В других случаях при интегрировании окончательные формулы могут содержать выражения, определяющие понятия статического момента, центробежного момента, площади. Полезно вспомнить, что статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен нулю. Центробежный момент инерции относительно главных осей также равен нулю.

2.2. Расчетно-проектировочная работа «Исследование напряженно-деформированного состояния в точке нагруженного тела»

В локальной области незагруженной поверхности конструкции с помощью прямоугольной розетки датчиков (рис. 2.4) измерены три удлинения – ε_x, $\varepsilon_y, \varepsilon_r$.

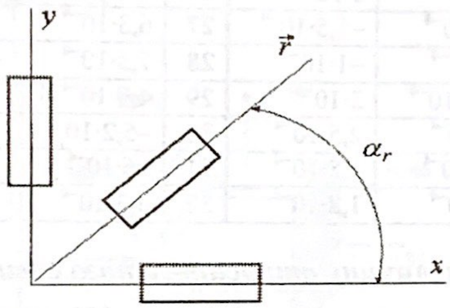

Рис. 2.4

Требуется определить:

1. Относительный сдвиг γ_{xy}.

2. Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Представить компоненты тензора напряжений графически.

3. Положение главных площадок и главные напряжения. Результаты представить графически.

4. Экстремальные касательные напряжения $\tau_{\max}$.

5. Главные деформации.

6. Проверить выполнение условия прочности по классическим теориям прочности.

Данные взять из табл. 2.2. Принять $\alpha_r = 45^\circ$.

Пример выполнения задания

Пусть в локальной области незагруженной поверхности конструкции с помощью прямоугольной розетки датчиков (рис. 2.4) измерены три относительных удлинения – ε_x, ε_y, ε_r; $\alpha_r = 45^\circ$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0{,}3$; $\varepsilon_x = -0{,}000200$; $\varepsilon_y = 0{,}000100$; $\varepsilon_r = -0{,}000300$; $[\sigma] = 160$ МПа.

Таблица 2.2

Данные для выполнения расчетно-проектировочной работы

№	ε_x	ε_y	ε_r	№	ε_x	ε_y	ε_r
1	$2\cdot10^{-4}$	$-3\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	17	$3{,}4\cdot10^{-4}$	$-2\cdot10^{-4}$	$-1{,}5\cdot10^{-4}$
2	$-1\cdot10^{-4}$	$1{,}5\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	18	$2{,}8\cdot10^{-4}$	$-3{,}6\cdot10^{-4}$	$-1\cdot10^{-4}$
3	$-1{,}5\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$1{,}6\cdot10^{-4}$	19	$-4\cdot10^{-4}$	$2{,}7\cdot10^{-4}$	$3{,}5\cdot10^{-4}$
4	$3\cdot10^{-4}$	$-1{,}2\cdot10^{-4}$	$0{,}5\cdot10^{-4}$	20	$6\cdot10^{-4}$	$-3\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$
5	$5\cdot10^{-4}$	$-3\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	21	$5{,}3\cdot10^{-4}$	$-4\cdot10^{-4}$	$2{,}5\cdot10^{-4}$
6	$3{,}5\cdot10^{-4}$	$-2\cdot10^{-4}$	$1{,}5\cdot10^{-4}$	22	$3{,}2\cdot10^{-4}$	$-5\cdot10^{-4}$	$-3\cdot10^{-4}$
7	$4\cdot10^{-4}$	$-1{,}8\cdot10^{-4}$	$0{,}9\cdot10^{-4}$	23	$7\cdot10^{-4}$	$-3{,}5\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$
8	$2{,}8\cdot10^{-4}$	$-1{,}3\cdot10^{-4}$	$1{,}2\cdot10^{-4}$	24	$6{,}5\cdot10^{-4}$	$-2\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$
9	$-2{,}5\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$	25	$2{,}6\cdot10^{-4}$	$-3{,}4\cdot10^{-4}$	$-2\cdot10^{-4}$
10	$2{,}4\cdot10^{-4}$	$-3\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	26	$-4{,}7\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$
11	$-1{,}7\cdot10^{-4}$	$2{,}1\cdot10^{-4}$	$-1{,}5\cdot10^{-4}$	27	$6{,}3\cdot10^{-4}$	$-4\cdot10^{-4}$	$2{,}7\cdot10^{-4}$
12	$1{,}9\cdot10^{-4}$	$-2\cdot10^{-4}$	$-1\cdot10^{-4}$	28	$7{,}5\cdot10^{-4}$	$-3{,}6\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$
13	$2{,}3\cdot10^{-4}$	$-1{,}5\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	29	$4{,}9\cdot10^{-4}$	$-5\cdot10^{-4}$	$-2\cdot10^{-4}$
14	$6\cdot10^{-4}$	$-3\cdot10^{-4}$	$2{,}5\cdot10^{-4}$	30	$-5{,}2\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$2{,}6\cdot10^{-4}$
15	$-5\cdot10^{-4}$	$2{,}6\cdot10^{-4}$	$1{,}8\cdot10^{-4}$	31	$-6\cdot10^{-4}$	$2{,}7\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$
16	$4{,}5\cdot10^{-4}$	$-2\cdot10^{-4}$	$1{,}2\cdot10^{-4}$	32	$4{,}3\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$-1\cdot10^{-4}$

