

3. ТЕОРЕМА О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ СИСТЕМЫ

Задание. Система состоит из твердого тела масс m_1 , вращающегося вокруг вертикальной оси z , и точки массы m_2 , движущейся относительно этого тела. Решить задачу о движении этой системы с применением теоремы о кинетическом моменте системы. Задание выполнять на формате II.

Пример 3.1. $m_1=20$ кг, $R=1$ м, $m_2=2$ кг, $S=5\sin 2t$ м, $L=100$ Дж.

Решение

$$1. \frac{dl_z}{dt} = M_z^{(\varepsilon)} = L$$

$$dl_z = Ldt$$

$$l_z = Lt + C_1$$

$$t = 0$$

$$l_{z_0} = L \cdot 0 + C_1; C_1 = l_{z_0}$$

$$2. l_z = l_{z_1} + l_{z_2}; l_{z_1} = J_z \cdot \varpi$$

$$l_{z_1} = 0,4 \cdot m_1 \cdot R^2 \cdot \varpi$$

$$l_{z_2} = M_z(\bar{Q}) = M_z(m_2 \bar{V});$$

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r; V = V_e - V_r = \varpi \cdot R - \dot{S} = \varpi \cdot R - 10 \cos 2t;$$

$$l_{z_2} = M_z[m_2(\varpi \cdot R - \dot{S})] = R \cdot m_2(\varpi \cdot R - 10 \cos 2t);$$

$$l_z = 0,4 \cdot m_1 \cdot R^2 \cdot \varpi + m_2 \cdot R(\varpi \cdot R - 10 \cos 2t) = R^2 \cdot \varpi(0,4 \cdot m_1 + m_2) - 10m_2 \cdot R \cdot \cos 2t;$$

$$l_{z_0} = 1^2 \cdot 0 \cdot (0,4 \cdot 20 + 2) - 10 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 2 \cdot 0 = -20;$$

$$C_1 = l_{z_0} = -20;$$

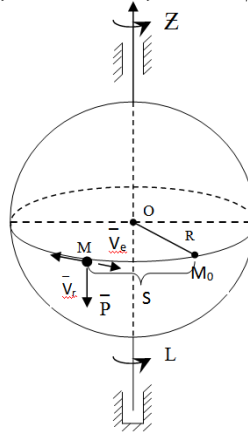
$$l_z = Lt - 20;$$

$$\varpi \cdot R^2(0,4 \cdot m_1 + m_2) - 10m_2 \cdot R \cdot \cos 2t = Lt - 20;$$

$$\varpi = \frac{Lt + 10m_2 \cdot R \cdot \cos 2t - 20}{R^2(0,4 \cdot m_1 + m_2)} = \frac{100t + 10 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 2t - 20}{1^2(0,4 \cdot 20 + 2)} = \frac{100t + 20 \cos 2t - 20}{10};$$

$$\varpi = 2(5t + \cos 2t - 1) \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varpi; d\varphi = \varpi dt;$$



$$\varphi = 2 \int (5t + \cos t - 1) dt = 2 \left(5 \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{\sin 2t}{2} - t \right) + C_2;$$

C_2 , так как в начальный момент система покоилась
 $t = 0, \varphi = 0$

$$\varphi = 5t^2 + \sin 2t - 2t \text{ рад.}$$

Задача 3.2. В однородном цилиндре массой 18 кг и радиусом 1 м просверлен тонкий канал (рис.3.3). Цилиндр имеет в начальный момент угловую скорость 20 рад/с. В этот момент шарик массой 1 кг находится в положении M_0 . Затем он начинает двигаться по закону $S = \sqrt{2}t^2$ м. Найти угловую скорость цилиндра в тот момент, когда шарик выскочит из канала, если момент сопротивления в подшипниках $L=10$ Дж, $\alpha=45^\circ$.

Задача 3.3. Найти закон вращения шара массой 45 кг и радиусом 10 см, если по окружности горизонтального большого круга движется материальная точка массой 2 кг по закону $S = t^2$ м (рис.3.4). В начальный момент шар покоится. Момент трения в подшипниках $L=0,2$ Дж.

Задача 3.4. Решить задачу 3.3 (см. рис.3.4) при условии, что $m_1=20$ кг, $R=1$ м, $m_2=2$ кг, $S=5\sin 2t$ м, а момент сопротивления заменен вращающим моментом, равным 100 Дж.

