Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕХНОЛОГИИ И ДИЗАЙНА»

Кафедра технологии и проектирования текстильных изделий

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания к **лабораторным работам** для бакалавров
направления 261100.62 “Технология и проектирование текстильных изделий”
всех форм обучения

Составитель
О. М. Иванов

Санкт-Петербург
2012

Утверждено
на заседании кафедры
20. 09.2012 г.,
протокол № 2

Рецензент
Б.С. Михайлов

Оригинал подготовлен составителем и издан в авторской редакции

Подписано в печать 27 .09.2012 г. Формат 60 × 84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2.4. Тираж 100 экз.
Заказ 209/12
Электр. адрес: tpnm@yandex.ru
Отпечатано в типографии СПГУТД
191028, С.-Петербург, ул. Моховая, 26

ВВЕДЕНИЕ

Разработка современного оборудования и технологических процессов требует не только общеинженерных и специальных знаний, но и умения сначала спланировать, поставить и провести эксперимент, а затем проанализировать полученные данные с помощью изученных методов.

Цель преподавания дисциплины заключается в освоении основных принципов решения задач, связанных с проведением различного рода исследований и получения математических моделей технологических процессов текстильной промышленности. Здесь изучается методика планирования и проведения эксперимента, излагаются основные принципы измерения физических параметров процесса, свойств сырья и получаемого материала. Бакалавры должны освоить методы исследования технологических процессов, применяемых в текстильной промышленности. В данном курсе изучают методы получения эмпирических зависимостей, сравнения числовых характеристик по выборочным данным, вероятностно-статистические методы расчета и контроля точности и стабильности технологических процессов, а также способы оценки степени корреляции между параметрами процесса и характеристиками материала.

Назначение курса – научить бакалавров применению современных методов и средств исследования технологических процессов текстильного производства. Лучшему усвоению материала способствует проведение бакалаврами лабораторных и учебных исследовательских работ (УИРС).

Объем курса охватывает материал, который сообщается студентам на лекциях, лабораторных занятиях и консультациях, изучается самостоятельно в процессе работы с учебной литературой, в том числе и специальной по производству и проектированию текстильных изделий.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ. НАИМЕНОВАНИЕ ТЕМ И ИХ СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Применение числовых и функциональных характеристик случайных величин для анализа технологических процессов.

Основные статистические характеристики серии измерений. Дисперсия, среднеквадратичное отклонение, коэффициент вариации. Исключение резко выделяющихся значений. Нормальный закон распределения, его параметры и использование. Проверка гипотезы о законе распределения.

Тема 2. Точечное и интервальное оценивание параметров, планирование объема выборки.

Понятие доверительного интервала и доверительной вероятности. Критерий Стьюдента. Оценка доверительного интервала для среднего из выборки. Планирование объема необходимой выборки для обеспечения нужной точности.

Тема 3. Применение основных статистических критериев для сравнения числовых характеристик продукта или технологического процесса.

Понятие о статистических гипотезах и критериях оценки. Сравнение дисперсии свойств нового продукта со стандартной дисперсией и двух дисперсий нормальных совокупностей. Непараметрический критерий. Сравнение выборочной средней со стандартным значением. Сравнение двух средних из нормально распределенных генеральных совокупностей. Непараметрические критерии для сравнения двух или нескольких средних значений. Проверка стационарности процесса и случайности значений параметра в выборке. Практические примеры сравнения основных параметров выборки.

Тема 4. Планирование и обработка активного однофакторного эксперимента.

Изучение методов планирования и обработки однофакторного эксперимента. Получение и анализ параметров линейной зависимости, получаемой на основе экспериментальных данных.

Тема 5. Построение нелинейных регрессионных однофакторных моделей, преобразуемых в линейные.

Виды нелинейных моделей, применяемых для описания экспериментальных зависимостей. Функциональные шкалы и их применение при построении нелинейной зависимости. Основные виды нелинейных зависимостей, наиболее часто встречающихся при описании технологических процессов. Выбор вида нелинейной модели и линеаризация исходной зависимости. Определение коэффициентов выбранной модели. Практические примеры построения нелинейных эмпирических моделей технологических процессов.

Тема 6. Методы получения нелинейных полиномиальных моделей второго порядка.

Изучение основных способов получения и анализа нелинейных полиномиальных моделей второго порядка.

Тема 7. Методы оценки степени корреляции технологических параметров процесса и свойств получаемой продукции.

Вычисление коэффициента корреляции на основе данных экспериментальных измерений. Определение коэффициентов линейной регрессионной зависимости.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

В соответствии с учебным планом по курсу «Методы обработки результатов эксперимента» бакалавры выполняют лабораторные работы. Необходимые исходные данные для выполнения задания бакалавры получают у преподавателя. Выполнение всех лабораторных работ является необходимым предварительным условием для получения зачета по данному курсу.

Для выполнения лабораторных работ, прежде всего, необходимо уяснить, какие именно расчеты следует в данном конкретном задании провести, изучить соответствующий материал, провести необходимые расчеты и сделать выводы.

При использовании в задании формул, коэффициентов, критериев и значений отдельных параметров, заимствованных из литературы, следует в работе указать место получения сведений. Все входящие в формулы или таблицы величины должны быть пояснены, указаны их наименования и размерность. Обязательно необходимо указывать размерность полученного результата.

Выполняемые расчеты необходимо пояснять и комментировать, а после их завершения сделать необходимые выводы. Содержание вывода должно показать, что студент ясно представляет себе существо проделанной работы.

Содержание отчета по лабораторной работе должно показать, что студент ясно представляет себе существо используемого метода.

Качество выполненной работы оценивается по полноте и правильности выполнения задания, степени использования научно-технической литературы и форме изложения.

Не зачтенная лабораторная работа возвращается студенту для исправления ошибок и выполнения указаний проверяющего. Исправленная работа вторично представляется на проверку.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

РАСЧЕТ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: На основе предложенной серии измерений (выборки) рассчитать среднее значение, дисперсию, среднеквадратичное отклонение и коэффициент вариации. Проверить возможность исключения резко выделяющихся данных. Вычислить доверительный интервал с заданной доверительной вероятностью.

Методика расчета

При измерении технологических характеристик текстильного материала получен массив данных (выборка - x_i), на основе которого необходимо вычислить основные статистические параметры.

1. Среднее значение

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , \tag{1}$$

n – число проведенных измерений (размер выборки).

2. Оценка дисперсии

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad . \tag{2}$$

3. Оценка среднеквадратичного отклонения

$$S = \sqrt{S^2} \quad . \tag{3}$$

4. Коэффициент вариации

$$C_v = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100,\% \quad . \tag{4}$$

5. Исключение резко выделяющихся данных.
   Из имеющегося массива данных выбирают наибольшее x_{max} и наименьшее значения x_{min} и вычисляем расчетные значения критерия:

$$V_{Rmax} = \frac{x_{max} - \bar{x}}{S}\sqrt{\frac{n}{n-1}} \;\; ; \; V_{Rmin} = \frac{\bar{x} - x_{min}}{S}\sqrt{\frac{n}{n-1}} \quad . \tag{5}$$

Расчетные значения критерия сравнивают с табличным, определяемым исходя из объема выборки и доверительной вероятности : ***V_m (n, $P_д$).***

6. Определение абсолютной погрешности измеряемой величины.

$$\Delta x = t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \quad , \tag{6}$$

где $t_\alpha(p_\partial, f)$ – коэффициент Стьюдента, p_∂ – доверительная вероятность, $f = n - 1$ – число степеней свободы.

Доверительный интервал: $x = \overline{x} \pm \Delta x$.

Относительная погрешность: $\varepsilon = \Delta x / x$.

Исходные данные и результаты расчетов сводят в таблицу, пример которой приведен ниже.

Таблица 1.

X_j	Y_{ij}						Y_{cp}	S^2	S	C_v	V_{rmin}	V_{rmax}	Δx	ε, %
2,5	2,92	2,53	2,81	2,61	2,97	2,67	2,75	0,0311	0,176	6,40	1,38	1,36	0,185	6,72
4	5,95	6,76	5,83	6,45	5,7	6,45	6,19	0,1775	0,421	6,81	1,27	1,48	0,442	7,14
5,5	10,7	9,46	11,3	10,07	11,6	8,11	10,21	1,6705	1,292	12,66	1,78	1,18	1,357	13,29
7	11,9	14,5	12,3	13,2	12,2	13,9	13,00	1,0880	1,043	8,02	1,16	1,58	1,095	8,42
8,5	17,2	15,6	17,9	15,9	17,7	16,4	16,78	0,9177	0,958	5,71	1,35	1,28	1,005	5,99
10	21,6	19,6	23,2	18,6	20,4	18,8	20,37	3,1427	1,773	8,70	1,09	0,76	1,861	9,14
11,5	21,8	24,2	22,3	25,1	22,5	23,7	23,27	1,6187	1,272	5,47	1,26	1,58	1,335	5,74
13	25	28	26,4	27,7	26,4	28,8	27,05	1,8870	1,374	5,08	1,63	1,40	1,442	5,33

Отчёт должен содержать: исходные данные, краткое изложение расчетного задания и методики расчета, подробный расчет характеристик для одного уровня фактора, таблицу с результатами расчёта для всех уровней фактора и необходимые выводы.

Вариант1

Таблица 1-

X_j	Y_i					$\bar{Y}$	S^2	S	C_v	V_{Rmin}	V_{Rmax}	Δx	ε, %
1,5	40	45	48	50	52								
4,5	37	27	40	45	39								
8,5	55	42	50	52	32								
12,5	48	54	52	50	39								
16,5	44,5	38,5	34,8	40,8	39,2								
20,5	54,1	58,5	50	60,1	48,5								
24,5	49,5	52,4	62	61,8	58,3								
28,5	59,1	60,1	50,8	49,5	48,9								

Вариант 2

Таблица 1.

X_j	Y_{ij}						Y_{cp}	S^2	S	C_v	V_{rmin}	V_{rmax}	Δx	ε, %
2,5	3,8	4,0	3,5	4,2	3,5	4,6								
4	6,9	7,5	5,5	3,3	4,9	6,7								
5,5	12,5	12,9	10,1	9,9	10,0	12,1								
7	14,2	15,8	13,7	14,7	15,1	19,2								
8,5	17,2	17,9	15,9	14,8	16,5	16,9								
10	19,6	18,2	17,9	18,5	18,6	17,8								
11,5	23,1	21,3	25,1	22,2	25,1	24,5								
13	25,0	24,6	25,9	24,3	24,8	25,4								

Вариант 3

Таблица 1.

X_j	Y_{ij}						Y_{cp}	S^2	S	C_v	V_{rmin}	V_{rmax}	Δx	ε, %
3,8	15,1	16,3	20,1	17,7	20,1	19,5								
5,8	16,2	17,8	15,7	16,7	17,1	21,2								
7,8	23,1	21,3	25,1	22,2	25,1	24,5								
9,8	25,0	24,6	25,9	24,3	24,8	25,4								
11,8	32,1	30,3	29,8	29,5	30,5	31,8								
13,8	30,1	29,7	32,0	31,8	29,8	20,5								
15,8	35,8	34,0	34,6	35,3	35,2	34,4								
17,8	40,9	40,2	39,9	38,5	38,9	39,0								

Вариант 4

Таблица 1.

X_j	Y_{ij}						Y_{cp}	S^2	S	C_v	V_{rmin}	V_{rmax}	Δx	ε, %
4	8,7	3,0	8,4	6,0	8,0	8,2								
5	12,2	12,8	13,4	13,9	14,4	14,8								
6	15,1	16,3	20,1	17,7	20,1	19,5								
7	19,6	18,2	17,9	18,5	18,6	17,8								
8	17,2	15,6	17,9	15,9	17,7	17,2								
9	23,1	21,3	25,1	22,2	25,1	24,5								
10	21,8	24,2	22,3	25,1	22,5	23,7								
11	30,1	29,7	32,0	31,8	29,8	20,5								

Вариант 6

Таблица 1.

X_j	Y_{ij}						Y_{cp}	S^2	S	C_v	V_{rmin}	V_{rmax}	Δx	ε, %
4	9.3	3,5	8,9	6,5	8,5	8,7								
5	12,7	12,5	13,9	14,4	14,9	15,3								
6	15,6	16,8	20,6	18,2	20,6	20,0								
7	20,1	18,7	18,4	18,9	19,1	18,3								
8	17,7	16,1	18,4	16,4	18,2	17,7								
9	23,6	21,8	25,6	22,7	25,6	25,0								
10	22,3	24,7	22,8	25,6	23,0	24,2								
11	30,6	30,5	32,5	31,9	30,3	21,0								

Вариант 7

Таблица 1.

X_j	Y_{ij}						Y_{cp}	S^2	S	C_v	V_{rmin}	V_{rmax}	Δx	ε, %
4	28,7	23,0	28,4	26,0	28,0	28,2								
5	32,2	32,8	33,4	33,9	34,4	34,8								
6	35,1	36,3	50,1	37,7	50,1	39,5								
7	39,6	38,2	37,9	38,5	38,6	37,8								
8	37,2	35,6	37,9	35,9	37,7	37,2								
9	43,1	41,3	45,1	42,2	45,1	44,5								
10	41,8	44,2	42,3	45,1	42,5	43,7								
11	50,1	49,7	52,0	51,8	49,8	40,5								

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, СПОСОБУ НАТЯНУТОЙ НИТИ И СПОСОБУ СРЕДНЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Цель работы: Определить коэффициенты линейного уравнения на основе имеющихся экспериментальных данных по методу наименьших квадратов, способу натянутой нити и способу средней.

Основные сведения

При проведении экспериментов по выявлению зависимости между различными параметрами какого-либо процесса результаты эксперимента можно свести в таблицу следующего вида:

Таблица 2.

x_i :	x_1	x_2	…	x_n
y_i :	y_1	y_2	…	y_n

Очень часто функция является линейной или близкой к ней. Т.е. $y = ax + b$. Необходимо определить численные значения коэффициентов. Это можно сделать различными способами. В работе необходимо определить их тремя методами и выбрать вариант, наиболее адекватно описывающий результаты эксперимента. Пример выполнения работы рассмотрим на основе результатов, полученных в предыдущей лабораторной работе.

Метод «натянутой нити»

Основан на геометрическом подборе прямой «на глаз». Нанеся экспериментальные значения на миллиметровку, подбирают графически прямую ближе всего подходящую к полученным точкам.

Выбрав две произвольные точки на прямой (достаточно далеко отстоящих друг от друга), определяют их координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Теперь для определения коэффициентов a и b можно записать два простых уравнения

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned} \qquad (7)$$

Из уравнений (7) вычисляют значения ***a*** и ***b.***

Для примера рассмотрим исходные данные, полученные при выполнении лабораторной работы № 1.

Таблица 3.

x_i	2,5	4,0	5,5	7,0	8,5	10,0	11,5	13,0
y_i	2,75	6,19	10,21	13,0	16,78	20,37	23,27	27,05

На рис. 1 эти результаты представлены в виде графика, где табличные данные представлены в виде точек, а прямая построена приближенно, как было сказано выше.

