

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ НА ИМПУЛЬСНЫЙ СИГНАЛ

Цель работы – применение интеграла Дюамеля для определения реакций на кусочно-непрерывные сигналы, представление импульсного напряжения как совокупности непрерывных сигналов, нахождение реакции в виде наложения частных реакций на отдельные составляющие импульсного сигнала.

Введение

Рассмотрим значения непрерывного сигнала $e(t)$ в дискретные моменты времени $t_k = kt_d$, где t_d - интервал дискретизации. Последовательность $e_k(t_k)$ носит название решетчатой функции.

При заданной решетчатой функции можно приближенно восстановить непрерывный сигнал, используя различные виды интерполяции, отличающимися способами соединения смежных точек, определяемых значениями решетчатых функций e_k и e_{k+1} . Различают ступенчатую, линейную, параболическую и другие виды интерполяции. При ступенчатой интерполяции сигнал представляется в виде наложения ступенчатых функций

задержанных во времени

$$e_a(t) = E_0 \delta_1(t) + \Delta E_1 \delta_1(t - t_d) + \Delta E_2 \delta_1(t - 2t_d) + \Delta E_3 \delta_1(t - 3t_d) + \Delta E_4 \delta_1(t - 4t_d) + \dots \quad (1)$$

Здесь $\delta_1(t)$ - функция Хевисайда, $E_0 = e(0)$ - значение функции в нуле, $\Delta E_k = e_k - e_{k-1}$ приращение решетчатой функции в момент t_k .

Из рисунка 1 видно, что при уменьшении интервала дискретизации приближенное описание сигнала $e_a(t)$ стремится к непрерывной форме исходного сигнала $e(t)$.

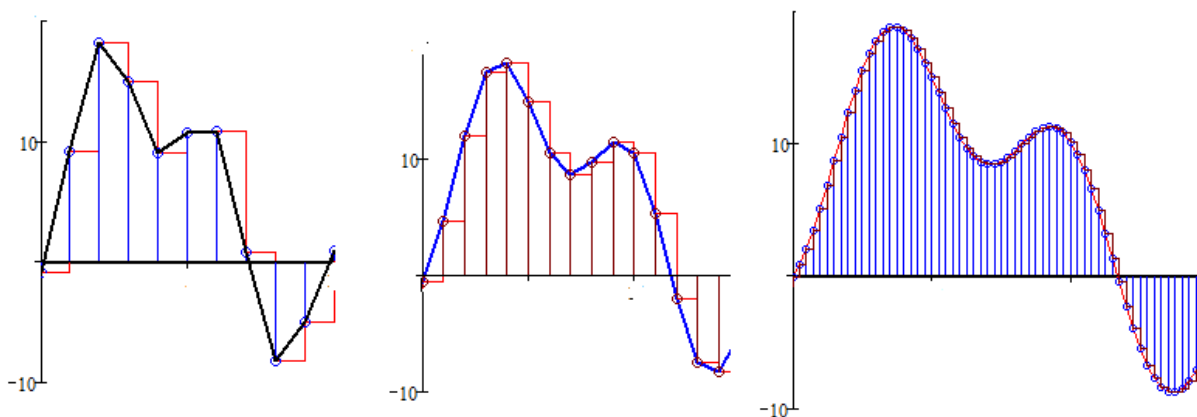


Рис.1. Примеры решетчатых функций, ступенчатой и линейной интерполяции при различных значениях интервала дискретизации. Число выборок в пределах периода составляет N=12 - а), N=20 - б) и N=80 - в).

Переходной характеристикой $h_1(t)$ называется реакция цепи на действие единичного ступенчатого сигнала $\delta_1(t)$. Поскольку входной сигнал представлен совокупностью ступенчатых функций, тогда в соответствии с принципом суперпозиции реакцию на действие такого сигнала $e_a(t)$ можно представить как наложение переходных характеристик с весом, равным ступенчатому приращению ΔE_k

$$u_a(t) = E_0 h_1(t) + \sum_{k=1} \Delta E_k \delta_1(t - kt_d) \cdot h_1(t - kt_d) \quad (2)$$

При малых значениях величины t_d приращение ΔE_k можно выразить через производную от функции $e(t)$ в момент $t = t_k$

$$\Delta E_k = e'(t_k) \cdot t_d$$

В предельном случае $t_d \rightarrow d\eta$, $t_k = kt_d \rightarrow \eta$ сумма (2) переходит в интеграл, который носит название интеграла Дюамеля

$$u(t) = e(0) \cdot h_1(t) + \int_0^t e'(\eta) \cdot h_1(t-\eta) d\eta \quad (3)$$

Реакция на непрерывные сигналы

Линейный сигнал

Определим напряжение емкости $u_c(t)$ последовательной RC цепи (рис. 1-а) при действии на входе линейно напряжения $e(t) = k_t \cdot t$ с постоянной скоростью нарастания $e'(t) = k_t = const$.

Переходная характеристика цепи относительно напряжения $u_c(t)$ имеет вид

$$h_1(t) = 1 - \exp(-\alpha \cdot t), \quad \alpha = 1/\tau, \quad \tau = RC \quad (4)$$

где α - коэффициент затухания, τ - времени релаксации.