Задача 3.5. Точка массой 5 кг движется по закону $S = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right)$ м по краю диска массой 80 кг и радиусом 1 м (рис.3.5). В начальный момент диск имел угловую скорость 20 рад/с, а точка находилась в положении M_0 . Найти угловую скорость диска в тот момент, когда точка в первый раз попадает в положение M_1 , если момент сопротивления в подшипниках $L=5$ Дж, $\varphi=90^\circ$.

Задача 3.6. В однородном цилиндре массой 34 кг и радиусом 2 м просверлен тонкий канал (см. рис.3.3). Цилиндр имеет в начальный момент угловую скорость 20 рад/с. В этот момент шарик находится в положении M_0 . Затем он начинает двигаться по закону

$S = t^2$ м. В момент, когда шарик выскакивает из канала, угловая скорость цилиндра равна 15 рад/с. Найти массу шарика, если момент сопротивления в подшипниках $L=20$ Дж, $\alpha=30^\circ$.

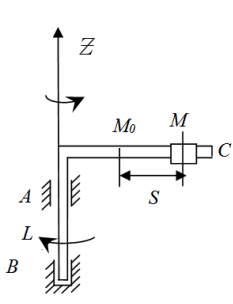


Рис. 3.2

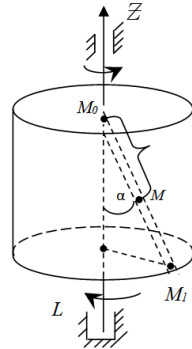


Рис. 3.3

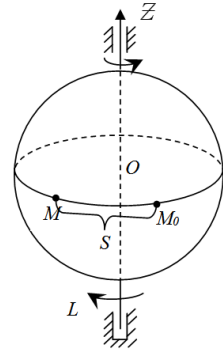


Рис. 3.4

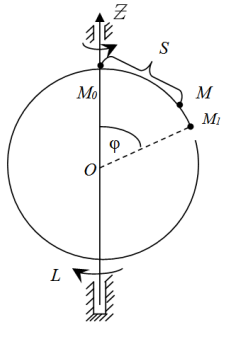


Рис. 3.5

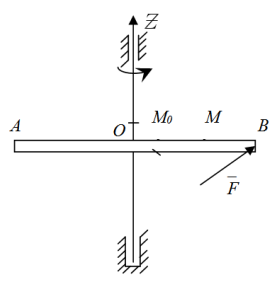


Рис. 3.6

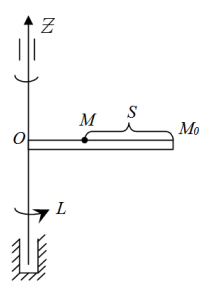


Рис. 3.7

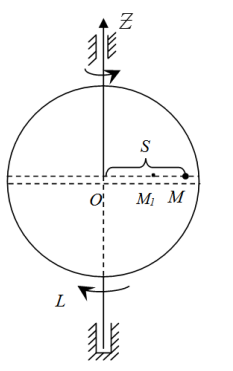


Рис. 3.8

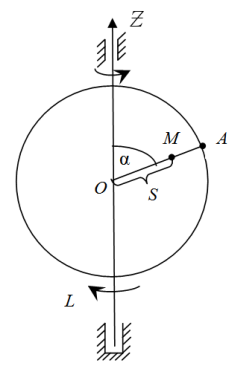


Рис. 3.9

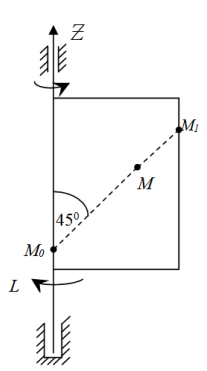


Рис. 3.10

Задача 3.7. К горизонтальному стержню массой 12 кг и длиной 1 м приложена горизонтальная сила $F=80$ Н, перпендикулярная стержню (рис.3.6). По стержню движется точка массой 1 кг с постоянной относительной скоростью $v=2$ м/с. Найти уравнение вращения стержня, если в начальный момент он покоился, а точка находилась в положении M_0 ($OM_0=0$); $AO=OB$.

Задача 3.8. К горизонтальному стержню длиной 4 м приложена горизонтальная сила $F=20$ Н, перпендикулярная стержню (см. рис.3.6). По стержню движется точка массой 2 кг. Найти закон движения точки, если известно, что в начальный момент она находилась в положении M_0 ($OM_0=1$ м), а угловая скорость стержня остается постоянной, равной 20 рад/с; $AO=OB$.