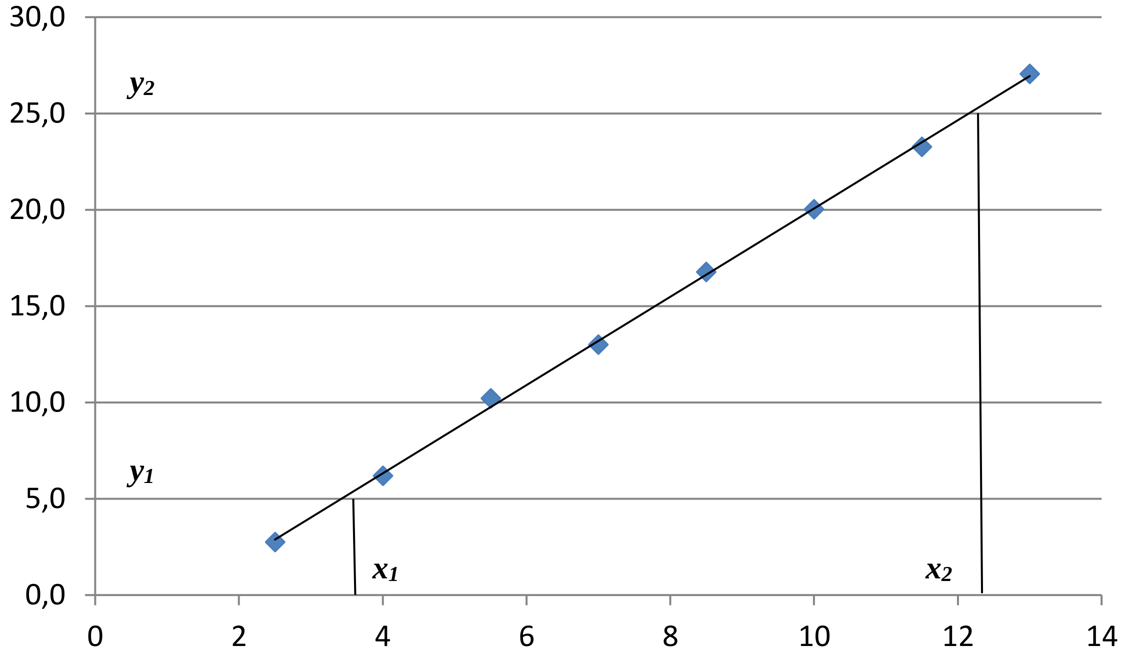

Рис. 1. Результаты эксперимента и аппроксимирующая зависимость

Если в качестве выбранных координат ***(x_1; y_1)*** и ***(x_2; y_2)*** принять (3,6; 5,0) и (12,2; 25,0), то система уравнений (4) будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{3{,}6\,a + b = 5{,}0}$$
$$\mathbf{12{,}2\,a + b = 25{,}0}$$

Решая систему уравнения относительно коэффициентов, получаем:

$$\mathbf{a = (25{,}0 - 5{,}0)/(12{,}2 - 3{,}6) = 2{,}32,}$$
$$\mathbf{b = 25{,}0 - 12{,}2 \cdot 2{,}32 = -\,3{,}3\,.}$$

Следовательно, линейная зависимость будет выглядеть так: $\boldsymbol{y_1 = 2{,}32x - 3{,}30}$.

Способ «средней»

Основной принцип, заложенный в данный способ, заключается в том, что сумма отклонений экспериментальных и расчетных значений равна нулю. Математически это соотношение записывается следующим образом.

$$\sum(y_i - ax_i - b) = 0 \ . \tag{8}$$

Чтобы получить два уравнения для определения двух коэффициентов экспериментальные данные (x_1,y_1), (x_2,y_2), …, (x_n,y_n) разделяют на две приблизительно равные части: m и $n - m$ пар измерений. Если n - четное, то $m = n/2$, если нечетное то $m = (n \pm 1)/2$. Записывают следующую систему уравнений

$$a\sum_{i=1}^{m} x_i + mb = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$a\sum_{i=m+1}^{n} x_i + (n-m)b = \sum_{i=m+1}^{n} y_i$$

Решая систему уравнений, вычисляют коэффициенты ***a*** и ***b***.

Используем в качестве примера те же данные, что и в предыдущем случае (табл. 3). В первом уравнении сумма значений x_i и y_i включает первые четыре результата, а во втором уравнении – последние четыре. Система будет выглядеть следующим образом.

$$19\,a + 4b = 32{,}15;$$
$$43\,a + 4b = 87{,}47.$$

Решение системы дает следующие результаты:

$$a = (87{,}47 - 32{,}15)/(43 - 19) = 2{,}305; \quad b = (87{,}47 - 43 \cdot 2{,}305)/4 = -2{,}911 \ .$$

Соответствующая зависимость выглядит следующим образом.

$$y_2 = 2{,}305\,x - 2{,}911 \ .$$

Метод наименьших квадратов

Наилучшими коэффициентами зависимости в данном методе считают те, которые обеспечивают минимум суммы квадратов отклонений расчетных и экспериментальных значений. Математически это выглядит следующим образом:

$$F = \sum(y_i - ax_i - b)^2 = \min \ . \tag{9}$$

Нужную систему уравнений для определения коэффициентов получают исходя из известных математических методов поиска экстремума функции.

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0\,.$$

Решая эту систему определяют коэффициенты линейной зависимости.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad (10)$$

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (11)$$

Расчётная таблица для определения коэффициентов в рассматриваемом нами примере имеет вид:

Таблица 4.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	2,5	2,75	6,25	6,88
2	4	6,19	16	24,76
3	5,5	10,21	30,25	56,14
4	7	13,00	49	91,00
5	8,5	16,78	72,25	142,7
6	10	20,37	100	203,7
7	11,5	23,27	132,25	267,6
8	13	27,05	169	351,7
Σ	62	119,62	575	1144,3

Теперь легко вычислить значения коэффициентов:

$a = (1144{,}3 - 62 \cdot 119{,}62/8)/(575 - 62^2/8) = 2{,}2995$,
$b = 119{,}62/8 - 2{,}2995 \cdot 62/8 = -2{,}869$.

Полученная зависимость имеет вид: $y_3 = 2{,}2995x - 2{,}869$.

Проверка адекватности полученных коэффициентов

Для сравнения трех вариантов линейной зависимости, полученных разными методами, вычисляют сумму квадратов отклонений экспериментальных данных y_i от рассчитанных по найденным формулам значений y_{pi} в тех же точках.

Таблица 5.

i	x_i	y_i	y_{1i}	y_{2i}	y_{3i}	$(y_i - y_{1i})^2$	$(y_i - y_{2i})^2$	$(y_i - y_{3i})^2$
1	2,5	2,75	2,5	2,8515	2,8798	0,063	0,010	0,016
2	4	6,19	5,98	6,309	6,329	0,044	0,014	0,019
3	5,5	10,21	9,46	9,7665	9,7783	0,558	0,194	0,184
4	7	13,00	12,94	13,224	13,228	0,004	0,050	0,052
5	8,5	16,78	16,42	16,6815	16,677	0,132	0,010	0,011
6	10	20,37	19,9	20,139	20,126	0,218	0,052	0,058
7	11,5	23,27	23,38	23,5965	23,575	0,013	0,109	0,095
8	13	27,05	26,86	27,054	27,025	0,036	0,000	0,001
					Σ	1,067	0,439	0,436

Здесь y_{1i} значения, рассчитанные по формулам метода «натянутой нити» ; y_{2i} по методу «средней» ; y_{3i} по методу наименьших квадратов.

В последней строке таблицы представлены суммы квадратов отклонений расчетных и экспериментальных значений, которые позволяют выбрать зависимость, наиболее адекватно описывающую результаты эксперимента. В данном случае это последняя зависимость, полученная методом наименьших квадратов, поскольку указанная сумма для нее минимальна.

Методика и порядок выполнения

1. Получить у преподавателя набор исходных данных (x_i , y_i).
2. Определить коэффициенты прямой a и b тремя описанными способами.
3. Сравнить полученные разными методами коэффициенты между собой.

Отчёт должен содержать: исходные данные, краткое изложение расчетных методов, таблицу для расчёта по методу наименьших квадратов и результаты, график с исходными данными, прямой и точками для расчёта по методу натянутой нити, расчёт методом средней, таблицу сравнения коэффициентов, определённых разными способами и выводы о достоинствах и недостатках каждого метода.

Вариант 1

x_i	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0
y_i	2,75	6,19	10,21	13,0	16,78	20,37	23,27	27,05

Вариант 2

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
y_i	2,3	4,1	5,0	6,3	7,2	9,8	11,2	12,5

Вариант 3

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
y_i	6,4	11,8	15,4	23,5	28,1	34,3	40,0	45,2

Вариант 4

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
y_i	12,5	25,8	36,1	48,9	60,0	72,5	84,5	97,1

Вариант 5

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	10,5	12,5
y_i	12,3	14,1	15,0	16,3	17,2	19,8	21,2	22,5	24,3	28,5

Вариант 6

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	10,5	12,5
y_i	62,3	64,1	65,0	66,3	67,2	69,8	61,2	62,5	64,3	68,5

Вариант 7

x_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	10,5	12,5
y_i	2,3	4,1	5,0	6,3	7,2	9,8	11,2	12,5	24,3	28,5

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

СРАВНЕНИЕ ДВУХ СРЕДНИХ ИЗ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ГЕНЕРАЛЬНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ

Цель работы: Определить значимость разницы между средними двух независимых выборок на основе полученных экспериментальных данных.

Основные сведения

Если проверяется гипотеза о равенстве двух средних из нормально распределённых генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны, то, прежде всего, следует проверить с помощью $\boldsymbol{F}$ – критерия гипотезу о равенстве дисперсий в генеральных совокупностях, при альтернативной гипотезе $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Расчётное значение критерия Фишера определяют по формуле:

$$F_R = \frac{S_1^2\{Y\}}{S_2^2\{Y\}} = \frac{\dfrac{1}{m_1 - 1}\sum_{k=1}^{m_1}(Y_{k1} - \overline{Y}_1)^2.}{\dfrac{1}{m_2 - 1}\sum_{k=1}^{m_2}(Y_{k2} - \overline{Y}_2)^2} \quad . \tag{12}$$

Вычисленное значение сравнивают с табличным критерием Фишера – $\boldsymbol{F_T}$, определяемым исходя из значений $\alpha = 0{,}05,\ f_1 = m_1 - 1,\ f_2 = m_2 - 1$.

Если $\boldsymbol{F_R < F_T}$ то гипотеза о равенстве дисперсий не отвергается, т.е. два ряда измерений являются равнозначными. Если наоборот, то гипотеза о равенстве дисперсий отвергается.

<u>*Вариант 1*</u>: равноточность двух рядов измерений доказана.

Для проверки гипотезы о равенстве средних, найденных по независимым малым выборкам, используется критерий t (Стьюдента), расчётное значение которого определяется по формуле

$$t_R = \frac{\left|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2.\right|}{\sqrt{S^2\{Y\}}}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad , \tag{13}$$

где

$$S^2\{Y\} = \frac{(m_1 - 1)\cdot S_1^2\{Y\} + (m_2 - 1)\cdot S_2^2\{Y\}}{m_1 + m_2 - 2} \quad . \tag{14}$$

Для проверки гипотезы $\boldsymbol{H_0: M\{Y_1\} = M\{Y_2\}}$ при конкурирующей гипотезе $\boldsymbol{H_1: M\{Y_1\} \neq M\{Y_2\}}$ используют двусторонний критерий $\boldsymbol{t_{T2}}$, табличное значение которого определяют по приложению 3 при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и числе степеней свободы $\boldsymbol{f = m_1 + m_2 - 2}$.

Если $t_R > t_{T2}$, нулевую гипотезу отвергают, т.е. исследователь устанавливает, например, что конструктивные изменения в машине обусловили значимое различие между выходными параметрами. Если $t_R < t_{T2}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, т.е. оба ряда измерений относятся к одной и той же совокупности, для которой среднее значение определяется по формуле:

$$\overline{Y} = \frac{m_1 \overline{Y}_1 + m_2 \overline{Y}_2}{m_1 + m_2} \quad . \tag{15}$$

<u>*Вариант 2*: </u>равноточность двух рядов измерений не доказана.

В этом случае для проверки нулевой гипотезы H_0 о равенстве средних $M\{Y_1\} = M\{Y_2\}$ используется также критерий t (Стьюдента), расчётное значение которого определяют по приближённой формуле

$$t_R = \frac{\left|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2\right|}{\sqrt{\dfrac{S^2\{Y_1\}}{m_1} + \dfrac{S^2\{Y_2\}}{m_2}}} \quad . \tag{16}$$

Табличное значение двустороннего критерия определяют при том же уровне значимости, что и раньше и числе степеней свободы

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 (1 - C)^2 + C^2 f_2} \quad , \tag{17}$$

где $C = \dfrac{\dfrac{S^2\{Y_1\}}{m_1}}{\dfrac{S^2\{Y_1\}}{m_1} + \dfrac{S^2\{Y_2\}}{m_2}}$, $f_1 = m_1 - 1$, $f_2 = m_2 - 1$.

Если $t_R < t_{T2}[\alpha, f]$, то разница не значима, а если $t_R > t_{T2}[\alpha, f]$, то разница между средними значима.

Рассмотрим описанный метод на примере. Ниже представлены две выборки исходных данных.

Таблица 6.

Y_{1i}	13,35	16,29	13,28	13,45	15,44	13,56	12,67	13,24	9,27	10,12
Y_{1i}	10,51	14,73	10,30	10,23	13,17	15,09	17,18	17,92	13,85	18,07
Y_{2i}	6,46	9,70	14,41	5,69	15,03	11,82	8,21	13,51	17,89	10,83

Первые две строки включают первую выборку Y_{1i} из 20 измерений, а третья строка включает вторую выборку Y_{2i} из 10 измерений.

Средние и дисперсии этих выборок равны:

$Y_{1\,ср}$ = 13,59; S_1^2 = 6,82; $Y_{2\,ср}$ = 11,35; S_2^2 = 15,5.

Сравнивая дисперсии с использованием критерия Фишера (12) вычисляем его расчетное значение:

$$F_r = 15{,}5/6{,}82 = 2{,}27 < F_t = 2{,}42.$$

Поскольку равноточность двух рядов измерений не отвергается, то для сравнения «средних» используем первый вариант (13) критерия. Для этого случая средняя дисперсия (14) равна: $S^2 = 9{,}61$.

Далее сравниваем расчетное и табличное значение критерия:

$$t_r = 1{,}86 < t_t = 2{,}048 .$$

Сравнение показывает, что гипотеза о равенстве «средних» не отвергается и, следовательно, обе выборки можно объединить, вычислив суммарное среднее (15) : $Y_{ср} = 12{,}84$.

Методика и порядок выполнения

1. Получить у преподавателя исходные данные Y_{1i},Y_{2i}.
2. Вычислить значения среднего и дисперсии для двух рядов измерений.
3. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий двух серий измерений.
4. Проверить гипотезу о равенстве средних выбранным методом в зависимости от результата п.3.
5. Сделать выводы о результатах анализа экспериментальных данных.

Отчёт должен содержать: Исходные данные, краткое изложение методов расчёта, результаты всех расчётов и выводы по проделанной работе.

Юля, здравствуйте!

В этой работе 2 выборки. Одна 20 замеров Y20, вторая - пять Y10.

Необходимо определить равноточность двух выборок с помощью критерия Фишера, т. е. возможность считать все замеры как одну выборку в 30 измерений.

В Му пример. Каждому из Вас были выданы свои данные с разным объемом выборок. Варианты в конце Лаб 3. Выберете любой.

Что нужно посчитать:

1. Проведите статистическую обработку рядов данных, т.е определите среднее и дисперсию каждой выборки.
2. Затем надо проверить гипотезу о равенстве дисперсий по формуле 12.
3. В зависимости от ответа выбрать один и вариантов дальнейшего расчета для подтверждения гипотезы о равенстве двух средних.