Вычислим реакцию по формуле (3)

$$u(t) = \int_0^t k_t [1 - e^{-\alpha(t-\eta)}] d\eta = k_t \cdot [t - e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\eta} d\eta] = k_t (t - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau}), \quad \tau = 1/\alpha$$

$$u(t) = k_t \cdot h_2(t), \quad h_2(t) = \tau [\hat{t} - (1 - e^{-\hat{t}})] \quad \hat{t} = t/\tau$$

Здесь $h_2(t)$ - реакция цепи на линейный сигнал с единичным угловым коэффициентом $k_t = 1$.

Графики переходной характеристики, входного и выходного сигнала при параметрах цепи $R = 1, C = 1$ и угловом коэффициенте $k_t = 1$ показаны на рис.2-а и 2-б.

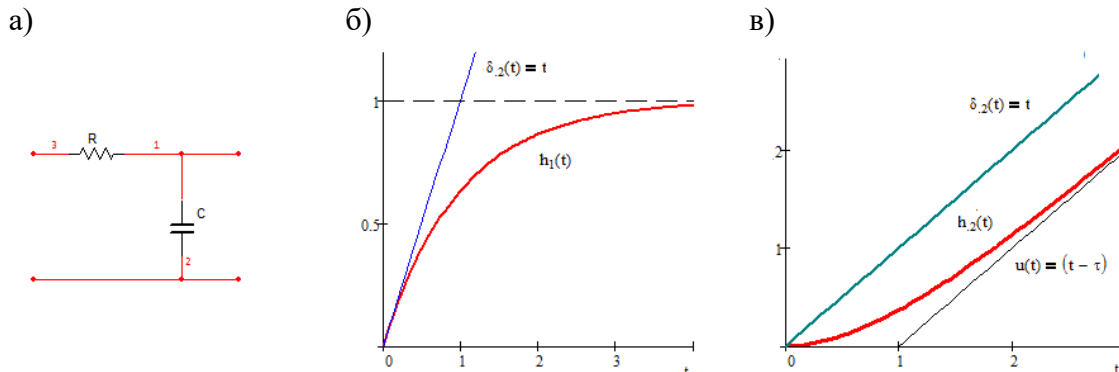


Рис. 2. Схема цепи – а), переходная характеристика – б) входной и выходной сигналы – в)

Из графика видно, что после окончания переходного процесса $t \geq t_s, t_s = (3-5)\tau$ установившаяся реакция запаздывает относительно входного сигнала на время $t_d = \tau$:

$$u(t) = k_t (t - \tau), \quad t > t_s$$

Реакция цепи на экспоненциальный сигнал.

Найдем реакцию рассмотренной выше цепи с характеристикой $h_1(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ в случае экспоненциального воздействия $e(t) = E \cdot \exp(-\alpha_e t)$, для которого $e(0) = E$ и $e'(t) = -\alpha_e \cdot E \cdot \exp(-\alpha_e t)$.

Запишем интеграл Дюамеля

$$u(t) = E(1 - \exp(-\alpha_h \cdot t) - \alpha_e \cdot \int_0^t \exp(-\alpha_e t) \cdot [1 - \exp(-\alpha_h \cdot (t - \eta))] d\eta) \quad (5)$$

После преобразований получим

$$u(t) = \frac{E}{\alpha_h - \alpha_e} \cdot [\exp(-\alpha_e t) - \exp(-\alpha_h \cdot t)] \quad (6)$$

Реакция зависит от соотношения между коэффициентом затухания свободных составляющих переходного процесса α_h и коэффициентом затухания экспоненциального импульса α_e . На рисунке 3-а показано формирование реакции при значении коэффициентов $\alpha_h = 0.5$ и $\alpha_e = 1$. Графики напряжений емкости при значении $\alpha_h = 0.5$ и разных значениях $\alpha_e = 0.45, 1, 2$ даны на рис. 3-б.

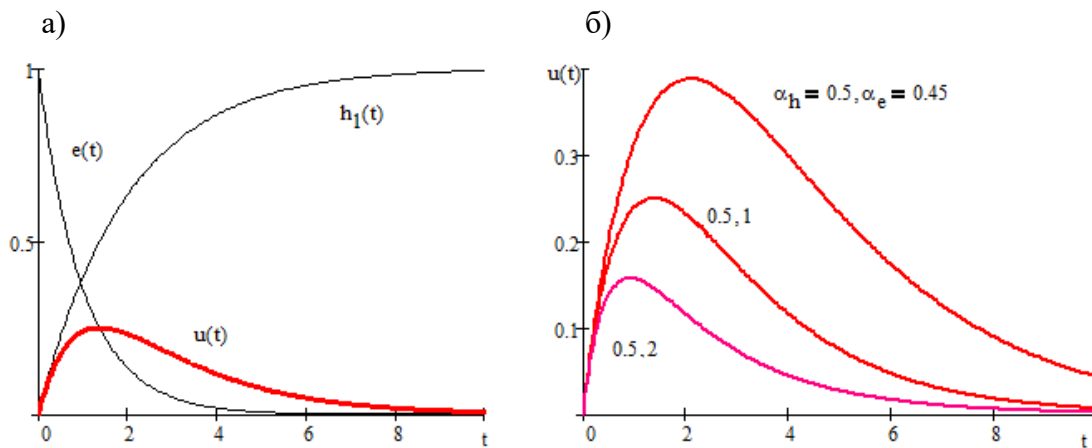


Рис.3. Входной сигнал, переходная характеристика и реакция цепи а) и влияние постоянной затухания импульсного сигнала на форму реакции – б)