Задача 3.9. По горизонтальному стержню длиной 3 м и массой 5 кг движется точка массой 1 кг по закону $S = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right)$ м (рис.3.7). К стержню приложен вращающий момент $L=5$ Дж. Найти угловую скорость стержня в момент $t=5$ с, если в начальный момент его угловая скорость была равна 10 рад/с.

Задача 3.10. Вдоль горизонтального диаметра однородного шара массой 45 кг и радиусом 1 м просверлен тонкий канал (рис.3.8). Шар имеет в начальный момент угловую скорость 20 рад/с. Точка массой 8 кг движется вдоль канала по закону

$S = \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right)$ м. Найти угловую скорость шара в момент, когда точка в первый раз придет в положение M_0 на середине радиуса, если момент сопротивления в подшипниках $L=10$ Дж.

Задача 3.11. Однородный диск радиусом 1 м и массой 6 кг вращается вместе с материальной точкой массой 2 кг (рис.3.9). В начальный момент диск имел угловую скорость 2 рад/с, а точка находилась в центре диска. Затем точка начинает двигаться по радиусу OA с постоянной относительной скоростью $v=1$ м/с. Найти уравнение вращения диска, если момент сопротивления в подшипниках $L=3$ Дж, $\alpha=60^\circ$.

Задача 3.12. Однородный диск радиусом 1 м и массой 16 кг вращается вместе с материальной точкой массой 4 кг (см. рис.3.9). В начальный момент диск имел угловую скорость 20 рад/с. Точка движется по радиусу OA по закону $S = 4t^3$ м. Найти угловую скорость диска в этот момент, когда точка достигнет середины радиуса. Момент сопротивления в подшипниках $L=20$ Дж, $\alpha=90^\circ$.

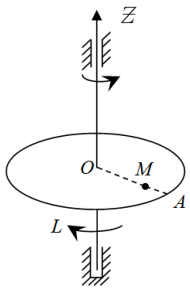


Рис. 3.11

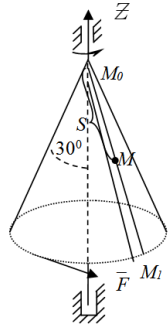


Рис. 3.12

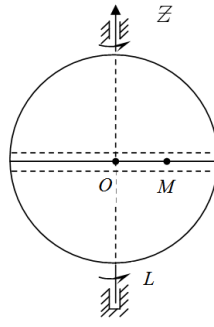


Рис. 3.13

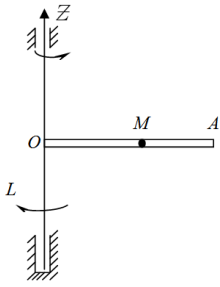


Рис. 3.14

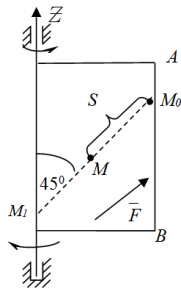


Рис. 3.15

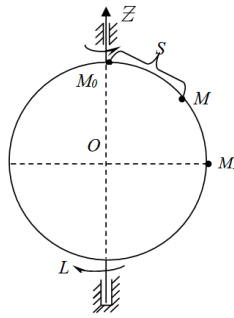


Рис. 3.16

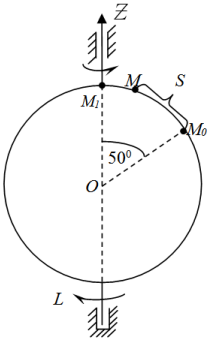


Рис. 3.17

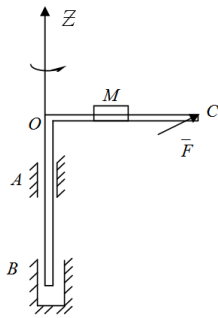


Рис. 3.18

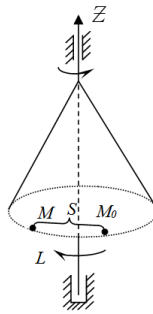


Рис. 3.19

Задача 3.13. Прямоугольная пластина шириной 1 м и массой 17 кг вращается вместе с материальной точкой массой 1 кг (рис.3.10). В начальный момент пластина имела угловую скорость 20 рад/с, а точка находилась на оси. Затем точка начинает двигаться по прямой $M_0 M_1$ без начальной скорости с постоянным относительным ускорением $\varpi_\tau = 2,83 \text{ м/с}^2$. Найти угловую скорость пластины в момент, когда точка достигнет M_1 . Момент сопротивления в подшипниках $L=20 \text{ Дж}$.