Вариант 1

Таблица 6.

Y_{1i}	325,4	300,5	290,5	350,4	333,8	295,4	270,9	320,9	335,9	310,8
Y_{1i}	309,5	291,3	315,4	324,3	325,0	339,5	340,1	327,9	300,2	310,8
Y_{2i}	298,5	289,4	300,9	317,7	311,8	308,9	269,7	340,3	325,3	312,4

Вариант 2

Таблица 6.

Y_{1i}	0,25	0,35	0,4	0,19	0,2	0,22	0,27	0,20	0,40	0,34
Y_{1i}	0,30	0,29	0,26	0,25	0,20	0,22	0,30	0,33	0,35	0,31
Y_{2i}	0,36	0,40	0,42	0,40	0,50	0,39	0,43	0,50	0,55	0,25

Вариант 3

Таблица 6.

Y_{1i}	60	65	59	52	66	60	61	64	69	57
Y_{1i}	55	55	56	49	52	58	56	60	62	61
Y_{2i}	69	65	63	67	62	60	61	59	55	57

Вариант 4

Таблица 6.

Y_{1i}	2,8	3,4	2,5	2,9	2,5	2,5	2,4	2,0	2,3	2,5
Y_{1i}	3,0	2,7	2,8	2,6	2,9	3,1	3,0	2,6	2,5	2,5
Y_{2i}	1,9	2,0	2,2	19	1,7	2,0	2,0	1,5	1,9	2,5

Вариант 5

Таблица 6.

Y_{1i}	326	294	311	345	327	329	338	298	345	287
Y_{1i}	352	345	359	298	289	300	311	321	335	279
Y_{2i}	259	284	296	260	300	290	310	321	333	250

Вариант 6

Таблица 6.

Y_{1i}	12,8	31,4	12,5	12,9	12,5	12,5	12,4	12,0	12,3	12,5
Y_{1i}	13,0	12,7	12,8	12,6	12,9	13,1	13,0	12,6	12,5	12,5
Y_{2i}	11,9	12,0	12,2	19,0	11,7	12,0	12,0	11,5	11,9	12,5

Вариант 7

Таблица 6.

Y_{1i}	225,4	200,5	290,5	250,4	233,8	195,4	170,9	220,9	235,9	210,8
Y_{1i}	209,5	191,3	215,4	224,3	225,0	239,5	240,1	227,9	200,2	210,8
Y_{2i}	198,5	189,4	200,9	217,7	211,8	208,9	169,7	240,3	225,3	212,4

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ОЦЕНКА СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ И ПОЛУЧЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТА С ФАКТОРНЫМ ПЛАНИРОВАНИЕМ

Цель работы: Спланировать эксперимент по полностью рандомизированному плану. Построить матрицу планирования эксперимента. Оценить степень влияния факторов и их взаимодействий. Построить линейную регрессионную модель зависимости.

Методика расчета

Рассмотрим факторный эксперимент типа «$\mathbf{2^3}$». Это означает, что мы имеем дело с тремя факторами (А, В, С) на двух уровнях: нижнем (0) и верхнем (1). Предлагаемые обозначения очень удобны для дальнейших расчетов.

Оценить влияние разводки в передней зоне вытяжного прибора (мм), вытяжки в передней зоне вытяжного прибора и нагрузки на переднюю вытяжную пару (кг) на неровноту ленты.

Таблица 5.

Нагрузка на переднюю вытяжную пару (кг)	Разводка в передней зоне вытяжного прибора, мм			
	32 (A_0)		34 (A_1)	
	Вытяжка в передней зоне вытяжного прибора		Вытяжка в передней зоне вытяжного прибора	
	12,6 (B_0)	20,8 (B_1)	12,6 (B_0)	20,8 (B_1)
8	***(1)*** 12,0 11,8 12,3	***b*** 13,2 12,7 13,4	***a*** 12,7 13,0 13,2	***ab*** 13,9 13,7 14,4
10	***c*** 11,2 10,8 11,5	***bc*** 11,7 11,9 12,1	***ac*** 11,8 12,1 12,3	***abc*** 12,2 12,6 12,8

Опишем алгоритм и результаты вычислений для приведенного в таблице варианта.

1. Вычисляем сумму значений в каждой ячейке: ***(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc.***
   (1) = 36,1; a = 38,9; b = 39,3; ab = 42,0; c = 33,5; ac = 36,2; bc = 35,7; abc = 37,6 .
2. Вычисляем сумму значений всех ячеек:
   S = (1) + a + b + ab + c + ac + bc + abc = 299,3 .
3. Вычисляем сумму квадратов всех значений в каждой ячейке:
   $Sk = 12{,}0^2 + 11{,}8^2 + 12{,}3^2 + 13{,}2^2 + \ldots + 12{,}8^2 = 3750{,}03$.
4. Проводим оценку влияния всех факторов и их взаимодействий:
   8A = - (1) + a – b + ab – c + ac – bc + abc = 10,1;

8B = - (1) - a + b + ab – c - ac + bc + abc = 9,9 ;
8AB = + (1) - a – b + ab + c - ac – bc + abc = - 0,9 ;
8C = - (1) - a – b - ab + c + ac + bc + abc = -13,3 ;
8AC = + (1) - a + b - ab – c + ac – bc + abc = -0,9 ;
8BC = + (1) + a – b - ab – c - ac + bc + abc = - 2,7 ;
8ABC = - (1) + a + b - ab + c - ac – bc + abc = - 0,7 .

5. Вычисляем «контрасты» для всех факторов:

$$\boldsymbol{SS_A = \frac{(8A)^2}{r\cdot 2^3} = 4,25};\ \boldsymbol{SS_B = \frac{(8B)^2}{r\cdot 2^3} = 4,08};\ \boldsymbol{SS_{AB} = \frac{(8AB)^2}{r\cdot 2^3} = 0,034};$$
$$\boldsymbol{SS_C = \frac{(8C)^2}{r\cdot 2^3} = 7,37};\ \boldsymbol{SS_{AC} = \frac{(8AC)^2}{r\cdot 2^3} = 0,034};\ \boldsymbol{SS_{BC} = \frac{(8BC)^2}{r\cdot 2^3} = 0,303};$$
$$\boldsymbol{SS_{ABC} = \frac{(8ABC)^2}{r\cdot 2^3} = 0,02};$$

6. Вычисляем контраст ошибки:

$$\mathbf{SS_{ош} = S_k - SS_A - SS_B - SS_{AB} - SS_C - SS_{AC} - SS_{BC} - SS_{ABC} - \frac{(S)^2}{r\cdot 2^3} = 1{,}413}$$

7. Вычисляем величину ошибки:

$$O = \frac{SS_{ош}}{f} = 0{,}088\ ,$$

где ***f = (r-1) 2³*** – число степеней свободы.

8. Вычисляем расчетное значение критерия Фишера:

$$F_{1,16}^{A} = \frac{SS_A}{O} = 48{,}1\ ;\ \ F_{1,16}^{B} = \frac{SS_B}{O} = 46{,}2\ ;\ \ F_{1,16}^{AB} = \frac{SS_{AB}}{O} = 0{,}38\ ;$$
$$F_{1,16}^{C} = \frac{SS_C}{O} = 83{,}4\ ;\ \ F_{1,16}^{AC} = \frac{SS_{AC}}{O} = 0{,}38\ ;\ \ F_{1,16}^{BC} = \frac{SS_{BC}}{O} = 3{,}44\ ;$$
$$F_{1,16}^{ABC} = \frac{SS_{ABC}}{O} = 0{,}23\ .$$

Табличное значение критерия Фишера $F^{T}_{1,16}$= 4,49.

Если расчетное значение критерия больше табличного значит, данный фактор или взаимодействие факторов оказывает существенное влияние на выбранный критерий эффективности процесса. Если расчетное значение критерия меньше табличного значит, данный фактор или взаимодействие факторов не оказывает влияния на выбранный критерий.

В нашем случае существенное влияние оказывают все 3 фактора (A, B, C), а все взаимодействия существенного влияния не оказывают.

9. Определение коэффициентов линейной регрессионной модели, адекватно описывающей результаты эксперимента.
   Зависимость имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{Y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_3x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3\ .}$$

Коэффициенты данной зависимости вычисляют следующим образом:

$a_0 = \frac{S}{r \cdot 2^3} = 12,47$; $a_1 = \frac{8A}{r \cdot 2^3} = 0,421$; $a_2 = \frac{8B}{r \cdot 2^3} = 0,412$; $a_{12} = \frac{8AB}{r \cdot 2^3} = -0,0375$; $a_3 = \frac{8C}{r \cdot 2^3} = -0,554$; $a_{13} = \frac{8AC}{r \cdot 2^3} = -0,0375$;

$$a_{23} = \frac{8BC}{r \cdot 2^3} = -0,1125 \;;\quad a_{123} = \frac{8ABC}{r \cdot 2^3} = -0,0292 \;;$$

10. Проверка адекватности полученного регрессионного уравнения

В полученном уравнении переменные являются кодированными, т.е. изменяются в пределах от – 1 до + 1 при изменении исходных факторов в пределах, указанных в таблице. Кодированные значения факторов вычисляют следующим образом []:

Для фактора А: $\boldsymbol{x_1 = (X_1 - 33)/1}$; для фактора В: $\boldsymbol{x_2 = (X_2 - 16,7)/4,1}$; для фактора С: $\boldsymbol{x_3 = (X_3 - 9)/1}$;

Проверку правильности полученного уравнения осуществляют, подставляя кодированные значения переменных и сравнивая результаты расчетов со средними значениями для каждой ячейки таблицы. Результаты представляют в виде таблицы 6:

Таблица 6.

Ячейка	Значения переменных	$\boldsymbol{Y_{эксп}}$	$\boldsymbol{Y_{расч}}$
(1)	-1, -1, -1	12,03	12,03
a	1, -1, -1	12,97	12,97
b	-1, 1, -1	13,1	13,1
ab	1, 1, -1	14,0	14,0
c	-1, -1, 1	11,17	11,17
ac	1, -1, 1	12,07	12,07
bc	-1, 1, 1	11,9	11,9
abc	1, 1, 1	12,53	12,53

11. Получение регрессионного уравнения в раскодированных значениях переменных.

В данном случае, с учетом кодировки, приведенной выше, регрессионное уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{Y = a_0 + a_1 (x_1 - 33) + a_2 (x_2 - 16,7)/4,1 + a_{12}(x_1 - 33)(x_2 - 16,7)/4,1 + a_3 (x_3 - 9) + a_{13}(x_1 - 33)(x_3 - 9) + a_{23}(x_2 - 16,7)/4,1\,(x_3 - 9) + a_{123}(x_1 - 33)(x_2 - 16,7)/4,1\,(x_3 - 9)}\ .$$

Раскрыв скобки, мы получим регрессионное уравнение в натуральных значениях переменных. Его также можно проверить на адекватность.

Вариант 1. Оценить влияние разводки щели контрольно-очистного прибора, натяжения скорости перематывания на обрывность пряжи (обр/10^4м).

Таблица 4

Разводка щели контрольного прибора, см	Натяжение нити, сН			
	15 (A_0)		20 (A_1)	
	Скорость нити, м/мин		Скорость нити, м/мин	
	600 (B_0)	800 (B_1)	600 (B_0)	800 (B_1)
0,02	(1) 0,35 0,30 0,31	(b) 0,2 0,25 0,03	(a) 0,3 0,28 0,42	(ab) 0,38 0,42 0,44
0,05	(c) 0,4 0,42 0,3	(bc) 0,36 0,4 0,42	(ac) 0,5 0,52 0,48	(abc) 0,4 0,38 0,28

Вариант 2. Определить влияние влажности, скорости перематывания и натяжения на обрывность пряжи при перематывании.

Таблица 5.

Скорость перематы-вания, м/с	Влажность,%			
	55 (A_0)		72 (A_1)	
	Натяжение при перематывании, сН		Натяжение при перематывании, сН	
	13,8 (B_0)	18,5 (B_1)	13,8 (B_0)	18,5 (B_1)
10	(1) 8 10 12	(b) 12 20 25	(a) 8 6 4	(ab) 9 7 10
13,3	(c) 12 1 15	(bc) 14 15 20	(ac) 10 12 8	(abc) 14 8 17

Вариант 3 Определить влияние плотности ткани, приклея и натяжения нитей основы (НО) на станке на обрывность нитей в ткачестве.

Таблица 5.

натяжение основы, сН	плотность ткани, нитей/см			
	$200(A_0)$		$250(A_1)$	
	Величина приклея НО,%		величина приклея НО,%	
	$6(B_0)$	$10(B_1)$	$6(B_0)$	$10(B_1)$
$(C_0)300$	(1) 3 5 2	***b*** 6 8 5	***a*** 7 6 5	***ab*** 9 7 8
$(C_1)400$	***c*** 4 4 5	***bc*** 5 7 5	***ac*** 7 8 6	***abc*** 10 9 7

Вариант 4

Таблица 5.

Сила прижима, Н	натяжение при перематывании, сН			
	16 (A_0)		20 (A_1)	
	скорость перематывания, м/с		скорость перематывания, м/с	
	6,7 (B_0)	11,7 (B_1)	6,7 (B_0)	11,7 (B_1)
(C_0) 40	(1) 0,42 0,48 0,35	***b*** 0,4 0,55 0,48	***a*** 0,53 0,45 0, 4	***ab*** 0,6 0,6 0,55
(C_1) 90	***c*** 0,8 0,75 0,55	***bc*** 0,67 0,58 0,6	***ac*** 0,45 0,50 0,54	***abc*** 0,67 0,7 0,75

Вариант 5. Оценить влияние плотности ткани, толщины нитей основы, числа нитей в основе на прочность ткани.

Таблица 5.

число нитей в основе, нией	Плотность ткани, нитей/см			
	250 (A_0)		350 (A_1)	
	толщина нитей, текс		толщина нитей, текс	
	16,6 (B_0)	20 (B_1)	16,6 (B_0)	20 (B_1)
(C_0) 2500	(1) 200 230 270 260	***b*** 380 280 250	***a*** 400 310 280	***ab*** 280 260 240
(C_1) 3000	***c*** 270 300 240	***bc*** 250 280 268	***ac*** 300 310 300	***abc*** 350 380 290

Вариант 6. Оценить влияние разводки щели контрольно-очистного прибора, натяжения скорости перематывания на обрывность пряжи (обр/10^4м).

Таблица 4

Разводка щели контрольного прибора, см	Натяжение нити, сН			
	15 (A_0)		20 (A_1)	
	Скорость нити, м/мин		Скорость нити, м/мин	
	600 (B_0)	800 (B_1)	600 (B_0)	800 (B_1)
0,02	(1) 0,38 0,33 0,34	(b) 0,23 0,28 0,06	(a) 0,33 0,32 0,45	(ab) 0,42 0,45 0,49
0,05	(c) 0,43 0,45 0,33	(bc) 0,39 0,43 0,45	(ac) 0,53 0,55 0,51	(abc) 0,43 0,41 0,31

Вариант 7. Оценить влияние плотности ткани, толщины нитей основы, числа нитей в основе на прочность ткани.

Таблица 5.