Определение реакций на кусочно-непрерывные сигналы

На практике часто встречаются задачи определения реакций цепи на кусочно-постоянные, кусочно-линейные, кусочно-гармонические и другие виды сигналов. Примеры таких сигналов показаны на рис.4

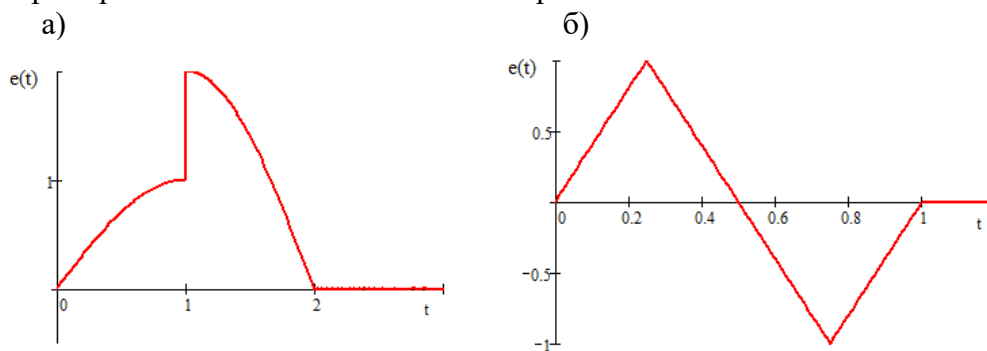


Рис. 4. Примеры кусочно-гармонического сигнала – а) и кусочно-линейного сигнала б).

На участках непрерывности такие сигналы описываются разными функциями. Например, сигнал, показанный на рис.4-а записывается для трех областей следующим образом

$$e(t) = \begin{cases} E_m \cdot \sin(2\pi \cdot t/T), & \text{if } 0 \leq t \leq T/4 \\ 2E_m \cdot \cos[2\pi(t/T - 0.25)] & \text{if } T/4 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{if } t \geq T/2 \end{cases} \quad (7)$$

В рассмотренном примере длительность сигнала $t_p = 2$, период гармонических функций $T = 4$, амплитуда $E_m = 1$. $0 \leq t \leq t_p/4$
 Форма сигнала, показанного на рис. 4-б, записывается для четырех областей $t \geq 0$

$$e(t) = \begin{cases} k E_m \cdot t, & 0 \leq t \leq t_p/4 \\ -E_m + k \cdot (t - 3t_p/4), & \text{if } 3t_p/4 \leq t \leq t_p \\ 0, & \text{if } t \geq t_p \end{cases} \quad (8)$$

где t_p - длительность импульса, E_m - амплитуда, $k = 4E_m/t_p$ - угловой коэффициент.

Интеграл Дюамеля имеет разную форму в зависимости от области, для которой он записывается.

Вычислим напряжение резистора $u_R(t)$ в последовательной CR -цепи (рис.5), на вход которой подается импульс напряжения (рис. 4а), заданный формулой (8).

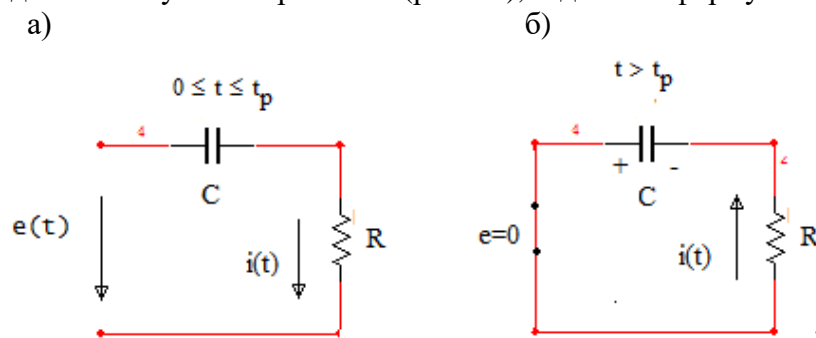


Рис.5 Схема цепи во время действия импульсного напряжения – а) и во время паузы – б)