Задача 3.14. Горизонтальная платформа массой 70 кг и радиусом 1 м имеет начальную угловую скорость 20 рад/с (рис 3.11). Материальная точка массой 60 кг, находящаяся в начальный момент в положении А, движется без начальной скорости вдоль радиуса с постоянным относительным ускорением $\varpi_\tau = 1 \text{ м/с}^2$. Найти угловую скорость платформы в момент, когда точка достигнет середины радиуса. Момент сопротивления в подшипниках $L=100 \text{ Дж}$. Платформу принять за однородный диск.

Задача 3.15. Вдоль образующей однородного конуса массой 30 кг просверлен тонкий канал (рис.3.12). Конус вращается вместе с шариком массой 1 кг под действием горизонтальной силы $F=340 \text{ Н}$. В начальный момент конус покоился, а шарик занимал положение M_0 . Затем шарик начал двигаться по каналу согласно закону $S = 2t$ м. Сколько оборотов сделает конус к тому моменту, когда шарик придет в положение M_1 , если радиус основания конуса 33 см?

Задача 3.16. Вдоль горизонтального диаметра однородного шара массой 125 кг и радиусом 1 м просверлен тонкий канал (рис.3.13). Шар вращается без трения, вместе с материальной точкой массой 2 кг под действием вращающего момента $L=100 \text{ Дж}$. В начальный момент шар покоился, а точка находилась в его центре. Затем точка начал двигаться по каналу с постоянной относительной скоростью $v=5 \text{ м/с}$. Найти уравнение вращения.

Задача 3.17. Горизонтальная трубка массой 1 кг и длиной 75 см имеет в начальный момент угловую скорость 4 рад/с (рис.3.14). Шарик в этот момент находится в положении O . Затем он начинает двигаться по трубке с постоянной относительной скоростью u . Найти скорость u , при которой трубка остановится в тот момент, когда

шарик достигнет точки A , если момент сопротивления в подшипниках $L = 1$ Дж.

Задача 3.18. Прямоугольная пластина массой 20 кг и шириной 1 м вращается вместе с материальной точкой массой 1 кг под действием силы $F = 100$ Н, перпендикулярной пластине и приложенной к стороне AB (рис.3.15). Точка движется согласно закону $s = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ м. Найти угловую скорость пластины в момент, когда точка достигнет положения, если начальная угловая скорость ее 20 рад/с.

Задача 3.19. шар массой 45 кг и радиусом 1 м вращается вместе с материальной точкой массой 2 кг (рис. 3.16). В начальный момент шар имел угловую скорость 20 рад/с, а точка находилась в положении M_0 . Затем она начинает двигаться по окружности вертикального большого круга согласно закону $s = \pi \left(1 - \cos\frac{\pi t}{12}\right)$ м. Найти угловую скорость шара в момент, когда точка в первый раз попадет в положение M_1 , если момент сопротивления в подшипниках $L = 5$ Дж.

Задача 3.20. Найти угловую скорость платформы (см. задачу 3.14 и рис. 3.11), в момент, когда точка достигнет положения A , если в начальный момент она находится в центре платформы, а $m_1 = 80$ кг, $m_2 = 60$ кг, $w_r = 0,25$ м/с², $R = 2$ м, $w_0 = 25$ рад/с, $L = 100$ Дж.

Задача 3.21. Шар массой 25 кг и радиусом 1 м вращается вместе с материальной точкой массой 2 кг (рис. 3.17). В начальный момент шар имел угловую скорость 20 рад/с, а точка занимала положение M_0 . Затем она начала двигаться по окружности вертикального большого круга по закону $s = \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ м. найти угловую скорость шара в момент, когда точка в первый раз достигнет положения M_1 , если момент сопротивления в подшипниках $L = 10$ Дж.

Задача 3.22. По стороне OC прямого угла BOC из положения O движется ползун массой 2 кг с постоянной относительной скоростью» 5 м/с (рис .3.18). В точка C приложена сила $F = 50$ Н, перпендикулярная плоскости угла; $OC = 2$ м. Момент инерции угла $J_z = 50$ кг·м². Пренебрегая трением в подшипниках, найти уравнение вращения угла, если в начальный момент он покоился.