число нитей в основе, нией	Плотность ткани, нитей/см			
	250 (A_0)		350 (A_1)	
	толщина нитей, текс		толщина нитей, текс	
	16,6 (B_0)	20 (B_1)	16,6 (B_0)	20 (B_1)
(C_0) 2500	(1) 400 430 470 460	***b*** 480 480 450	***a*** 600 510 480	***ab*** 480 460 440
(C_1) 3000	***c*** 470 400 440	***bc*** 450 480 468	***ac*** 500 510 500	***abc*** 550 580 490

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

СРАВНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАРИАЦИИ ДВУХ ВЫБОРОК

Цель работы: на основе результатов измерения одной характеристики в двух независимых выборках вычислить для каждой значение коэффициента вариации и проверить значимость их отличия.

В данной работе рассматриваем случай малой выборки ($\boldsymbol{m} < \boldsymbol{14}$). Метод применим для коэффициентов вариации меньше 33 %. В этом случае значимость различия коэффициентов вариации двух выборок проверяется с помощью критерия Фишера, расчетное значение которого равно

$$F_r = \frac{\dfrac{C_{v1}^2}{\left(C_{v1}/_{100}\right)^2+1}\cdot\dfrac{m_1}{m_1+m_2}}{\dfrac{C_{v2}^2}{\left(C_{v2}/_{100}\right)^2+1}\cdot\dfrac{m_2}{m_1+m_2}} \quad . \tag{18}$$

Расчетное значение критерия, как и при сравнении двух дисперсий, должно быть больше 1. В противном случае числить и знаменатель следует поменять местами.

Табличное значение этого критерия определяется для доверительной вероятности $\boldsymbol{p_д = 0{,}95}$ и числа степеней свободы $\boldsymbol{f_1 = m_1 - 1}$ ***и*** $\boldsymbol{f_2 = m_2 - 1}$. Если $\boldsymbol{F_r < F_t}$, то гипотеза о равенстве коэффициентов вариации не отвергается, т.е. можно считать однородность случайных величин двух выборок одинаковой.

Представленное выражение для расчета критерия можно несколько упростить, тогда оно будет выглядеть следующим образом:

$$F_r = \frac{C_{v1}^2 m_1}{C_{v2}^2 m_2}\cdot\frac{\left(C_{v2}/_{100}\right)^2+1}{\left(C_{v1}/_{100}\right)^2+1} \quad . \tag{19}$$

Алгоритм выполнения работы изложим на основе конкретного примера. Исходные данные двух независимых выборок представлены в таблице.

Таблица 7.

$\boldsymbol{Y_{1i}}$	13,35	16,29	13,28	13,45	15,44	13,56	12,67	13,24	9,27	10,12
$\boldsymbol{Y_{2i}}$	6,46	9,70	14,41	5,69	15,03	11,82	8,21	13,51	17,89	10,83

Последовательность шагов для выполнения работы показана ниже.

1. Вычисляем средние значения, дисперсии, среднеквадратичные отклонения и коэффициенты вариации для каждой выборки.

Таблица 8.

№ выборки	Y_i	S_i^2	S_i	C_{vi}
1	13,07	4,42	2,10	16,1
2	12,39	7,70	2,78	22,4

2. Вычисляем расчетное значение критерия: $F_r = 1,98$.
3. Сравниваем расчетное значение критерия с табличным и делаем вывод.

$$F_r = 1,98 < F_t\ (p_D = 0,95,\ f_1 = 9,\ f_2 = 9) = 3,18\ .$$

Следовательно, гипотеза о равенстве коэффициентов вариации для двух выборок не отвергается.

Вариант 1

Таблица 5

Y_{11}	15,3	14,8	13,4	15,5	16,0	14,8	13,2	13,8	15,8
Y_{12}	17,2	16,1	15,3	15,8	14,9	16,1			

Вариант 2

$\boldsymbol{Y_{1i}}$	5,26	6,5	4,28	3,4	5,5	6,0	4,28	4,82	3,90	5,1	5,8	4,9
$\boldsymbol{Y_{2i}}$	7,21	6,1	5,3	4,78	4,5	4,9	5,9	6,1				

Вариант 3

$\boldsymbol{Y_{1i}}$	15,3	18,2	15,2	15,4	17,4	15,5	14,6	15,2	11,2	12,1
$\boldsymbol{Y_{2i}}$	8,4	11,7	16,4	7,6	17,0	13,8	10,2	15,5	19,8	12,8

Вариант 4

$\boldsymbol{Y_{1i}}$	18,35	21,29	18,28	18,45	19,44	18,56	17,67	18,24	14,27	14,12
$\boldsymbol{Y_{2i}}$	11,46	14,70	19,41	10,69	20,03	16,82	13,21	18,51	22,89	15,83

Вариант 5

$\boldsymbol{Y_{1i}}$	3,5	5,1	4,7	5,4	3,8	3,9	4,0	5,1	5,5	4,7
$\boldsymbol{Y_{2i}}$	4,2	7,9	4,205,8	2,9	8,6	5,	5,4	4,9	5,0	4,8

Вариант 6

$\boldsymbol{Y_{1i}}$	25,26	26,5	6,28	5,4	7,5	8,0	6,28	6,82	5,90	7,1	7,8	6,9
$\boldsymbol{Y_{2i}}$	9,21	8,1	7,3	6,78	6,5	6,9	7,9	8,1				

Вариант 7

$\boldsymbol{Y_{1i}}$	55,3	58,2	55,2	55,4	57,4	55,5	54,6	55,2	51,2	52,1
$\boldsymbol{Y_{2i}}$	48,4	51,7	56,4	47,6	57,0	53,8	50,2	55,5	59,8	52,8

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТИЧНОЙ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Цель работы: найти оптимальные значения коэффициентов квадратичной зависимости, соответствующей полученным экспериментальным данным.

Основные сведения

Если полученная в эксперименте зависимость $\boldsymbol{Y_i(x_i)}$ близка к параболической зависимости $\boldsymbol{Y = a_0 + a_1\, x + a_{11}\, x^2}$, то ее коэффициенты определяют на основе метода наименьших квадратов.

Принцип поиска коэффициентов аналогичен представленному выше для линейной зависимости.

$$F = \sum\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_{11} x_i^2\right)^2 = \min \; . \tag{20}$$

Коэффициенты эмпирической зависимости вычисляют, решая систему уравнений относительно коэффициентов.

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_{11}} = 0 \; .$$

Решение системы уравнений дает следующие значения коэффициентов.

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 y_i \sum x_i^2}{n \sum x_i^4 - \left(\sum x_i^2\right)^2} \; , \tag{21}$$

$$a_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \; , \tag{22}$$

$$a_{11} = \frac{n \sum x_i^2 y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{n \sum x_i^4 - \left(\sum x_i^2\right)^2} \; . \tag{23}$$

Представленные значения коэффициентов записаны для **кодированных** переменных. Если исходные значения переменных обозначить $\boldsymbol{X}$, то кодированные переменные $\boldsymbol{x}$ вычисляют следующим образом:

1. Определяем натуральное значение основного уровня фактора
$$X_0 = X_{ср} = (X_{min} + X_{max})/2$$
2. Вычисляем интервал варьирования фактора

$$I_x = (X_{max} – X_{min})/(n – 1)$$

3. Кодированное значение переменной записывают в виде

$$x_i = (X_i – X_0)/I_x$$

После вычисления коэффициентов легко возвратиться к исходным (натуральным) значениям фактора, заменив в уравнении кодированные значения переменных согласно приведенному выше соотношению.

Пример расчета

Рассмотрим алгоритм вычисления коэффициентов квадратичной зависимости, исходные данные для которой приведены в таблице 9.

Таблица 9.

X_i	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	47,6	51,9	52,3	54,6	52,5	51,3	46,8	44,6

Последовательность вычислений состоит в следующем.

1. Вычисляем кодированные значения переменной и необходимый суммы для вычисления коэффициентов квадратичной зависимости.
   $X_0 = 8{,}5$; $I_x = 1$.

Таблица 10.

X_i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
5	-3,5	47,6	12,25	150,06	-166,6	583,1
6	-2,5	51,9	6,25	39,063	-129,8	324,38
7	-1,5	52,3	2,25	5,0625	-78,45	117,68
8	-0,5	54,6	0,25	0,0625	-27,3	13,65
9	0,5	52,5	0,25	0,0625	26,25	13,125
10	1,5	51,3	2,25	5,0625	76,95	115,43
11	2,5	46,8	6,25	39,063	117	292,5
12	3,5	44,6	12,25	150,06	156,1	546,35
Σ	**0**	**401,6**	**42**	**388,5**	**-25,8**	**2006**

2. Определяем коэффициенты квадратичной зависимости, согласно приведенным выше соотношениям.

$a_0 = 53{,}39$, $a_1 = -\,0{,}614$, $a_{11} = -\,0{,}608$.

$y = 53{,}39 – 0{,}614\,x – 0{,}608\,x^2$.

3. Проверяем адекватность полученной зависимости путем сравнения расчетных и экспериментальных значений. Данные сводим в таблицу и строим соответствующий график.

Таблица 11.

X_i	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
y_i	47,6	51,9	52,3	54,6	52,5	51,3	46,8	44,6
y_{pi}	48,09	51,13	52,95	53,55	52,93	51,10	48,06	43,79

4. На основе полученной зависимости определяем положение экстремума и его значение:
   $x_{max} = 0{,}505,\ y_{max} = 52{,}93$.
5. Вычисляем натуральное значение переменной.
   $X_{max} = 0{,}505 \cdot 1 + 8{,}5 = 9{,}05$.

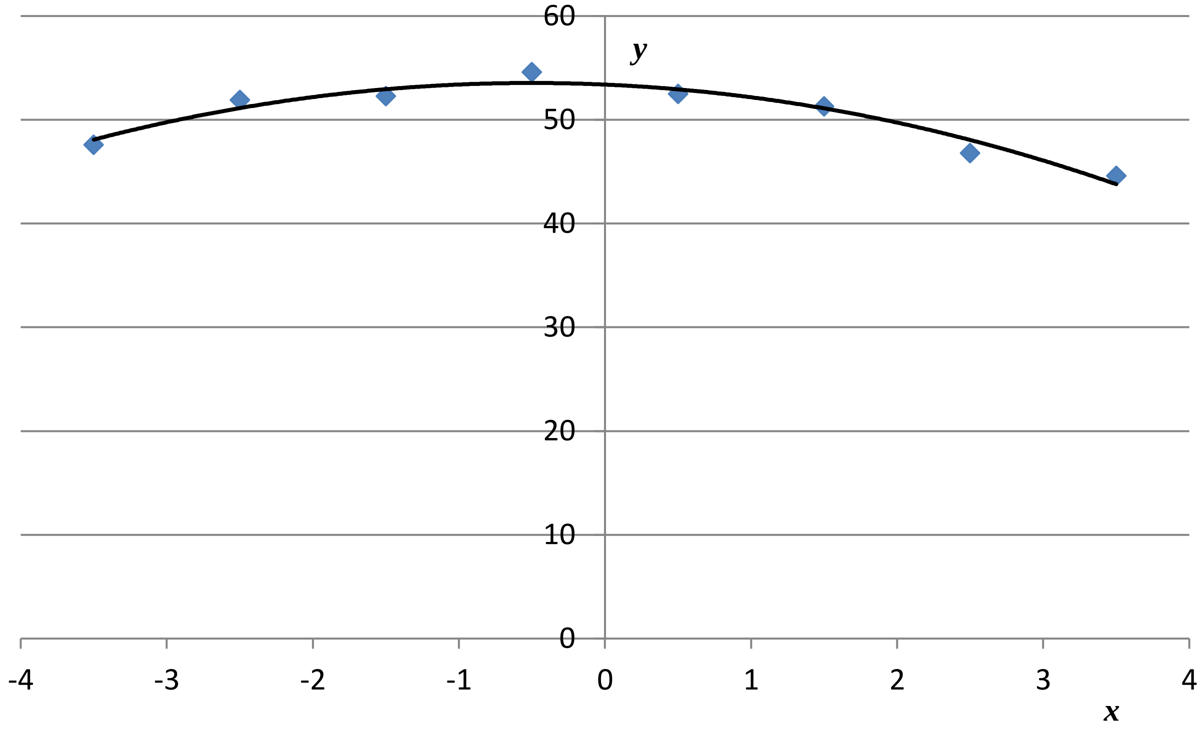

Рис. 2. Экспериментальные результаты и расчетная квадратичная зависимость.

Вариант 1

Таблица 9

X_i	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	67	72	72	75	72	71	67	65

Вариант 2

Таблица 9

X_i	0,7	3,8	6,2	7,5	8,8	10,3	12,5	13,5
y_i	10,1	19,8	30,0	40,3	58,8	88,9	110,5	170,2

Вариант 3

Таблица 9

X_i	2,7	7,5	12,5	18,5	22,5	27,5	35,0	40,3	45,5	50,2
y_i	2,0	4,5	4,0	9,0	7,5	13,5	10,5	18,8	21,0	33,0

Вариант 4

аблица 9

X_i	4,7	7,8	10,2	11,5	12,8	14,3	16,5	17,5
y_i	10,1	19,8	30,0	40,3	58,8	88,9	110,5	170,2

Вариант 5

Таблица 9

X_i	7,7	13,5	17,5	23,5	25,5	31,5	40,0	45,3
y_i	7,0	95	9,0	14,0	12,5	18,5	155	23,8

Вариант 6

Таблица 9

X_i	4,7	9,5	14,5	20,5	24,5	29,5	37,0	42,3	47,5	52,2
y_i	2,0	4,5	4,0	9,0	7,5	13,5	10,5	18,8	21,0	33,0

Вариант 7

Таблица 9

X_i	2,2	7,0	12,0	18,0	22,0	27,0	34,4	38,2	45,0	48,7
y_i	1,5	4,0	3,5	8,5	7,0	13,0	10,0	18,3	20,0	32,5

отредактированный вариант

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

ОПРЕДЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТИЧНОЙ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Цель работы: найти оптимальные значения коэффициентов квадратичной зависимости, соответствующей полученным экспериментальным данным.

Основные теоретические сведения

Если полученная в эксперименте зависимость ***Y_i= f(x_i)*** близка к параболической зависимости у = a_0 + a_1*x + a_{11}*x^2, то ее коэффициенты определяют на основе метода наименьших квадратов.

Принцип поиска коэффициентов аналогичен представленному выше для линейной зависимости.

$$F=\sum\left(y_i-a_0-\ a_1x_i-a_{11}x_i^2\right)^2=\min\ . \tag{20}$$

Коэффициенты эмпирической зависимости вычисляют, решая систему уравнений относительно коэффициентов.

$$\frac{\partial F}{\partial a_0}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a_{11}}=0\ .$$

Решение системы уравнений дает следующие значения коэффициентов.

$$a_0=\frac{\sum y_i\sum x_i^4-\sum x_i^2y_i\sum x_i^2}{n\sum x_i^4-\left(\sum x_i^2\right)^2}\ , \tag{21}$$

$$a_1=\frac{\sum x_iy_i}{\sum x_i^2}\ , \tag{22}$$

$$a_{11}=\frac{n\sum x_i^2y_i-\sum y_i\sum x_i^2}{n\sum x_i^4-\left(\sum x_i^2\right)^2}. \tag{23}$$

Представленные значения коэффициентов записаны для кодированных переменных. Если исходные значения переменных обозначить **X**, то кодированные переменные ***x*** вычисляют следующим образом:

Определяем натуральное значение основного уровня фактора

$$X_0 = X_{ср} = (X_{min} + X_{max})/2$$

Вычисляем интервал варьирования фактора

$$I_x = (X_{max} - X_{min})/(n - 1)$$

Кодированное значение переменной записывают в виде

$$\boldsymbol{x_i} = (X_i - X_0)/I_x$$

Здесь X_{min}, X_{max}, X_0, $X_{ср}$ – натуральные значения входного параметра. Соответственно минимальное, максимальное, основной уровень или среднее значение фактора.