1. *Определяем величину относительного сдвига* γ_{xy}.

В рассматриваемом случае угол $\alpha_r = 45°$ положителен, так как он отсчитывается от оси Ox к направлению $\vec{r}$ в сторону оси Oy. Поэтому из (1.23) получаем

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_r - \varepsilon_x - \varepsilon_y,$$

откуда после подстановки численных значений находим

$$\gamma_{xy} = -2\cdot 0{,}000300 + 0{,}000200 - 0{,}000100 = -0{,}000500.$$

2. *Вычисляем компоненты тензора напряжений.*

Модуль упругости при сдвиге G согласно (1.10)

$$G = \frac{2\cdot 10^5}{2(1+0{,}3)} = 7{,}692\cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Используя выражения (2.14), определяем величины напряжений:

$$\sigma_x = \frac{2\cdot 10^5}{1-0{,}09}\left(-2\cdot 10^{-4} + 0{,}3\cdot 1\cdot 10^{-4}\right) = -37{,}36 \text{ (МПа)};$$

$$\sigma_y = \frac{2\cdot 10^5}{1-0,09}\left(1\cdot 10^{-4} + 0,3\cdot(-2)\cdot 10^{-4}\right) = 8,79\ (\text{МПа});$$

$$\tau_{xy} = -5\cdot 10^{-4}\cdot 7,692\cdot 10^4 = -38,46\ (\text{МПа}).$$

Тензор напряжений

$$\sigma_{ik} = \begin{vmatrix} -37,36 & -38,46 & 0 \\ -38,46 & 8,79 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Показываем графически, с учетом правила знаков, напряжения, действующие по граням элементарного объема, выделенного в окрестности исследуемой точки (рис. 2.5).

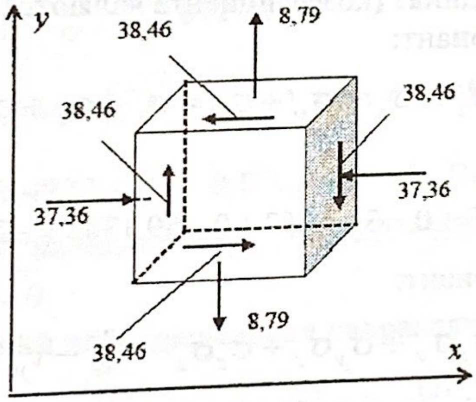

Рис. 2.5

3. *Находим значения главных напряжений.*

В систему уравнений (1.14) относительно направляющих косинусов нормали к главной площадке подставляем значения напряжений:

$$\begin{cases} (-37,36-\sigma)c_{nx} - 38,46c_{ny} + 0\cdot c_{nz} = 0; \\ -38,46c_{nx} + (8,79-\sigma)c_{ny} + 0\cdot c_{nz} = 0; \\ 0\cdot c_{nx} + 0\cdot c_{ny} + (0-\sigma)c_{nz} = 0. \end{cases}$$

Раскрывая определитель матрицы системы, получаем

$$\det\begin{vmatrix} -37,36-\sigma & -38,46 & 0 \\ -38,46 & 8,79-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} =$$

$$= -\sigma \cdot \det\begin{vmatrix} -37,36-\sigma & -38,46 \\ -38,46 & 8,79-\sigma \end{vmatrix} = -\sigma\left(\sigma^2 + 28,57\sigma - 1807,566\right),$$

откуда уравнение для определения значений главных напряжений:

$$\sigma^3 + 28,57\sigma^2 - 1807,566\sigma = 0,$$

решение которого: $\sigma_1 = 30,5662$ МПа; $\sigma_2 = 0$ МПа; $\sigma_3 = -59,1362$ МПа.

