,5 - 2,5 = -3 \text{ см}$. Начальная скорость известна: $\dot{x}_0 = -56 \text{ см/с}$.

Продифференцируем уравнение (4.1) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \quad (4.2)$$

Подставив в уравнение (4.1) и (4.2) $t = 0$ и начальные данные, получим $x_0 = -C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$, $\dot{x}_0 = -C_1 k \cdot 0 + C_2 k \cdot 1$. Решение этой системы даёт: $C_1 = x_0 = -3 \text{ см}$, $C_2 = \dot{x}_0 / k = -56 / 14 = -4 \text{ см}$.

Уравнение движения груза можно записать так:

$$x = -(3 \cos 14t + 4 \sin 14t) \text{ см}.$$

Амплитуда колебаний:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}.$$

Период колебаний: $\tau = 2\pi / k = 6,28 / 14 \approx 0,45 \text{ с}$.

Значение силы упругости максимально при наибольшей деформации пружины: $\lambda_{\max} = \lambda_{\text{ст}} + a$. Поэтому $F_{\max} = c(\lambda_{\text{ст}} + a) = 2000 \cdot (0,025 + 0,05) = 150 \text{ Н}$.

Задачи 4.1-4.5. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 4.6-4.10. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вверх.

Задачи 4.11-4.15. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вниз.

Задачи 4.16-4.20. К сжатой пружине прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 4.21-4.25. К растянутой пружине прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 4.26-4.30. Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вниз.

Заданные значения величин приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№ зад.	№ рис.	m , кг	c , Н/см	x_0 , см	\dot{x}_0 , см/с	№ зад.	№ рис.	m , кг	c , Н/см	x_0 , см	\dot{x}_0 , см/с
1	4.1,а	0,1	1,6	2	8	16	4.1,в	0,2	18	2	28
2	4.1,а	0,2	1,8	4	4	17	3.1,а	0,1	0,7	7	5
3	4.1,б	0,2	28,8	6	22	18	3.1,б	0,2	2,4	1	14
4	3.1,в	0,1	2,5	2	22	19	3.1,а	0,3	4,5	3	5
5	3.1,б	0,3	19,2	4	8	20	3.1,в	0,1	1,1	6	4
6	3.1,а	0,4	14,4	4	8	21	3.1,б	0,2	4	2	12
7	3.1,в	0,1	6,4	4	22	22	3.1,а	0,3	8,1	3	9
8	3.1,а	0,2	45	2	14	23	3.1,а	0,4	12,8	5	8
9	3.1,в	0,2	28,8	8	24	24	3.1,б	0,5	17,5	3	5
10	3.1,б	0,1	8,1	6	54	25	3.1,а	0,1	1,3	7	5
11	3.1,а	0,1	57,6	6	4	26	3.1,в	0,2	4,8	4	12
12	3.1,а	0,2	20	6	36	27	3.1,а	0,3	9,9	5	1
13	3.1,б	0,2	51,2	8	32	28	3.1,б	0,4	16	4	2
14	3.1,в	0,1	14,4	6	40	29	3.1,а	0,5	22,5	2	2
15	3.1,а	0,1	25,6	4	44	30	3.1,в	0,1	4,8	1	2