Задача 3.23. По направляющей конуса массой 30 кг движется материальная точка массой 1 кг с постоянным относительным касательным ускорением 20 м/с^2 (рис. 3.19). Найти уравнение вращения конуса, если в начальный момент сопротивления в подшипниках $L = 10 \text{ Дж}$, радиус основания конуса 1 м.

Задача 3.24. По направляющей одного конуса движется материальная точка массой 2 кг по закону $s = 5t^2 \text{ м}$ (см. рис. 3.19). В начальный момент конус покоился. Найти закон вращения конуса, если радиус его основания 1 м, момент сопротивления в подшипниках $L = 20 \text{ Дж}$.

Задача 3.25. Вдоль образующей однородного конуса массой 50 кг просверлен тонкий канал, по которому движется шарик по закону $s = 3t^2 \text{ м}$ (рис.3.20). В Начальный момент конус имеет угловую скорость 20 рад/с . В момент, когда шарик достигает положения M_1 угловая скорость конуса равна 16 рад/с . Найти массу шарика, если радиус основания конуса 1,5 м, момент сопротивления в подшипниках $L = 27 \text{ Дж}$.

Задача 3.26. Круглый однородный диск массой 20 кг и радиусом 1 м вращается вместе с материальной точкой массой 4 кг (рис.3.21). В начальный момент диск имел угловую скорость 19 рад/с , а точка находилась в положении. Затем она начала двигаться по радиусу $M_0 O$ согласно закону $s = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi t}{4} \text{ м}$. Найти угловую скорость диска в момент $t = 1 \text{ с}$. если момент сопротивления в подшипниках $L = 9 \text{ Дж}$, $\alpha = 30^\circ$.

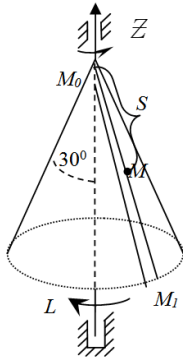


Рис. 3.20

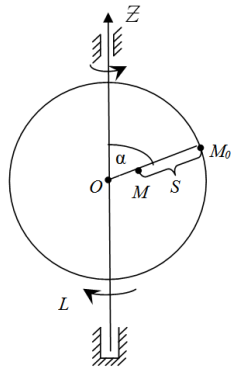


Рис. 3.21

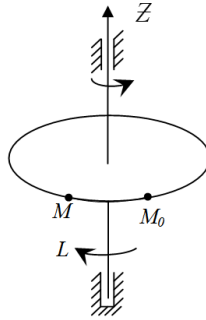


Рис. 3.22

Задача 3.27. Однородный диск массой 18 кг и радиусом 1 м вращается вместе с материальной точкой массой 1 кг (см. рис.3.5). Точка движется по краю диска с постоянным относительным касательным ускорением $w_{rt} = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}^2$. В начальный момент диск имел угловую скорость 20 рад/с, а точка находилась в положении M_0 и имела скорость $v_{r0} = \frac{\pi}{8} \text{ м/с}$. Найти угловую скорость диска в момент, когда точка достигнет положения M_1 , если момент сопротивления в подшипниках $L = 10 \text{ Дж}$; $\varphi = 45^\circ$.

Задача 3.28. Найти закон изменения угловой скорости диска (см. задачу 3.26 и рис. 3.21), а также его угловую скорость в момент, когда точка достигнет центра диска, если $m_1 = 20 \text{ кг}$, $R = 1 \text{ м}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$, $w_0 = 20 \text{ рад/с}$, $s = r^2 \text{ м}$, $L = 10 \text{ Дж}$, $\alpha = 90^\circ$.

Задача 3.29. При вращении круглой горизонтальной платформы радиуса 10 м в подшипниках возникает момент сопротивления $L = 80 \text{ Дж}$ (рис.3.22). В начальный момент система покоится. Найти относительное касательное ускорение (считать его постоянным), с которым должен идти по краю платформы человек массой 80 кг для того, чтобы платформа оставалась неподвижной.

Задача 3.30. Как должна двигаться по краю платформы материальная точка массой 75 кг, чтобы платформа вращалась с постоянным угловым ускорением $0,2 \text{ рад/с}^2$? Момент сопротивления в подшипниках $L = 45 \text{ Дж}$. Платформу принять за однородный диск массой 150 кг и радиусом 1 м (см. рис. 3.22).