$\boldsymbol{x_i}$ – кодированное значение фактора.

n – число опытов.

I_x – интервал варьирования фактора.

После вычисления коэффициентов легко возвратиться к исходным (натуральным) значениям фактора, заменив в уравнении кодированные значения переменных согласно приведенному выше соотношению.

Пример расчета. Рассмотрим алгоритм вычисления коэффициентов квадратичной зависимости, исходные данные для которой приведены в табл. 9. В табл. 9 приведены средние значения функции $\boldsymbol{y_i}$, рассчитанные из 5 повторностей, m=5.

Таблица 9. Исходные данные

$\mathbf{X_i}$	5	6	7	8	9	10	11	12
$\boldsymbol{y_i}$	47,6	51,9	52,3	54,6	52,5	51,3	46,8	44,6
$\boldsymbol{y_i - \bar{y}}$	2,6	1,7	2,1	4,4	2,0	1,1	-3,4	-5,6
$\boldsymbol{(y_i - \bar{y})^2}$	6,76	2,89	4,41	19,36	4,0	1,24	11,56	31,96

1. Проводим статистическую обработку результатов эксперимента и определяем дисперсию воспроизводимости

$$\sum_{i=1}^{8} y_i = 401{,}6;\ \bar{y} = 50{,}2;\ \sum_{i=1}^{8} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\bar{y}})^2 = 81{,}55.$$

Дисперсия воспроизводимости

$$S_в^2\{\bar{y}_{экс}\} = \frac{\sum_{i=1}^{8} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\bar{y}})^2}{n - 1} = \frac{81{,}55}{8 - 1} = 11{,}65.$$

Последовательность вычислений состоит в следующем.

2. Вычисляем кодированные значения переменной и необходимые суммы для вычисления коэффициентов квадратичной зависимости.

$$X_0 = \frac{X_{min}+X_{max}}{2} = \frac{5+12}{2} = 8{,}5;$$

$$I_x = \frac{X_{min}+X_{max}}{n-1} = \frac{12-5}{8-1} = 1.$$

$$x_i = \frac{X_i - X_0}{I_i}. \quad x_1 = \frac{5-8{,}5}{1} = -3{,}5.$$

По аналогии вычисляем кодированные значения $x_2 \dots x_8$ и после чего заполняем табл.10.

Таблица 10. Дополнительные расчетные данные для определения коэффициентов уравнения

X$_i$	***x$_i$***	***y$_i$***	***x$_i$*^{2}**	***x$_i$*^{4}**	***x$_i$ y$_i$***	***x$_i$*^{2} *y$_i$***
5	-3,5	47,6	12,25	150,06	-166,6	583,1
6	-2,5	51,9	6,25	39,063	-129,8	324,38
7	-1,5	52,3	2,25	5,0625	-78,45	117,68
8	-0,5	54,6	0,25	0,0625	-27,3	13,65
9	0,5	52,5	0,25	0,0625	26,25	13,125
10	1,5	51,3	2,25	5,0625	76,95	115,43
11	2,5	46,8	6,25	39,063	117	292,5
12	3,5	44,6	12,25	150,06	156,1	546,35
Σ	**0**	**401,6**	**42**	**388,5**	**-25,8**	**2006**

3. Определяем коэффициенты квадратичной зависимости, согласно приведенным выше соотношениям (21 – 23).

$$a_0 = \frac{401{,}6*388{,}5+2006*42}{8*388{,}5-42^2} = 53{,}39,$$

$$a_1 = \frac{-25{,}8}{42} = -\ 0{,}614,$$

$$a_{11} = \frac{8*42^2*2006-401{,}6*42}{8*388{,}5-42^2} = -\ 0{,}608.$$

После расчета коэффициентов искомое уравнение примет вид

$$y = 53{,}39 – 0{,}614\, \boldsymbol{x} – 0{,}608\, \boldsymbol{x}^2. \qquad (24)$$

4. Проверяем адекватность полученного уравнения с помощью критерия Фишера.

Для этого необходимо определить расчетное и табличное значение критерия Фишера. Расчетное значение критерия Фишера определяется по формуле

$$\mathrm{F_R} = \frac{\mathrm{S^2_{н/а}}\{\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{рас}}\}}{\mathrm{S^2_в}\{\bar{y}_{\mathrm{экс}}\}},$$

где $\mathrm{S^2_{н/а}}\{\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{рас}}\}$ – дисперсия неадекватности, определяющая разброс данных между расчетными и экспериментальными значениями функции $\boldsymbol{y}_{pi}$.

$\mathrm{S^2_в}\{\bar{y}_{\mathrm{экс}}\}$ – дисперсия воспроизводимости, определяющая разброс данных между средним и $\boldsymbol{i}$-ым экспериментальными значениями функции $\boldsymbol{y}_i$ внутри опыта.

Для определения дисперсии неадекватности произведем расчет $\boldsymbol{y}_{pi}$, подставляя соответствующие значения $\boldsymbol{x}_i$ в уравнение (24), а затем определим квадрат разницы между расчетными и экспериментальными значениями функции $\boldsymbol{y}_i$.

Данные, необходимые для последующего расчета, сводим в табл. 11.

Таблица 11. Статистическая обработка результатов расчета

$\mathbf{X_i}$	5	6	7	8	9	10	11	12
$\boldsymbol{x}_i$	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
$\boldsymbol{y}_i$	47,6	51,9	52,3	54,6	52,5	51,3	46,8	44,6
$\boldsymbol{y}_{pi}$	48,09	51,13	52,95	53,55	52,93	51,10	48,06	43,79
$(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_{\mathrm{p}i})^2$	0.24	0.59	0.42	1.05	0.18	0.04	1.59	0.66

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{8}(\mathrm{y_i} - \mathrm{y_{pi}})^2 = 4{,}77.$$

Дисперсия неадекватности равна

$$\mathrm{S^2_{н/а}}\{\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{рас}}\} = \frac{m}{n-2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{8}(\mathrm{y_i} - \mathrm{y_{pi}})^2 = \frac{5}{8-2}4{,}77 = 3{,}97.$$

Расчетное значение критерия Фишера равно

$$F_R = \frac{11.65}{3.97} = 2.93.$$

Табличное значение критерия Фишера равно

$$F_т\left[P_д\, f_в = n(m-1) = 8(5-1) = 32\;\; f_{н/а} = n-2 = 8-2 = 6\right] = 3{,}8.$$

Так как $F_R < F_т$, то гипотеза об адекватности уравнения не отвергается.

5. По данным табл. 11 строим график зависимости $y = f(x_i)$, (рис. 2). На основе полученной зависимости определяем положение экстремума и его значение. Для этого необходимо продифференцировать уравнение (24).

$$\frac{dy}{dx} = -0.614 - 2 * 0.608 * x_{max} = 0.$$

Откуда $x_{max} = \frac{0{,}614}{2*0{,}608} = 0{,}505.$

Подставив значение x_{max} в уравнение (24), определим значение y_{max}.

$$y_{max} = 53{,}39 – 0{,}614*0{,}505 – 0{,}608*0505^2 = 52{,}93.$$

6. Вычисляем натуральное значение переменной по формуле

$$\boldsymbol{x_i} = (X_{max} – X_0)/I_x$$

$X_{max} = \boldsymbol{x_i} *I + X_0 = 0{,}505·1 + 8{,}5 = 9{,}05.$

По графику или по уравнению (24) определяем соответствующее X_{max} значение y_{max}.

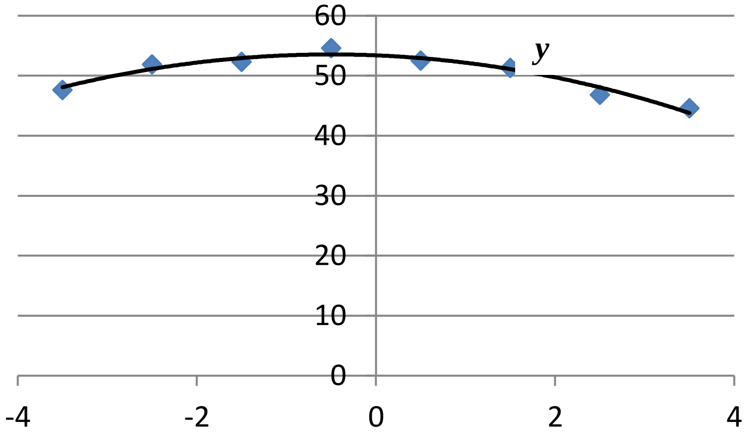

Рис. 2. Экспериментальные результаты и расчетная квадратичная зависимость.

x

Выводы.

Вариант 1

Таблица 9

X_i	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	67	72	72	75	72	71	67	65

Вариант 2

Таблица 9

X_i	0,7	3,8	6,2	7,5	8,8	10,3	12,5	13,5
y_i	10,1	19,8	30,0	40,3	58,8	88,9	110,5	170,2

Вариант 3

Таблица 9

X_i	2,7	7,5	12,5	18,5	22,5	27,5	35,0	40,3	45,5	50,2
y_i	2,0	4,5	4,0	9,0	7,5	13,5	10,5	18,8	21,0	33,0

Вариант 4

Таблица 9

X_i	12,7	17,5	22,5	28,5	32,5	37,5	45,0	50,3
y_i	12,0	14,5	14,0	19,0	17,5	23,5	20,5	28,8

Вариант 5

Таблица 9

X_i	15	16	17	18	19	20	21	22
y_i	57	62	62	65	62	61	57	55

Вариант 6

Таблица 9

X_i	1,7	4,8	7,2	8,5	9,8	11,3	13,5	14,5
y_i	10,1	19,8	30,0	40,3	58,8	88,9	110,5	170,2

Вариант 7

Таблица 9

X_i	101,7	104,8	107,2	108,5	109,8	111,3	113,5	114,5
y_i	110,1	119,8	130,0	140,3	158,8	188,9	210,5	270,2

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Цель работы: найти оптимальный вид нелинейной зависимости, соответствующей полученным экспериментальным данным.

Основные сведения

При изучении технологических процессов экспериментально полученные зависимости часто имеют нелинейный характер. Таким образом, задача заключается в нахождении функции наилучшим образом отвечающей экспериментальным данным. Применение метода наименьших квадратов непосредственно часто оказывается затруднительным. Обычно применяют метод функциональных шкал. Сложность заключается в том, что похожий вид могут иметь совершенно разные функциональные зависимости и заранее сказать какой функции соответствуют полученные экспериментальные данные, если это не следует из физического смысла процесса, оказывается невозможным. Так, например, могут иметь одинаковый характер отдельные участки графиков: $a/x + b$, $a/x^2 + b$ и ae^{-bx}, или $ax^2 + bx + c$ и $ae^{bx} + c$, или $a\sqrt{x} + b$ и $a\ln(x) + b$ и т.п.

Ошибка в выборе функции повлечет за собой последующие ошибки, и возможно значительные, при попытке экстраполяции зависимости на более широкий интервал.

Использование функциональных шкал позволяет с большей надежностью выбирать правильный вид функции, т.к. при правильном выборе нелинейная зависимость преобразуется в линейную, что обычно видно уже из графика. Таким образом, преимущество метода в том, что проверить линейность полученной прямой, определить ее параметры и сравнить между собой различные функциональные зависимости можно уже любым известным методом. В конечном счете выбирают функцию, для которой сумма квадратов отклонений экспериментальных результатов от расчетных будет минимальна.

Например, зависимость имеет, вид: $y = a\,f(x) + b$, где $f(x)$ - выбранная функция, a и b – коэффициенты, подлежащие определению по данным опыта.

Вид функции выбирают исходя либо из теоретических соображений, либо из расположения экспериментальных точек на графике. Существенную помощь в этом может оказать методика, описанная в учебнике А. Г. Севостьянова «Методы и средства исследования механико-технологических процессов текстильной промышленности» (С. 112 – 116).

В этом случае преобразование имеет простой вид. Положив $f(x) = X$ можно привести уравнение (1) к виду: $y = a\,X + b$

Если зависимость предполагается искать, например, в виде $y = a\,\exp(kx)$ или $y = a\,x^k$, то имеет смысл прологарифмировать обе части уравнения: $\ln(y) = \ln(a) + kx$ и $\ln(y) = \ln(a) + k\,\ln(x)$. Тогда, заменяя переменные $Y = ln(y)$ в первом случае и дополнительно к этому $X = ln(x)$ – во втором случае, получим:

$$Y = ln(a) + kx \quad \text{и} \quad Y = ln(a) + kX$$

Рассмотрим алгоритм, предлагаемый в упомянутом учебнике.

Таблица 12.

№ п/п	Вид исходной модели	Преобразование переменных	Уравнение прямой после преобразования	Промежуточные точки исх. переем.	
				Хпр	Упр
1	Степенная $Y = a_0X^{a_1}$	$y = \ln Y$ $x = \ln X$ $a_0' = \ln a_0$	$y = a_0' + a_1x$	$\sqrt{X_1X_n}$	$\sqrt{Y_1Y_n}$
2	Показательная $Y = a_0\, e^{a_1x}$	$y = \ln Y$ $a_0' = \ln a_0$	$y = a_0' + a_1X$	$\frac{X_1 + X_n}{2}$	$\sqrt{Y_1Y_n}$
3	Гиперболическая $Y = a_0 + a_1/X$	$x = 1/X$	$Y = a_0 + a_1x$	$\frac{2X_1X_n}{X_1 + X_n}$	$\frac{Y_1 + Y_n}{2}$
4	Гиперболическая $Y = 1/(a_0 + a_1X)$	$y = 1/Y$	$y = a_0 + a_1X$	$\frac{X_1 + X_n}{2}$	$\frac{2Y_1Y_n}{Y_1 + Y_n}$
5	Гиперболическая $Y = 1/(a_0 + a_1/X)$	$x = 1/X$ $y = 1/Y$	$y = a_0 + a_1x$	$\frac{2X_1X_n}{X_1 + X_n}$	$\frac{2Y_1Y_n}{Y_1 + Y_n}$
6	Логарифмическая $Y = a_0 + a_1 \ln X$	$x = \ln X$	$Y = a_0 + a_1x$	$\sqrt{X_1X_n}$	$\frac{Y_1 + Y_n}{2}$

(X_1, Y_1) и (X_n, Y_n) – начальные и конечные значения в выборке.

Для выбора «подходящей» зависимости необходимо представлять вид каждой из них. Они представлены в виде графиков на рис.   .