Переходная характеристика h_1 и производные e_{d1}, e_{d2} от напряжения $e(t)$ на различных временных участках имеют вид

$$h_1(t) = \exp(-\alpha \cdot t), \quad e_{d1}(t) = e_1'(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (9)$$

$$e_{d2}(t) = e_2'(t) = -2 \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Запишем интеграл Дюамеля для каждой из трех областей

$$v(t) := \begin{cases} \int_0^t e_{1d}(\eta) \cdot h_1(t-\eta) d\eta & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ \left(h_1(t-1) + \int_0^{\frac{T}{4}} e_{1d}(\eta) \cdot h_1(t-\eta) d\eta + \int_{\frac{T}{4}}^t e_{2d}(\eta) \cdot h_1(t-\eta) d\eta \right) & \text{if } \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \left(h_1(t-1) + \int_0^{\frac{T}{4}} e_{1d}(\eta) \cdot h_1(t-\eta) d\eta + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} e_{2d}(\eta) \cdot h_1(t-\eta) d\eta \right) & \text{if } t \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (10)$$

При записи интеграла Дюамеля на интервале $0.25T \leq t \leq 0.5T$ первое слагаемое учитывают скачок напряжения в момент $t = T/4$, второе слагаемое - влияние напряжения $e_1(t)$ первой части импульса.

После окончания действия импульса $t \geq T/2$ происходит разряд конденсатора через источник, который при равенстве нулю напряжения может быть представлен элементом КЗ, как показано на рис. 5-б. Энергия, запасенная в емкости, рассеивается в резисторе при протекании тока разряда в контуре $C - SC - R$. На рис. 6 показан график искомой реакции $u_R(t)$, полученный при следующих параметрах цепи и входного импульса $\alpha = 1, T = 4, E_m = 1, t_p = T/2 = 2$.

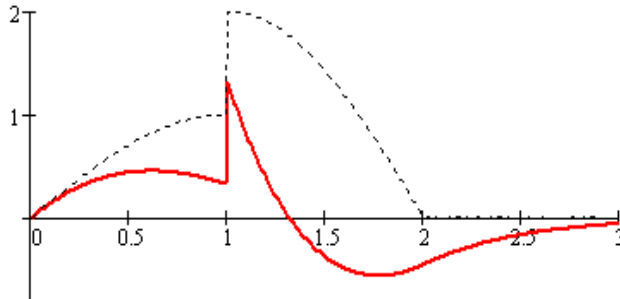


Рис.6. Напряжение на резисторе в последовательном CR -контуре при действии на входе цепи кусочно-гармонического импульса.

Нахождение реакции цепи посредством наложения частных реакций на элементарные составляющие входного сигнала.

Большинство встречающихся на практике импульсных сигналов можно разложить на непрерывные сигналы, которые включаются с запаздыванием в моменты времени, соответствующие границам областей определения кусочно-непрерывного сигнала.

Реакция цепи на прямоугольный импульс

Прямоугольный импульс $e(t)$ длительностью t_p и амплитудой E_m можно представить как наложение двух ступенчатых напряжений, одно из которых подается в момент появления импульса $e_1(t) = E_m \cdot \delta_1(t)$, а второе напряжение $e_2(t) = -E_m \cdot \delta_1(t - t_p)$ подается с задержкой t_d , равной длительности импульса t_p .

$$e(t) = E_m \cdot [\delta_1(t) - \delta_1(t - t_p)] \quad (11)$$

Найдем выходные реакции LR и RC четырехполюсников (рис. 7) с одинаковыми значениями времени релаксации $L_1/R_1 = R_2C_2 = \tau$

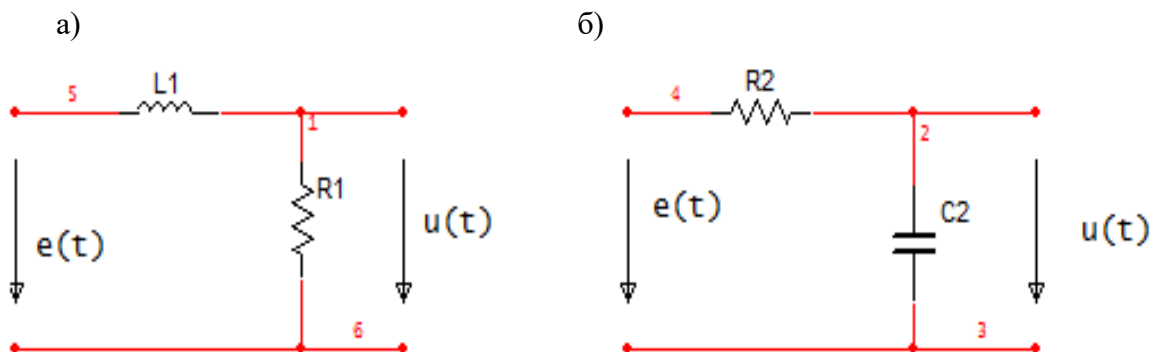


Рис.7. Резистивно-индуктивный – а) и резистивно-емкостный – б) четырехполюсники интегрирующего типа.