Тензор напряжений в главных осях деформаций:

$$\sigma_{ik} = \begin{vmatrix} 30,5662 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -59,1362 \end{vmatrix}.$$

Проверим независимость коэффициентов кубического уравнения от выбора системы координат (коэффициента являются инвариантами):

а) первый инвариант:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

или

$$-37,36 + 8,79 + 0 = 30,5662 + 0 - 59,1362 = -28,57 \text{ – верно;}$$

б) второй инвариант:

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =$$
$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

или

$-37,36 \cdot 8,79 + 8,79 \cdot 0 + 0 \cdot (-37,36) - (-38,46)^2 - 0^2 - 0^2 = -1807,566;$
$30,5662 \cdot 0 + 0 \cdot (-59,1362) + (-59,1362) \cdot 30,5662 = -1807,569$ – верно с точностью до погрешности округления;

в) третий инвариант:

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 0$$

или $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$ – также выполнено.

4. *Определяем ориентацию главных площадок.*

В систему уравнений для определения направляющих косинусов вместо σ последовательно подставляем значения σ_1, σ_2, σ_3.

А. Пусть $\sigma = \sigma_1 = 30,5662$.

Система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} -67{,}9262c_{nx}^{(1)} - 38{,}46c_{ny}^{(1)} + 0 \cdot c_{nz}^{(1)} = 0; \\ -38{,}46c_{nx}^{(1)} - 21{,}7762c_{ny}^{(1)} + 0 \cdot c_{nz}^{(1)} = 0; \\ 0 \cdot c_{nx}^{(1)} + 0 \cdot c_{ny}^{(1)} - 30{,}5662c_{nz}^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $c_{nz}^{(1)} = 0$. Первые два уравнения оказываются линейно зависимыми. Поэтому берем любое из них, например первое, и выражаем $c_{ny}^{(1)}$ через $c_{nx}^{(1)}$:

$$c_{ny}^{(1)} = -\frac{67{,}9262}{38{,}46}c_{nx}^{(1)} = -1{,}7662c_{nx}^{(1)}.$$

Подставляем $c_{nx}^{(1)}$, $c_{ny}^{(1)}$, $c_{nz}^{(1)}$ в (2.4):

$$\left(c_{nx}^{(1)}\right)^2 + \left(1{,}7662c_{nx}^{(1)}\right)^2 + 0^2 = 1, \text{ или } 4{,}1195\left(c_{nx}^{(1)}\right)^2 = 1.$$

Находим $c_{nx}^{(1)} = 0{,}4927; c_{ny}^{(1)} = -0{,}8702; c_{nz}^{(1)} = 0$. Вектор единичной нормали к первой главной площадке – $\vec{n}_1 = (0{,}4927; -0{,}8702; 0)$.

Б. Пусть $\sigma = \sigma_2 = 0$.

Система уравнений для определения направляющих косинусов:

$$\begin{cases} -37{,}36c_{nx}^{(2)} - 38{,}46c_{ny}^{(2)} + 0 \cdot c_{nz}^{(2)} = 0; \\ -38{,}46c_{nx}^{(1)} + 8{,}79c_{ny}^{(2)} + 0 \cdot c_{nz}^{(2)} = 0; \\ 0 \cdot c_{nx}^{(2)} + 0 \cdot c_{ny}^{(2)} + 0 \cdot c_{nz}^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Два первых уравнения линейно независимы. Решая их совместно, находим $c_{nx}^{(2)} = c_{ny}^{(2)} = 0$.

Третье уравнение системы выполняется тождественно. Поэтому из (2.4) $c_{nz}^{(2)} = 1$. Вектор единичной нормали ко второй главной площадке – $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.

В. Пусть $\sigma = \sigma_3 = -59{,}1362$.

Выполнив аналогичные вычисления, находим вектор единичной нормали к третьей главной площадке $\vec{n}_3 = (0{,}8702; 0{,}4927; 0)$.

Г. Делаем проверку ортогональности главных площадок.

Векторы ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Составляем попарно скалярные произведения:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (0,4927; -0,8702; 0) \cdot (0; 0; 1) =$$
$$= 0,4927 \cdot 0 + (-0,8702) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0;$$
$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = (0; 0; 1) \cdot (0,8702; 0,4927; 0) =$$
$$= 0,8702 \cdot 0 + 0,4927 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0;$$
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = (0,4927; -0,8702; 0) \cdot (0,8702; 0,4927; 0) =$$
$$= 0,4927 \cdot 0,8702 + (-0,8702) \cdot 0,4927 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Площадки взаимно ортогональны.

Д. Изображаем графически ориентацию главных площадок.

Вторая главная площадка ортогональна оси Oz, поэтому рассмотрим проекции первой и третьей главных площадок на плоскость xOy.