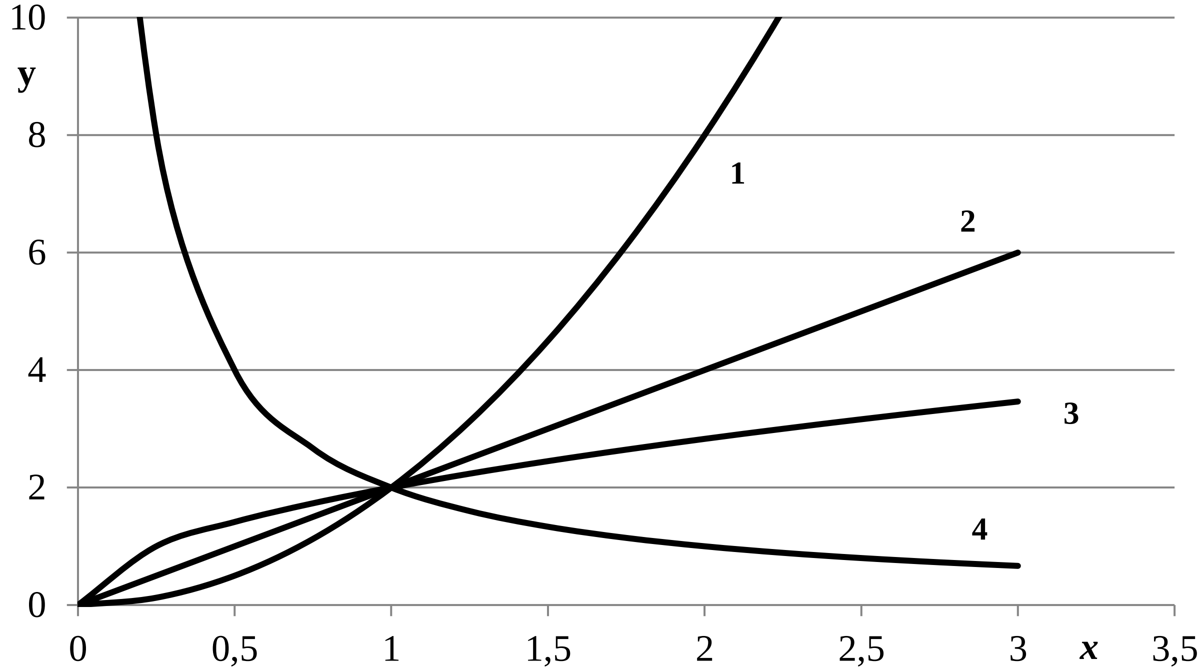

Рис. 3. Степенная зависимость для разных коэффициентов (***a₀* > 0**)
1 – a₁ > 1; 2 – a₁ = 1; 3 – 0 < a₁ < 1; 4 – a₁ < 0 .

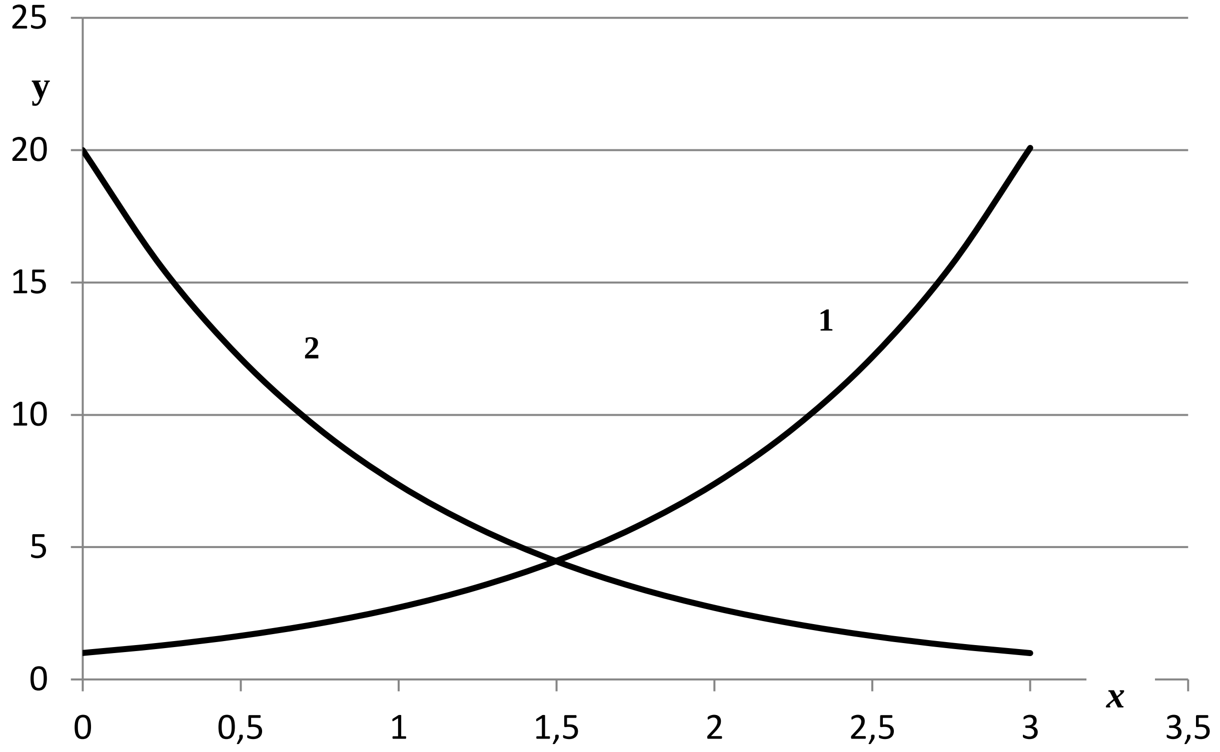

Рис. 4. Экспоненциальная зависимость ($a_0 > 0$)
$1 - a_1 > 0; 2 - a_1 < 0;$

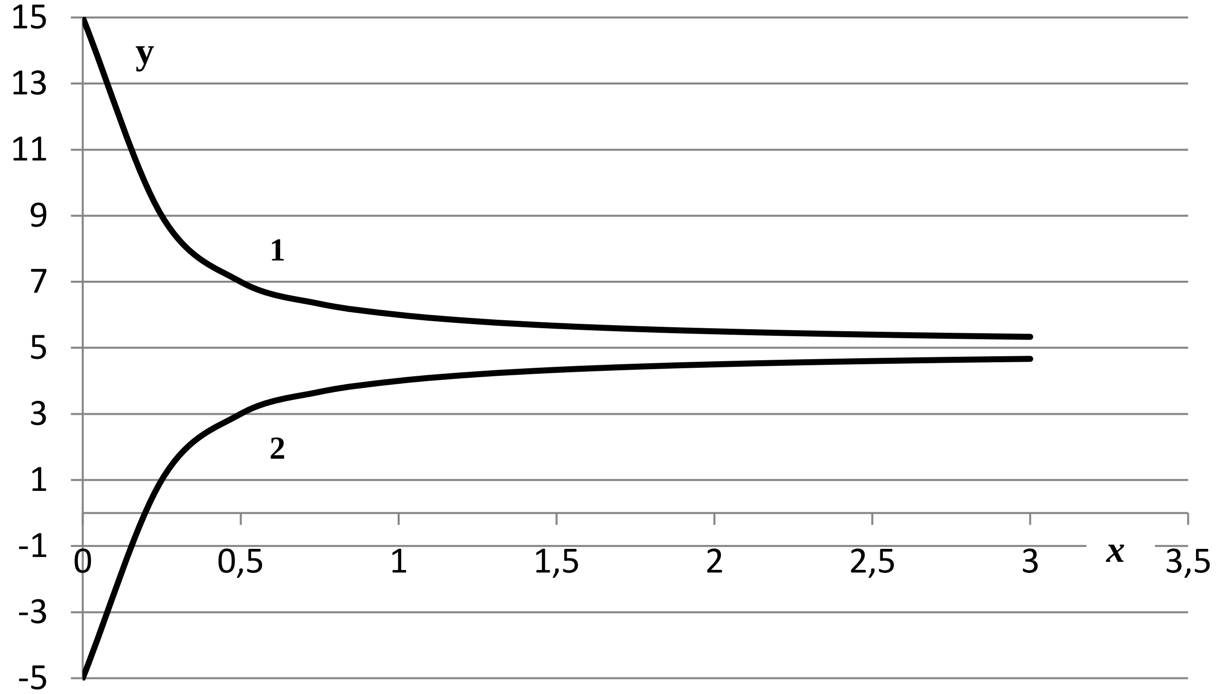

Рис. 5. Гиперболическая зависимость - 3 ($a_0 > 0$)
$1 - a_1 > 0; 2 - a_1 < 0;$

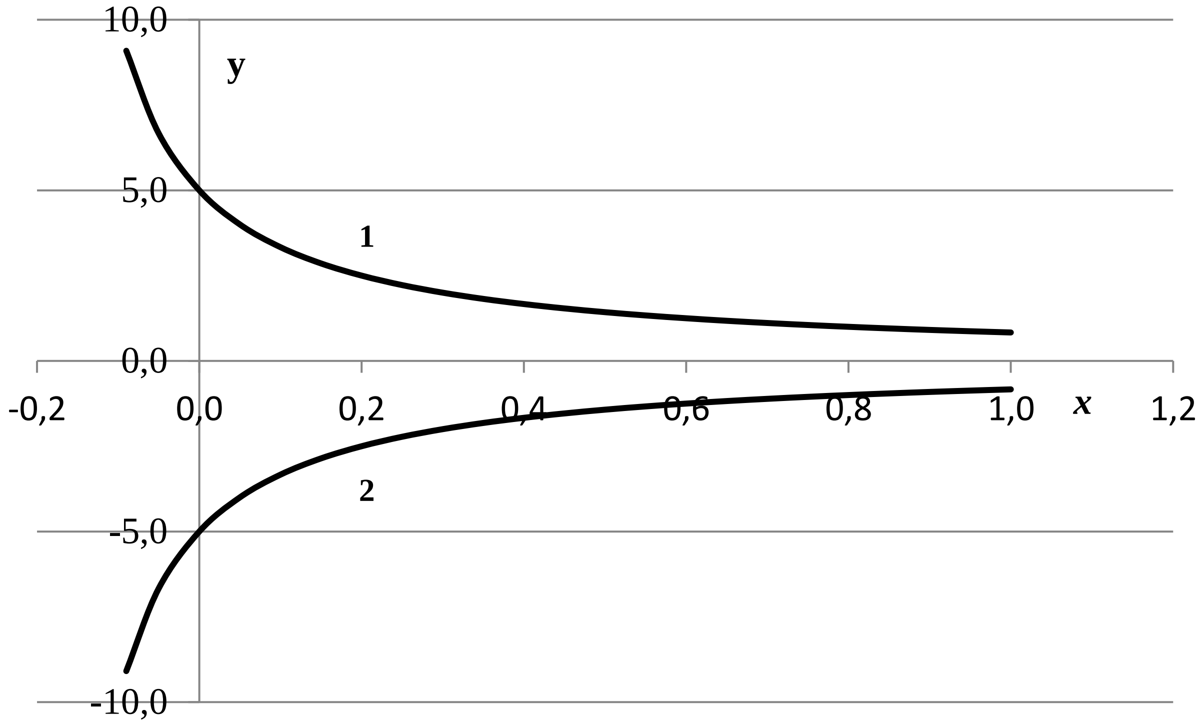

Рис. 6. Гиперболическая зависимость - 4 ($\boldsymbol{a_0 > 0}$)
$\boldsymbol{1 - a_1 > 0; 2 - a_1 < 0;}$

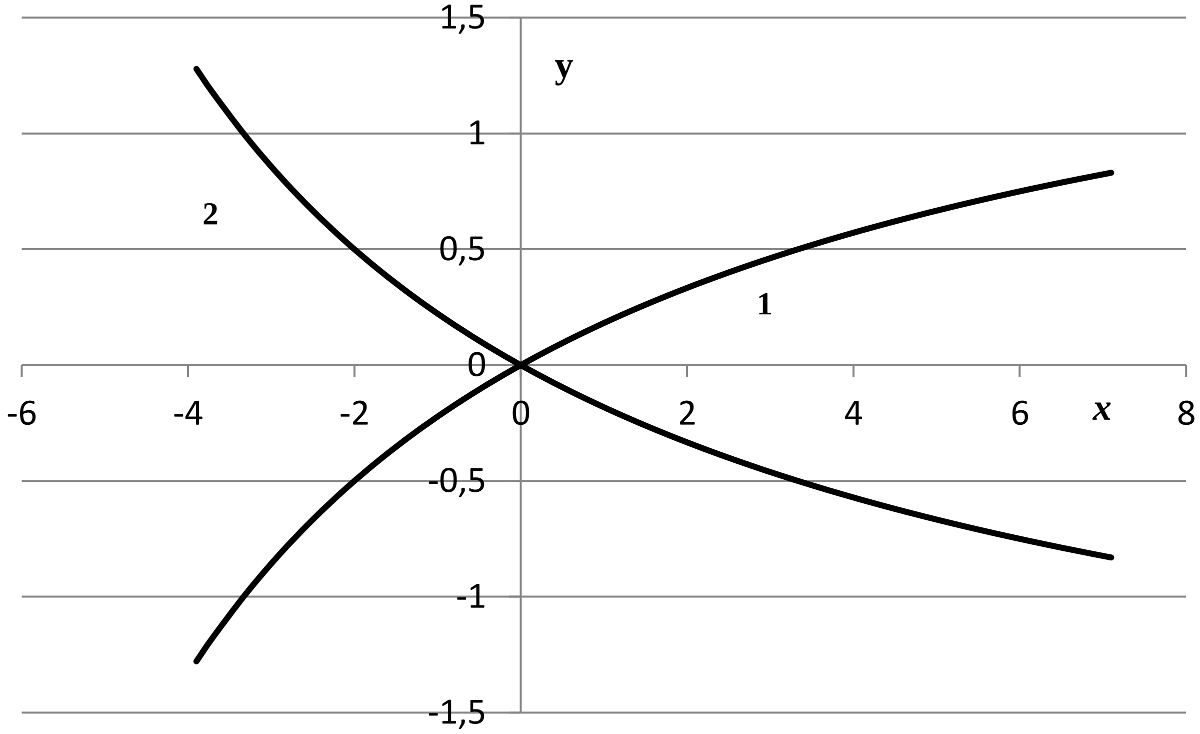

Рис. 7. Гиперболическая зависимость - 5 ($\boldsymbol{a_0 > 0}$)
$\boldsymbol{1 - a_1 > 0; 2 - a_1 < 0;}$

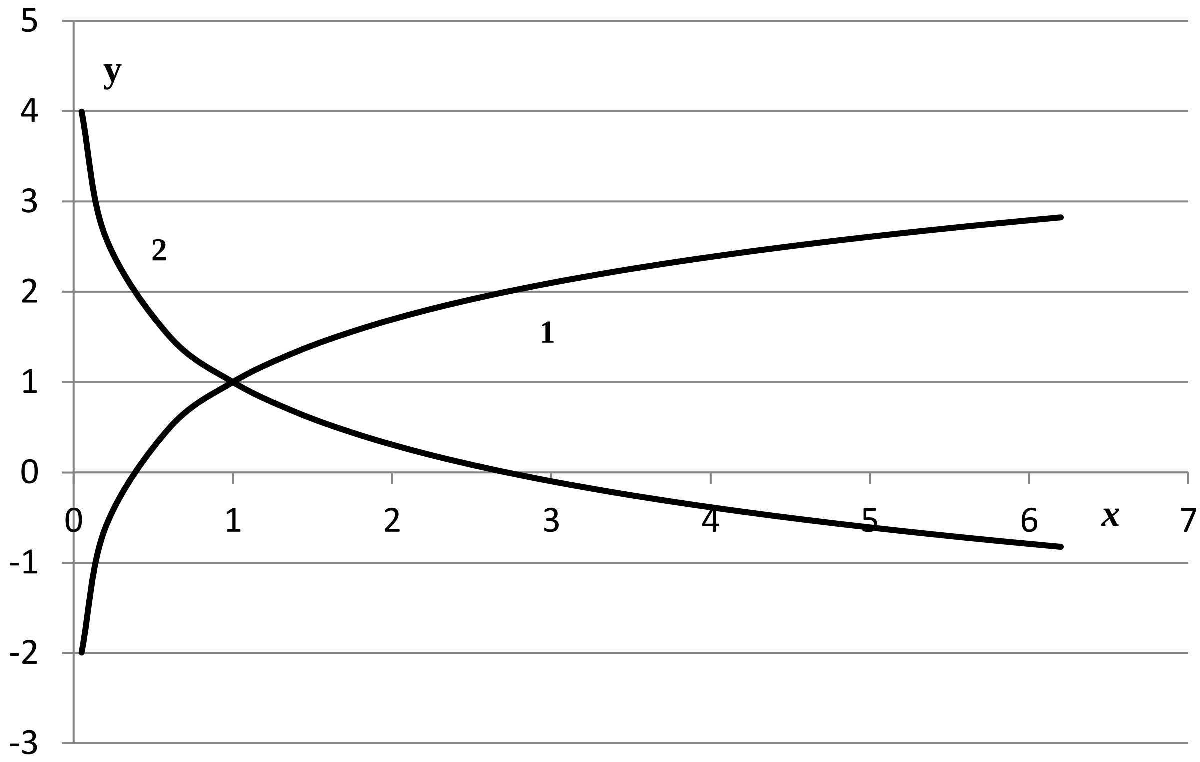

Рис. 8. Логарифмическая зависимость ($\boldsymbol{a_0 > 0}$)
$\boldsymbol{1 - a_1 > 0; 2 - a_1 < 0;}$

Пример выполнения работы

1. Используя набор экспериментальных данных ($\boldsymbol{x_i, y_i}$), приведенных в табл. 12, необходимо построить график (рис. 9) ;

Таблица 12.

x_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
y_i	5,1	6,4	7,1	9,8	10,7	14,6	15,5	22	24,8	28,7	35,2

Как видно из графика однозначно определить характер зависимости весьма затруднительно.