Переходная характеристика относительно напряжения на резисторе LR цепи и относительно напряжения емкости RC цепи имеет одинаковый вид

$$h_1(t) = 1 - \exp(-t/\tau)$$

Выходную реакцию $u(t)$ можно представить как суперпозицию двух переходных характеристик с весом, равным амплитуде импульса E_m

$$u(t) = E_m \cdot [h_1(t) \cdot \delta_1(t) - h_1(t-t_p) \cdot \delta_1(t-t_p)] \quad (12)$$

На рисунке 8 показано формирование прямоугольного импульса длительностью $t_p = 1$ и амплитудой $E_m = 1$ помощью ступенчатых функций и форма реакций для различных времен релаксации: $\tau = 0.75$, $\tau = 0.1$ (рис 8-б) и $\tau = 2$ (рис. 8-в). Реакции получены при различных значениях времени релаксации: $\tau = 0.75$, $\tau = 0.1$ (рис 6-б) и $\tau = 2$ (рис. 6-в).

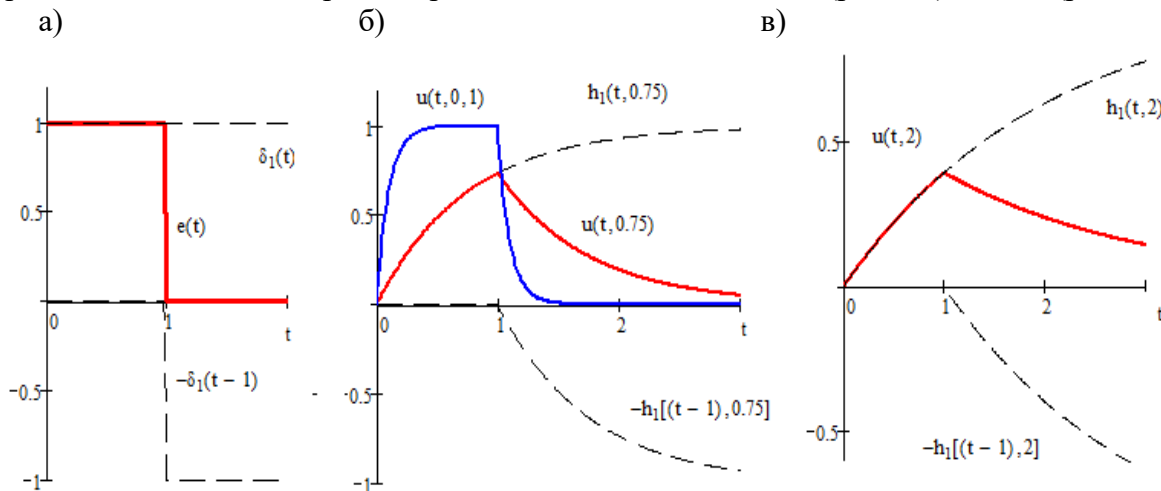


Рис.8 . Формирование прямоугольного импульса – а) и реакций цепи при разных значениях времени релаксации.

Из осциллограмм следует, что форма реакции зависит от отношения длительности импульса к времени релаксации $t_p = t_p/\tau$. Если выполняется условие $t_p \gg \tau$, то форма реакции близка к форме входного сигнала. Это видно из сравнения осциллограмм напряжений $e(t)$ и $u(t, \tau = 0.1)$ на рис. 8-б, полученных для случая $t_p = 10$.

Если длительность импульса намного меньше времени релаксации $t_p \ll \tau$, то реакции в пределах длительности импульса близка к линейно нарастающему сигналу – интегралу от постоянной величины

$$u(t, \tau) = 1 - e^{-t/\tau} \approx 1 - (1 - t/\tau) = t/\tau, \quad 0 \leq t \leq t_p, \quad t_p \ll \tau$$

Точное интегрирование прямоугольного импульса $E_m = 1, t_p = 1$ дает

$$u_{\text{int}}(t) = \begin{cases} t & \text{if } 0 \leq t \leq t_p \\ 1 & \text{if } t > t_p \end{cases}$$

Графики входного сигнала $e(t)$, увеличенной в τ раз реакции цепи $u_m = \tau \cdot u(t, \tau)$ и осциллограмма выходного сигнала идеального интегратора $u_{\text{int}}(t)$ при времени релаксации $\tau = 20$ и длительности импульса $t_p = 1$ показаны на рисунке 9.

Из приведенных соотношений и графиков следует, что рассмотренные четырехполосники могут работать в режиме неискажающего преобразования, если $t_p \gg \tau$, и приближенного интегрирования, если $t_p \ll \tau$.

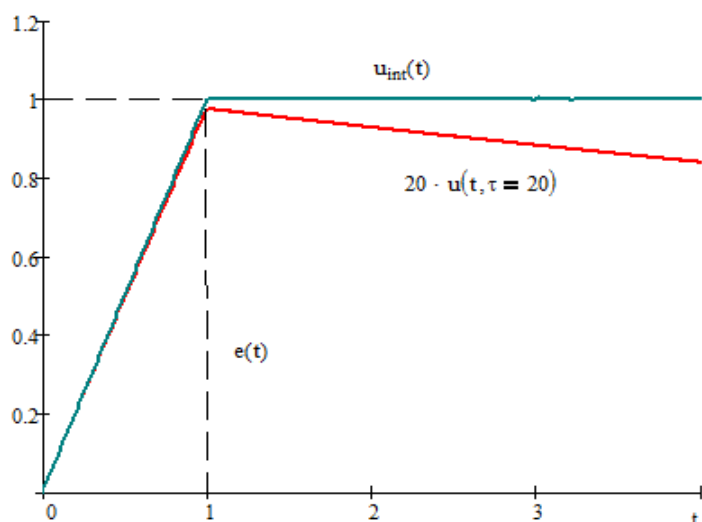


Рис.9 Графики входного сигнала, реакции цепи и выходного сигнала идеального интегратора.