Вначале изображаем проекцию элементарного объема на плоскость xOy (рис. 2.6) и на его сторонах показываем напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}. Строим векторы $\vec{n}_1$, $\vec{n}_3$, строим площадки, им перпендикулярные, – первая и третья главные площадки, показываем действующие на них главные напряжения σ_1, σ_3.

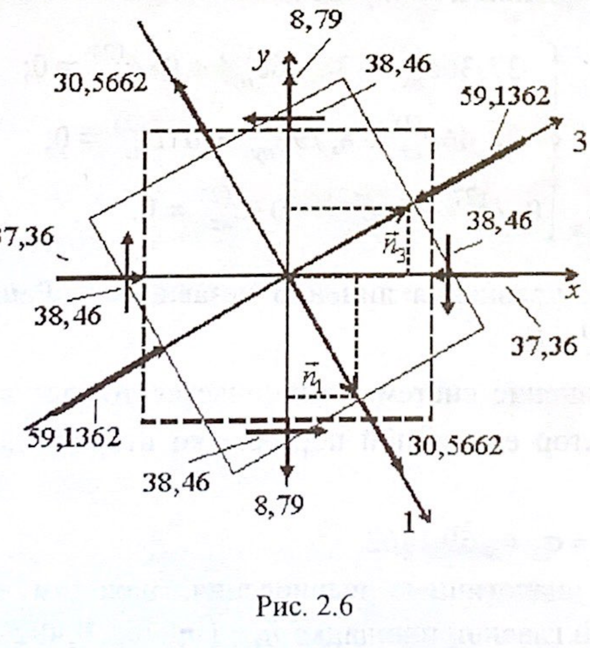

Рис. 2.6

5. *Определяем экстремальные значения касательных напряжений.*

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{0 + 59,1352}{2} = 29,5676 \text{ МПа};$$

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{30,5662 + 59,1362}{2} = 44,8512 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{30,5662 - 0}{2} = 15,2831 \text{ МПа}.$$

На рис. 2.7 показана ориентация площадок, на которых действуют максимальные касательные напряжения τ_{max}.

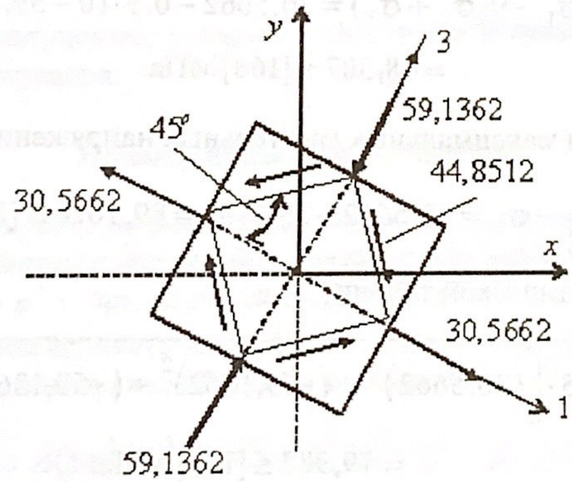

Рис. 2.7

6. *Определяем главные деформации.*

По закону Гука определяем значения главных деформаций:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left[30,5662 + 0,3(0 - 59,1362)\right] = 6,423 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left[0 + 0,3(30,5662 - 59,1362)\right] = -4,286 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 10^5}\left[-59{,}1362 + 0{,}3\left(30{,}5662 + 0\right)\right] = -24{,}983\cdot 10^{-5}.$$

7. ***Проверяем выполнения условия прочности.***

1. По теории наибольших нормальных напряжений

$$\sigma^{(\mathrm{I})}_{\text{расч}} = 59{,}1363 \le [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

2. По теории наибольших относительных удлинений

$$\sigma^{(\mathrm{II})}_{\text{расч}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 30{,}5662 - 0{,}3\cdot(0 - 59{,}1362) =$$

$$= 48{,}307 \le [160] \text{МПа}.$$

3. По теории максимальных касательных напряжений

$$\sigma^{(\mathrm{III})}_{\text{расч}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 30{,}5662 + 59{,}1362 = 89{,}7024 \le [160] \text{ Мпа}.$$

4. По энергетической теории

$$\sigma^{(\mathrm{IV})}_{\text{расч}} = \sqrt{0{,}5\cdot\left[\left(30{,}5662\right)^2 + \left(-59{,}1362\right)^2 + \left(-59{,}1362 - 30{,}5662\right)^2\right]} =$$

$$= 79{,}987 \le [160] \text{ МПа}.$$