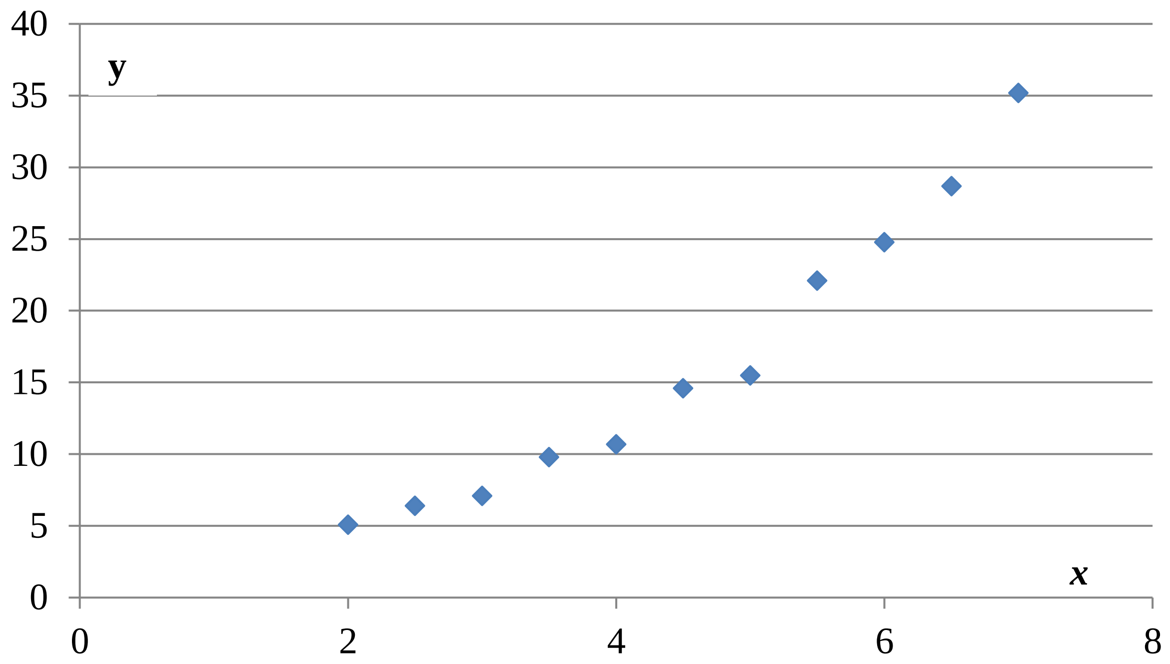

Рис. 9. Результаты эксперимента

2. Выбрать вариант модели на основе таблицы с промежуточными значениями переменных

Таблица 13.

№	*Xпр*	*Упр*	*Уэ(Хпр) или Ур(Хпр)*	*ΔY*
1	2	3	4	5
1	3,74	13,40	10,23	**3,16**
2	4,50	13,40	14,60	**1,20**
3	3,11	20,15	7,21	12,94
4	4,50	8,91	14,60	5,69
5	3,11	8,91	7,21	**1,70**
6	3,74	20,15	10,24	9,92

В четвертом столбце приведены значения функции в промежуточной точке X_{np}. Эти значения определяют следующим образом:

- Если расчетное промежуточное значение для X равно какому-либо из X_i , то выбирают $Y_э(X_{np}=X_i)$;
- Если промежуточное значение находится в интервале $X_i < X_{np} < X_{i+1}$, то значение функции вычисляют на основе линейной интерполяции
$$Yp(Xnp) = Y_i + (Y_{i+1} - Y_i)(X_{np} - X_i)/(X_{i+1} - X_i)$$
- Выбираем 3 варианта для которых $\Delta Y = |\,Ynp - Y(Xnp)| = min$ (варианты 1, 2, 5).

3. Преобразовать переменные для каждого из выбранных вариантов в соответствии с табл. 12 , таким образом, чтобы функциональные зависимости

стали линейными и в соответствии с этим заполнить вышеприведенную таблицу, т.е. ***Y***(или у) от ***X***(или ***x***).

Таблица 14.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
y_i	5,1	6,4	7,1	9,8	10,7	14,6	15,5	22	24,8	28,7	35,2
$X_{1i}=\ln x_i$	0,693	0,916	1,099	1,253	1,386	1,504	1,609	1,705	1,792	1,872	1,946
$Y_{1i}=\ln y_i$	1,629	1,856	1,960	2,282	2,370	2,681	2,741	3,091	3,211	3,357	3,561
$X_{2i}= x_i$	2,000	2,500	3,000	3,500	4,000	4,500	5,000	5,500	6,000	6,500	7,000
$Y_{2i}=\ln y_i$	1,629	1,856	1,960	2,282	2,370	2,681	2,741	3,091	3,211	3,357	3,561
$X_{3i}=1/x_i$	0,500	0,400	0,333	0,286	0,250	0,222	0,200	0,182	0,167	0,154	0,143
$Y_{3i}=1/y_i$	0,196	0,156	0,141	0,102	0,093	0,068	0,065	0,045	0,040	0,035	0,028

4. По методу наименьших квадратов необходимо определить коэффициенты трех полученных линейных эмпирических зависимости для каждого варианта. В качестве примера рассмотрим 2-ю модель (X_{2i}; Y_{2i}). Для расчетов заполняем таблицу 15, аналогичную табл. 4 из лабораторной работы 2.

Таблица 15.

i	x_i	$x_i - x_{ср}$	y_i	$(x_i - x_{ср})^2$	$(x_i - x_{ср})\, y_i$
1	2	-2,5	1,629	6,25	-4,07
2	2,5	-2	1,856	4	-3,71
3	3	-1,5	1,960	2,25	-2,94
4	3,5	-1	2,282	1	-2,28
5	4	-0,5	2,370	0,25	-1,19
6	4,5	0	2,681	0	0,00
7	5	0,5	2,741	0,25	1,37
8	5,5	1	3,091	1	3,09
9	6	1,5	3,211	2,25	4,82
10	6,5	2	3,357	4	6,71
11	7	2,5	3,561	6,25	8,90
Σ	49,5	0	28,74	27,5	10,70
$x_{ср}$	4,5	$y_{ср}$	2,612636		

Линейная зависимость будет иметь вид: ***Y = 0,861 + 0,389 X .***
Первоначальное значение коэффициента: $a_0 = e^{0,861} = 2,37$.
Исходная зависимость будет иметь вид: $y_2 = 2,37e^{0,389x}$.
Аналогичным образом находим коэффициенты для других 2-х моделей.

$$y_1 = 1{,}44x^{1{,}566}; \quad y_5 = \frac{1}{\frac{0{,}485}{x} - 0{,}037}.$$

5. Для окончательного выбора наилучшей функции находят коэффициенты для всех вариантов зависимостей и сравнивают их между собой по сумме квадратов отклонений экспериментальных и расчетных значений (см. табл. 16).

Таблица 16.

x_i	y_i	y_{i1}	y_{i2}	y_{5i}	$(y_i\text{-}y_{i2})^2$	$(y_i\text{-}y_{i2})^2$	$(y_i\text{-}y_{i5})^2$
2	5,1	4,264	5,151	4,866	0,700	0,003	0,055
2,5	6,4	6,047	6,257	6,369	0,125	0,020	0,001
3	7,1	8,045	7,600	8,021	0,893	0,250	0,849
3,5	9,8	10,242	9,232	9,845	0,195	0,322	0,002
4	10,7	12,624	11,214	11,869	3,701	0,265	1,368
4,5	14,6	15,181	13,622	14,129	0,337	0,956	0,222
5	15,5	17,904	16,547	16,667	5,779	1,096	1,361
5,5	22,1	20,786	20,100	19,538	1,727	4,002	6,563
6	24,8	23,820	24,415	22,814	0,960	0,148	3,945
6,5	28,7	27,001	29,657	26,585	2,886	0,916	4,474
7	35,2	30,324	36,025	30,973	23,776	0,680	17,864
				Σ	***41,078***	***8,658***	***36,703***

Вывод: наименьшая сумма квадратов отклонений расчетных значений от результатов эксперимента достигается для второй модели. Это свидетельствует о том, что она наиболее адекватно отражает данные экспериментальных исследований.

Отчет должен содержать: исходные данные; график функции, построенный по исходным данным; выбранные варианты эмпирических функций; графики зависимостей после замены переменных в соответствии с выбранными функциями; значения коэффициентов, рассчитанные по методу средней, и вид функций с полученными коэффициентами; таблицу сравнения эмпирических функций по сумме квадратов отклонений; выводы и вид оптимальной эмпирической зависимости.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Цель работы: оценить степень корреляции экспериментальных данных на основе расчета коэффициента корреляции; построить график, совмещающий результаты измерений и расчетную зависимость.

Основные сведения

При изучении различных технологических процессов часто оказывается необходимым выявить степень корреляции между двумя величинами X и Y. Для этого производят ряд независимых измерений, исходом которых является пара чисел (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

По этим значениям требуется оценить параметры линейной функции регрессии, а также оценить степень корреляции полученных результатов. Для этого вычисляют эмпирический коэффициент корреляции:

$$r_n = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}} \quad . \tag{24}$$

Зная коэффициент корреляции определяют эмпирические прямые регрессии y(x) или x(y):

$$y = \bar{y} + r_n \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) \quad , \tag{25}$$

$$x = \bar{x} + r_n \frac{s_x}{s_y}(y - \bar{y}) \quad . \tag{26}$$

Пример расчета

Исходные данные для расчетов приведены в табл. 17 .

Таблица 17

x_i	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
y_i	28	23	44	51	34	52	74	69	57	71

1. Для проведения необходимых расчетов заполняем соответствующую таблицу 18.

Таблица 18.

i	x_i	y_i	$(x_i-x_{cp})^2$	$(y_i-y_{cp})^2$	$(x_i-x_{cp})(y_i-y_{cp})$
1	3	28	182,25	497,29	301,05
2	6	23	110,25	745,29	286,65
3	9	44	56,25	39,69	47,25
4	12	51	20,25	0,49	-3,15
5	15	34	2,25	265,69	24,45
6	18	52	2,25	2,89	2,55
7	21	74	20,25	561,69	106,65
8	24	69	56,25	349,69	140,25
9	27	57	110,25	44,89	70,35
10	30	71	182,25	428,49	279,45
Σ	***165***	***503***	***742,5***	***2936,1***	***1255,5***
x_{cp} , y_{cp}	***16,5***	***50,3***			
S_x^2, S_y^2	***82,5***	***326,2333***			
S_x, S_y	***9,08295***	***18,06193***			

2. Вычисляем коэффициент корреляции

$$r_n = \frac{1255{,}5}{\sqrt{742{,}5} \cdot \sqrt{2936{,}1}} = 0{,}85\ .$$

3. Получаем уравнения регрессии

$$\boldsymbol{y = 22{,}4 + 1{,}69\ x}\quad ,$$
$$\boldsymbol{x = 0{,}427\ y - 5}\quad .$$

4. Построить график, совмещающий расчетную зависимость и экспериментальные данные.

Вывод: величина коэффициента корреляции свидетельствует о «хорошей» степени корреляции между измеренными параметрами, а график демонстрирует адекватность полученной регрессионной модели.

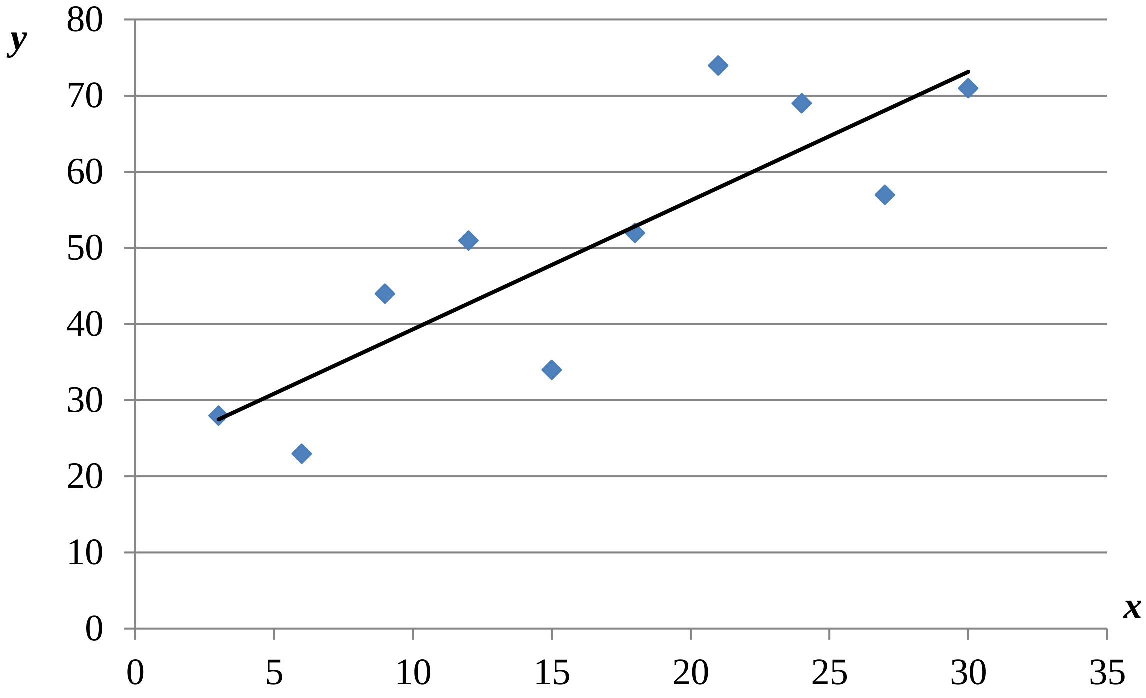

Рис. 10. Измеренные значения параметров и расчетная регрессионная зависимость.