Реакция цепи на импульс треугольной формы

Представим симметричный сигнал треугольной формы с помощью линейных функций единичного наклона $\delta_2(t) = t\delta_1(t)$:

$$e(t) = k_l \cdot [\delta_2(t) - 2\delta_2(t - t_p/4) + 2\delta_2(t - 3t_p/4) - \delta_2(t - t_p)] \quad (13)$$

где $k_l = 4E_m/t_p$ - угловой коэффициент, E_m, t_p - амплитуда и длительность импульса.

Схема построения входного сигнала показана на рис.10.

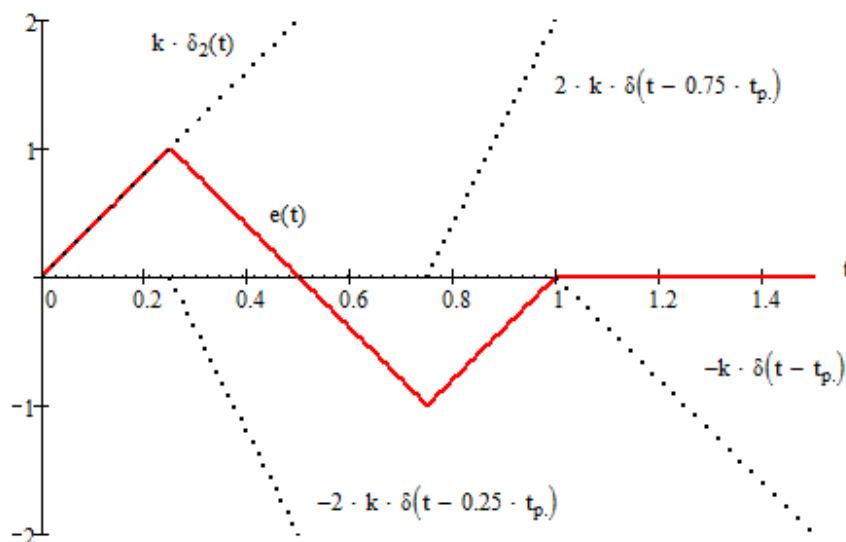


Рис.10. Формирование импульса треугольной формы с помощью линейных функций.

Найдем выходные реакции RL и CR четырехполюсников (рис. 9) с одинаковыми значениями времени релаксации $L_1/R_1 = R_2C_2 = \tau$ и одинаковыми переходными характеристиками $h_1(t)$ и реакциями на линейную функцию единичного наклона $h_2(t)$:

$$h_1(t) = \exp(-t/\tau), \quad h_2(t) = 1 - \exp(-t/\tau) \quad (14)$$

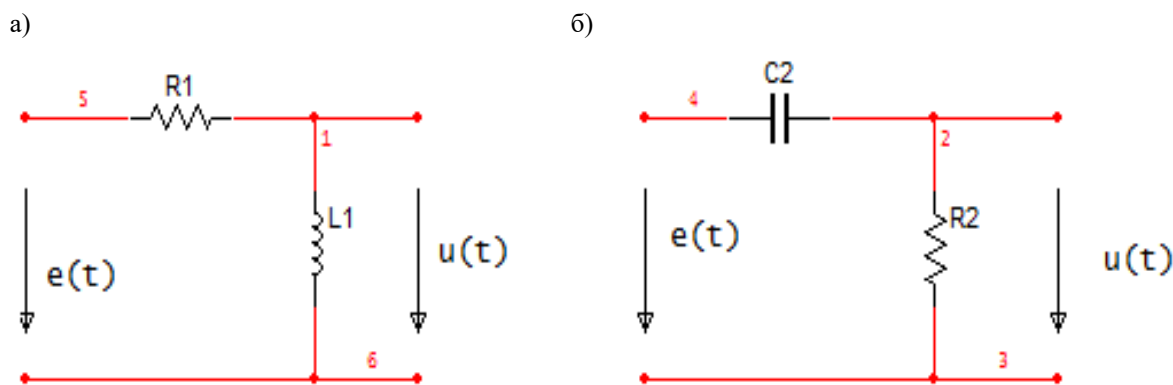


Рис.11. Резистивно-индуктивный – а) и резистивно-емкостный – б) четырехполюсники дифференцирующего типа.

Выходную реакцию $u(t)$ представим как суперпозицию реакций на линейные сигналы

$$u(t) = k[h_2(t) - 2h_2(t - 0.25t_p) + 2h_2(t - 0.75t_p) - h_2(t - t_p)] \quad (15)$$

Полная реакция и ее составляющие при параметрах $t_p = 1$ и $\tau = 0.25$ показаны на рис.10.