Вариант 1

Таблица 17

x_i	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
y_i	20	22	30	31	20	18	35	36	37	40

Вариант 2

Таблица 17

x_i	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
y_i	18	25	27	30	31	33	35	38	39	44

Вариант 3

Таблица 17

x_i										
y_i										

Вариант 4

Таблица 17

x_i										
y_i										

Вариант 5

Таблица 17

x_i										
y_i										

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ИК - ИЗЛУЧАТЕЛЯ НА СКОРОСТЬ СУШКИ НЕТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Цель работы: Сравнить скорость сушки нетканых материалов с помощью ИК – излучения в разном диапазоне длин волн для материалов разного цвета, используя методы дисперсионного анализа и статистики.

Основные сведения

При падении ИК – излучения на материал его мощность распределяется следующим образом: отраженная, поглощенная и прошедшая. Нагревание материала происходит за счёт поглощённого излучения. При этом разные материалы поглощают ИК – излучение по разному в разном диапазоне длин волн. Так, например, клеевые композиции на основе водных дисперсий очень сильно поглощают ИК – излучение в области $\lambda > 3$ мкм.

Диапазон длин волн, соответствующих ИК – диапазону, начинается при $\lambda > 0{,}8$ мкм. ИК – излучатели имеют ограниченную область длин волн, в которой излучается основная доля тепловой мощности, и длину волны λ_{max}, соответствующую максимальной интенсивности излучения.

Всё это приводит к тому, что для каждого вещества существуют области сильного и слабого поглощения ИК – излучения.

Данная работа посвящена сравнению скорости сушки клеёв на основе водных дисперсий, например акриловых, при использовании ИК – излучения разных длин волн ($\lambda_1 \cong 1{,}2$ мкм, $\lambda_2 \cong 5$ мкм).

Вторым влияющим фактором будем считать цвет материала. Дело в том, что отражение и поглощение энергии видимого света и излучения в ближней ИК – области зависит от цвета материала. В дальней ИК – области это влияние обычно существенно меньше.

Таким образом, в данной работе необходимо с помощью факторного анализа по схеме ПФЭ 2^2 оценить степень влияния на скорость процесса сушки двух факторов: длины волны ИК – излучения и цвета материала.

Методика и порядок выполнения

Для эксперимента берут образцы ткани двух цветов (по 10 образцов размером 30×100 мм).

Сравнение скорости сушки осуществляется по скорости удаления влаги из предварительно смоченного образца. При этом необходимо учитывать, что для разных излучателей тепловая мощность, падающая на единицу площади материала, различна и зависит от мощности излучателя, его длины и расстояния до него. Поэтому при расчёте скорости сушки необходимо количество удалённой влаги отнести к тепловой мощности падающей на материал.

Расчёт интенсивности теплового излучения проводят по формуле:
$I = W/(Lh)$, Вт/м^2 , где W - мощность излучателя (КГ – 1000 – 220 – 6 - 1000 Вт, ТЭН – 800 Вт), L - длина излучателя (КГ – 0,315 м , ТЭН – 0,9 м), h - минимальное расстояние от середины образца до излучателя (перед экспериментом необходимо измерить для обеих излучателей).

Скорость сушки отнесённую к мощности излучателя вычисляют по формуле: $V = m/(IS)$, г/Вт , где $m = m_0 – m_1$ - количество испарившейся влаги, m_0 – начальная масса влажного образца, m_1- масса образца после сушки, S - площадь образца (м^2).

Включают ИК – излучатели (ТЭН должен предварительно прогреться в течении 15 мин). Смачивают образцы водой, таким образом, чтобы масса влаги в каждом образце была одинаковой с точностью до 0,05 г (предварительно все образцы следует взвесить).

По 5 образцов каждого цвета последовательно помещают под каждым излучателем, располагая вдоль него, и через 60 сек. взвешивают, определяя количество испарившейся влаги.

Полученные результаты (20 значений) преобразуют следующим образом. Округляют все данные до 3-х значащих цифр. Вычисляют среднее и, также округляют до 3-х значащих цифр. Заменяют первоначальные результаты – кодированными значениями по алгоритму: $z_i = a(x_i – x)$, где a – постоянный коэффициент, умножение на который приводит массив результатов к виду, удобному для вычислений. Т.е. обычно «а» принимают равным 5, 10, … чтобы числа нового массива были целыми, желательно одно - или двузначными. Полученные кодированные результаты записывают в таблицу, которая выглядит следующим образом:

Таблица 19.

Цвет материала	Длина волны ИК - излучения		$T_{i\cdot}=\sum m_{ij}$
	λ_1	λ_2	
1	m_{111} m_{112} m_{113} m_{114} m_{115} $T_{11}=\sum m_{11k}$	m_{121} m_{122} m_{123} m_{124} m_{125} $T_{12}=\sum m_{12k}$	$T_{1\cdot}$
2	m_{211} m_{212} m_{213} m_{214} m_{215} $T_{21}=\sum m_{21k}$	m_{221} m_{222} m_{223} m_{224} m_{225} $T_{22}=\sum m_{22k}$	$T_{2\cdot}$
$T_{\cdot j}=\sum m_{ij}$	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	$T_{\cdot\cdot}$

Далее, на основе данных собранных в таблице 1 для оценки влияния разных факторов, проводят следующие вычисления:

$$S(\lambda) = \frac{T_{.1}^2 + T_{.2}^2}{2n} - \frac{T_{..}^2}{4n} \quad ; \quad S(цв.) = \frac{T_{1.}^2 + T_{2.}^2}{2n} - \frac{T_{..}^2}{4n}$$

$$S = \frac{\sum_j \sum_i T_{ij}^2}{n} - \frac{T_{..}^2}{4n} \quad ; \quad S_{общ} = \sum_j \sum_i \sum_k m_{ijk}^2 - \frac{T_{..}^2}{4n}$$

Далее с их помощью определяют:

$$S_{вз.} = S - S(\lambda) - S(цв.)$$
$$S_{ош.} = S_{общ.} - S(\lambda) - S(цв.) - S_{вз.}$$

Полученные результаты сводят в таблицу.

Таблица 20.

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат
Длина волны Цвет материала Взаимодействия Ошибка внутри ячейки	$f_1=1$ $f_2=1$ $f_3=1$ $f_4=16$	$S(\lambda)$ $S(цв.)$ $S_{вз.}$ $S_{ош.}$	$S(\lambda)/f_1$ $S(цв.)/f_2$ $S_{вз.}/f_3$ $S_{ош.}/f_4$
Сумма	19		

Теперь, используя полученные данные (табл.20), можно вычислить ***F*** – критерий для оценки влияния факторов.

Проверяем гипотезу:

H_1: отсутствует влияние длины волны излучения

$$F_{1,16} = \frac{S(\lambda)/f_1}{S_{ош}/f_4}$$

H_2: отсутствует влияние цвета материала

$$F_{1,16} = \frac{S(цв.)/f_1}{S_{ош}/f_4}$$

H_3: нет влияния взаимодействия факторов

$$F_{1,16} = \frac{S_{вз}/f_3}{S_{ош}/f_4}$$

Таблица 21. Табличные значения для величины $\boldsymbol{F}$ – критерия:

$\boldsymbol{1 - \alpha}$	0,90	0,95	0,99
$\boldsymbol{F_{1,16\ T}}$	3,05	4,46	8,53

Если $\boldsymbol{F_R > F_T}$ – влияние значимо;

$\boldsymbol{F_R >> F_T}$ - влияние высоко значимо;

$\boldsymbol{F_R < F_T}$ - влияние не значимо.

На основании вычисленных значений критерия следует сделать вывод о значимости влияния данного фактора.

Отчёт должен содержать: Исходные экспериментальные данные. Таблицу 20 с закодированными данными и предварительными результатами расчётов. Краткое изложение расчётных методов. Таблицу 21 с результатами расчётов. Все значения критериев. Выводы по результатам работы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СУШКИ КЛЕЕВЫХ КОМПОЗИЦИИЙ ИК-ИЗЛУЧЕНИЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ОТРАЖАТЕЛЕЙ

Цель работы: оценить эффективность процесса сушки нетканых материалов ИК-излучением с применением различных отражателей.

Общие сведения

Способ сушки с помощью инфра-красного (ИК) излучения весьма эффективен и применим для широкого спектра нетканых материалов. Для повышения эффективности использования энергии ИК- излучения применяют отражатели. Тепловая мощность, поступающая к материалу, зависит от мощности излучателя, его расстояния до материала, формы и расположения отражателя, качества отражающей поверхности. В данной работе необходимо оценить – является ли существенной форма отражателя и, вообще, его наличие для процесса сушки материала. Скорость процесса сушки при этом оценивают по скорости удаления влаги (воды), т.е. по количеству воды, удалённой за одинаковое время. Речь идёт о воде, поскольку обычно применяемые акриловые дисперсии содержат до 50-60 % воды. При нагревании вода должна испариться в первую очередь, причём этот процесс является наиболее энергоемким в процессе термофиксации связующего.

Методика проведения эксперимента

На рис. приведена схема стенда для исследования процесса сушки нетканых материалов с помощью ИК - излучения. Последовательность проведения эксперимента следующая:

1. ИК – излучатель (ТЭН) используют без отражателя. Взвешивают образец ткани размером примерно 10х10 см. Смачивают его водой, фиксируя массу воды (3 – 5 г/дм^2), чтобы в дальнейшем все образцы содержали одинаковое количество влаги. Образец помещают на подставку и устанавливают точно под излучателем на строго определённое место. Включают напряжение и высушивают образец в течении постоянного времени t = 1 – 3 мин. (на основе предварительной оценки экспериментатора). После этого образец вновь взвешивают и определяют количество удалённой влаги. Проводят не менее 10 измерений. Определяют Δm_1, σ_1, C_1

2. Над ИК – излучателем устанавливают плоский отражатель. Процесс измерения повторяют и вычисляют Δm_2, σ_2, C_2.

3. Устанавливают параболический отражатель. Определяют аналогично предыдущему ***Δm₃, σ₃, C₃*** (количество измерений для каждого варианта одинаково – не менее 10).

3. Определение существенности отличия между параметрами для трёх вариантов процесса сушки

Сначала необходимо проверить равенство дисперсий для различных серий измерений (без отражателя, с плоским отражателем, с параболическим отражателем). Сравнение осуществляют для двух точек относительно излучателя (см. рис. 11).

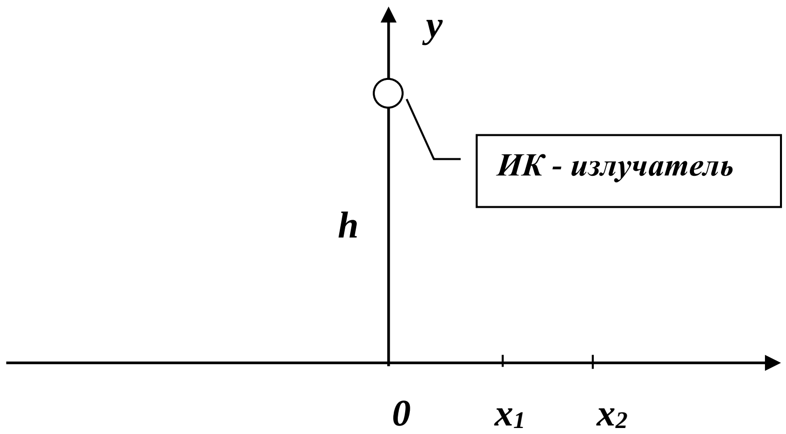

Рис.11. Расположение ИК- излучателя.

x_1= 3 см , x_2= 6 см.

Для проверки равенства дисперсий вычисляют дисперсии прироста температуры в указанных точках за 1 мин. (без отражателя, с плоским и параболическим отражателями). Т.о. получают 6 значений дисперсии:

для ***(.)x_1 – S_{11}*** - без отражателя, ***S_{12}*** - с плоским отражателем, ***S_{13}*** - с параболическим отражателем.

для ***(.)x_2 – S_{21}, S_{22}, S_{23}***.

Сравнение проводят отдельно для каждой точки, попарно, т.е. сравнивают между собой:

S_{11} – S_{12} ; S_{11} – S_{13} ; S_{12} – S_{13} и S_{22} – S_{21} ; S_{21} – S_{23} ; S_{22} – S_{23}.

Для сравнения вычисляют критерий Фишера:

$$F_R = \frac{s_1^2\{Y\}}{s_2^2\{Y\}} = \frac{\dfrac{1}{m_1 - 1}\sum_{k=1}^{m_1}(Y_{k1} - \overline{Y}_1)^2}{\dfrac{1}{m_2 - 1}\sum_{k=1}^{m_2}(Y_{k2} - \overline{Y}_2)^2}$$

Т.о. данный критерий вычисляют 6 раз и сравнивают с табличными значениями для заданного значения доверительной вероятности $p_д$ и числа степеней свободы $m_1 - 1$ и $m_2 - 1$. Для $m_1 = 10$ и $m_2 = 10$ и $p_д = 0,95$ ($f_1 = 9$, $f_2 = 9$): $F_T = 3,18$.

Если $F_R < F_T$, то гипотеза о равенстве дисперсий не отвергается, т.е. 2 ряда измерений являются равноточными.

Если равноточность двух рядов измерений $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ доказана, то для проверки гипотезы о равенстве средних, найденных по независимым малым выборкам, используется критерий ***t***, расчетное значение которого вычисляют по формуле:

$$t_R = \frac{|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2|}{S\{\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2\}} = \frac{|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2|}{\sqrt{S^2\{Y\}}}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} ,$$

где $$S^2\{Y\} = \frac{(m_1 - 1)S_1^2(Y) + (m_2 - 1)S_2^2(Y)}{m_1 + m_2 - 2}$$

При справедливости нулевой гипотезы H_0: $M\{Y_1\}=M\{Y_2\}$, величина ***t*** имеет распределение Стьюдента с $f = m_1+m_2 - 2$ степенями свободы. При конкурирующей гипотезе H_1: $M\{Y_1\}\neq M\{Y_2\}$ определяют табличное значение t_{T2} при заданном уровне значимости α (или доверительной вероятности $p_Д = 1 - \alpha$) и числе степеней свободы $f = m_1+ m_2 - 2$. Если $/t_R/ > t_{T2}[\alpha,f]$ – нулевую гипотезу отвергают, т.е. имеется значимое различие в средних значениях разных серий измерений.

Если $/t_R/ < t_{T2}[\alpha,f]$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, т.е. оба ряда измерений не имеют существенных отличий. Для $f = m_1 - m_2 - 2 = 18$ и $p_Д = 0,9$ значение критерия $t_{T2}[p_Д = 0,9; f = 18] = 1,734$.

Т.о., аналогично сравнению дисперсий рядов измерений, необходимо также попарно провести сравнение средних этих рядов измерений.

Отчёт должен содержать:

1. Схему установки, методику проведения измерений, методику проведения сравнения средних и дисперсий.
2. Исходные данные – 6 серий измерений по 5 измерений в каждой.
3. Вычисленные значения параметров Δm, σ, ***C*** для каждой серии.
4. Результаты проверки гипотезы о равенстве дисперсий для полученных серий измерений (попарно).
5. Результаты проверки гипотезы о равенстве средних для полученных серий измерений (попарно).
6. Выводы о существенности отличий, вносимых применением различных отражателей.