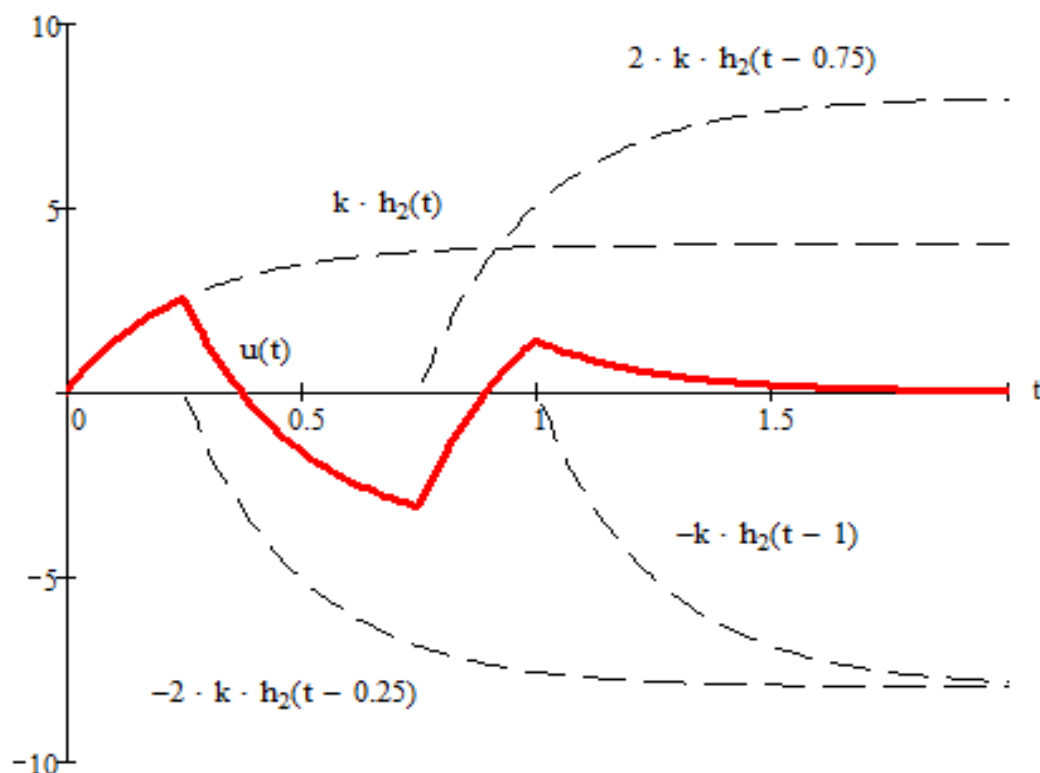


Рис.12. Формирование выходного сигнала в результате наложения частных реакций.

Форма реакции зависит от соотношения между временем релаксации τ и одного из интервалов кусочно-линейного изменения входного сигнала $t_i = t_p/4$, где t_p – длительность импульса. При малых значениях времени релаксации форма реакции близка к производной от входного сигнала. На рис.11-а показана выходная реакция четырехполюсника при времени релаксации $\tau = 0.025$, длительности импульса $t_p = 1$ и времени $t_i = 0.25$. На том же рисунке показан входной сигнал и его производная

$$e_d = \frac{de(t)}{dt} = k_l \cdot [\delta_1(t) - 2\delta_1(t - 0.25) + 2\delta_1(t - 0.75) - \delta_1(t - 1)]$$

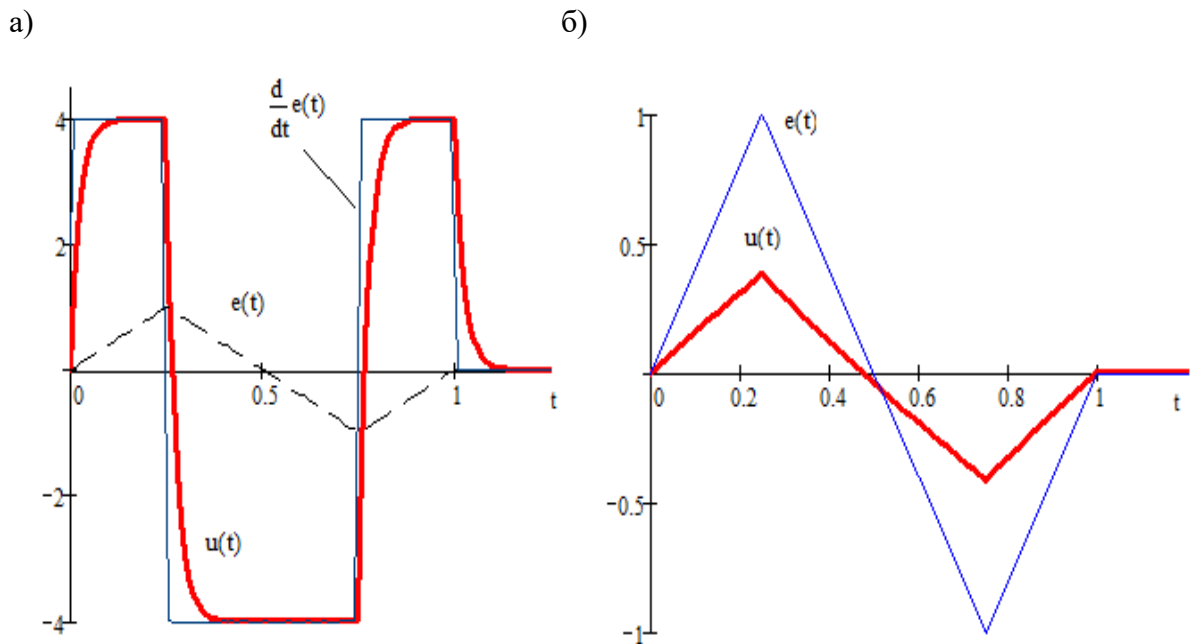


Рис.13. Входной и выходной сигнал четырехполюсника в режимах приближенного дифференцирования – а) и передачи сигнала с малыми искажениями – б).

При больших значениях времени релаксации форма выходного сигнала близка к форме входного сигнала. Это следует из рисунка 11-б, на котором показана реакция, полученная при следующих параметрах: $\tau = 2.5$, $t_p = 1$ и $t_l = 0.25$.

Задание

Задана резистивно-индуктивная цепь (рис.14) и ее вторичные параметры для установившегося режима синусоидального тока частотой $f = 50 \text{ Гц}$ (таблица 1)

$$X_L = \omega L, \quad \text{tg} \varphi = X_L / R$$

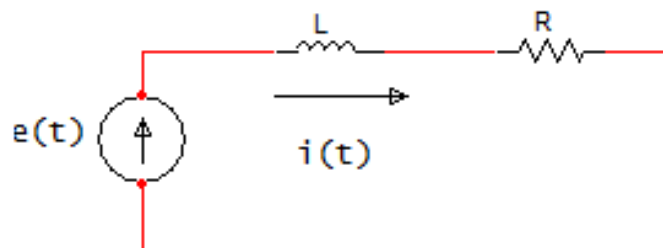


Рис.14. Схема исследуемой цепи

Форма входного напряжения $e(t)$ задана в виде осциллограмм, показанных на рис. 15. Задача состоит в нахождении входной реакции $i(t)$ на действие импульсного напряжения $e(t)$ двумя способами

- с помощью интеграла Дюамеля
- с помощью разложения входного сигнала на элементарные составляющие и определения полной реакции как суперпозиции частных реакций

Порядок выполнения работы

1. Пользуясь данными таблицы 1, найти первичные параметры цепи R, L
2. Найти переходную характеристику цепи $g_1(t)$ относительно тока

$$g_1(t) = i(t) \quad \text{if} \quad e(t) = \delta_1(t)$$
3. Пользуясь осциллограммами сигналов, записать форму входного напряжения в виде кусочно-непрерывной функции. Пример такой записи сигнала в среде *MathCad* дают формулы (7), (8).
4. Записать интеграл Дюамеля для выделенных участков непрерывности как это сделано в формуле (10). Используя графические средства *MathCad* построить на одном графике временные зависимости входного напряжения и тока цепи.
5. Разложить входной сигнал на элементарные составляющие ступенчатого, линейного или гармонического вида. Пример такой записи сигнала дается формулами (11), (13).
6. Найти реакции на элементарные сигналы классическим и операторным методом. В классическом методе переходной процесс рассматривается как наложение вынужденной и свободной составляющей

$$i(t) = i_t(t) + i_s(t)$$

В операторном методе ток $i(t)$ находится как оригинал операторного тока $I(s)$, который вычисляется через изображение входного напряжения $E(s)$ и операторную проводимость $Y(s)$

$$i(t) = L^{-1}(I(s)) \quad , \quad I(s) = E(s) \cdot Y(s)$$

Нахождение оригинала производится с помощью разложения Хевисайда

7. Записать полную реакцию как суперпозицию частных реакций с учетом их смещения во времени как это сделано в формулах (12), (15).
8. Построить на одном графике полную реакцию и ее составляющие. Объяснить отличие форм напряжения и тока. Как следует изменить параметры цепи или параметры сигнала, чтобы форма реакции была близка к форме входного напряжения.

Таблица 1

Вторичные параметры цепи

№	$X_L, \text{Ом}$	$tg\varphi$	№	$X_L, \text{Ом}$	$tg\varphi$
1	0.5	3.5	16	0.6	9
2	0.5	3	17	0.65	9.5
3	0.6	3	18	0.7	10
4	0.6	3.5	19	0.7	9.5
5	0.55	4	20	0.75	3.5
6	0.55	4.5	21	0.75	4
7	0.65	5	22	0.55	5
8	0.65	5.5	23	0.7	6
9	0.5	6	24	0.65	7
10	0.55	6.5	25	0.5	8
11	0.6	7	26	0.5	3
12	0.65	7.5	27	0.4	3.5
13	0.65	8.0	28	0.6	9
14	0.6	8.5	29	0.7	8.5
15	0.55	9	30	0.65	8

Осциллограммы напряжений

