ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЗАДАЧА КОШИ

Методические указания к лабораторным работам для студентов бакалавриата направления 21.03.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра информатики и компьютерных технологий

ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЗАДАЧА КОШИ

Методические указания к лабораторным работам для студентов бакалавриата направления 21.03.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2016

УДК 681.142.2 (073)

ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ. Решение дифференциальных уравнений. Задача Коши: Методические указания к лабораторным работам / Санкт-Петербургский горный университет. Сост. *О.Г. Быкова*. СПб, 2016. 50 с.

Методические указания предназначены для оказания помощи студенту при решении задач курса. Изложены теоретические сведения и на примерах рассмотрены решения задач. Приведены варианты заданий по каждой теме.

Методические указания предназначены для студентов бакалавриата направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело».

Научный редактор доц. *А.Б. Маховиков*

ВВЕДЕНИЕ

В данных методических указаниях содержатся материалы по решению задач по темам «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка» [2, 6], «Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка» [7], «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Задача Коши» [5, 8]. Решения выполняются в пакетах Microsoft Excel [4] и MathCAD [3, 9].

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. МЕТОД ЭЙЛЕРА

При изучении интегрального исчисления функций одного переменного ставилась задача отыскания неизвестной функции по ее производной. Т.е. было известно, что $y'(x) = f(x)$, где $y(x)$ неизвестная функция от x, а $f(x)$ – заданная функция. Это простейшее дифференциальное уравнение. Для его решения, т.е. отыскания неизвестной функции $y(x)$, нужно проинтегрировать данную функцию $f(x)$, т.е. $y(x) = \int f(x)dx$. Чаще приходится иметь дело с уравнениями более сложного вида: в этих уравнениях, помимо производной и независимой переменной, присутствует сама неизвестная функция $y(x)$.

Определение: *дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее неизвестную переменную, неизвестную функцию и ее производную*. Такие уравнения называют обыкновенными дифференциальными уравнениями [6]. Многие научные и технические проблемы приводят к интегрированию дифференциальных уравнений. Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов и многие другие. Поэтому решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди задач физики, химии и техники.

Дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция зависит от нескольких аргументов, называются уравнениями в частных производных. **Решением обыкновенного дифференциального уравнения называется всякая функция, обращающая уравнение в тождество при подстановке в него этой функции и ее производной**.

В математике функция задается одним из трех возможных вариантов:

- ✓ Аналитической зависимостью $u(x)=g(x)$, где $g(x)$ – известная функция;
- ✓ Таблицей значений функции $u(x)$ в отдельных точках, т.е. $u(x_1), u(x_1), \ldots u(x_n)$;
- ✓ Графически.

Получить аналитическое решение не всегда возможно. Графическое решение можно получить на основе аналитического. Остается вариант получения таблицы значений функции в отдельных точках. При решении конкретных задач нас будут интересовать частные решения, т.е. решения, удовлетворяющие начальным условиям $y(x)\big|_{x=x_0} = y_0$ - **задача Коши**[1]. Задача Коши (задача с начальными условиями) есть задача о нахождении частного решения, которое удовлетворяет начальным условиям. Если известно общее решение, то для задачи Коши постоянные, входящие в решение, находят из начальных условий [5].

В одном из разделов высшей математики изучаются методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений простейших видов. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на точные, приближенные и численные. К <u>точным</u> относятся методы, позволяющие выразить решение дифференциального уравнения через элементарные функции. Эти методы изучаются в курсах высшей математики. Они решают уравнения частных типов: с разделяющимися переменными, однородные, линейные,... Однако, дифференциальные уравнения, которые можно проинтегрировать известными методами, в практике встречаются не-

[1] Огюсте́н Луи́ Коши́ — великий французский математик и механик, XVIII в.

часто. В связи с этим особое значение приобретают методы получения приближенного решения дифференциальных уравнений.

Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на два класса: один из них дает приближенное решение в виде аналитического выражения, другой – в виде таблицы численных значений. Первый класс методов называют аналитическим, второй – численным. Мы будем заниматься численными методами.

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений – это алгоритмы вычисления приближенных значений искомого решения для отдельных значений аргумента x_i. Решение при этом получается в табличном виде. Эти методы применимы к очень широким классам уравнений.

Метод ЭЙЛЕРА[2]

Пусть требуется решить задачу Коши: найти решение дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y)$ при начальном условии $y(x) = y_0$ при $x = x_0$ или $y(x_0) = y_0$.При численном решении уравнения задача ставится так: найти в точках $x_1, x_2, \ldots x_n$ приближения y_n точного решения $y(x_n)$. При численном решении обыкновенного дифференциального уравнения решением является не непрерывная функция, а набор дискретных значений. Разность между значениями аргумента x называют шагом сетки и чаще всего принимают постоянным, обозначая h. Метод Эйлера заключается в том, что производная y' на основании ее определения заменяется отношением приращений $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y)$. Тогда и $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f(x_0, y_0)$. Это соотношение можно записать следующим образом: $\frac{y - y_0}{x - x_0} = f(x_0, y_0)$. Преобразуя это соотношение, получаем $y = y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0, y_0)$, т.е. получаем выражение для определе-

---

[2] Эйлер Леонард XVIII в., математик, механик и физик. Метод был предложен Эйлером и носит его имя, встречается под названием «схема ломаных».

ния значения решения дифференциального уравнения в точке, соседней к начальной точке. Т.к. x-x_0=h, соотношение можем переписать $y = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$. Это и есть расчетная формула метода Эйлера. Повторяя такие же рассуждения для следующих точек, получаем $y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$. (1)

Геометрически это означает, что искомая интегральная кривая y=$y(x)$ заменяется прямолинейным отрезком, выходящим из начальной точки с угловым коэффициентом $f(x_0,y_0)$. И в качестве приближения искомой интегральной кривой получаем ломаную линию с вершинами в точках (x_n, y_n), поэтому его еще иногда называют методом ломаных. Метод Эйлера позволяет решать не только дифференциальные уравнения первого порядка, подобные рассмотренному выше. Метод можно обобщить для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка и дифференциальных уравнений более высокого порядка [8].

Задание 1. *С помощью метода Эйлера получить приближенное решение уравнения* $y' = y + x^2$, *удовлетворяющего условию* $y(0)=1$ *на промежутке изменения* $x \in [0,1]$. *Решить данное уравнение аналитически и сравнить точное и приближенное решения.*

Решение. В Microsoft Excel в столбце А записываем номера точек, в которых будет определяться решение. В соседнем столбце (В) записываем соответствующие значения аргумента x. В столбце С в первой строке располагаем начальное значение функции y. В следующей строке столбца С записываем формулу вычисления функции по методу Эйлера, которую можно увидеть в строке формул на рис. 1.

Формулу копируем на диапазон значений аргумента С4:С13 (рис. 1).

Числа в столбце С являются численным решением задачи.

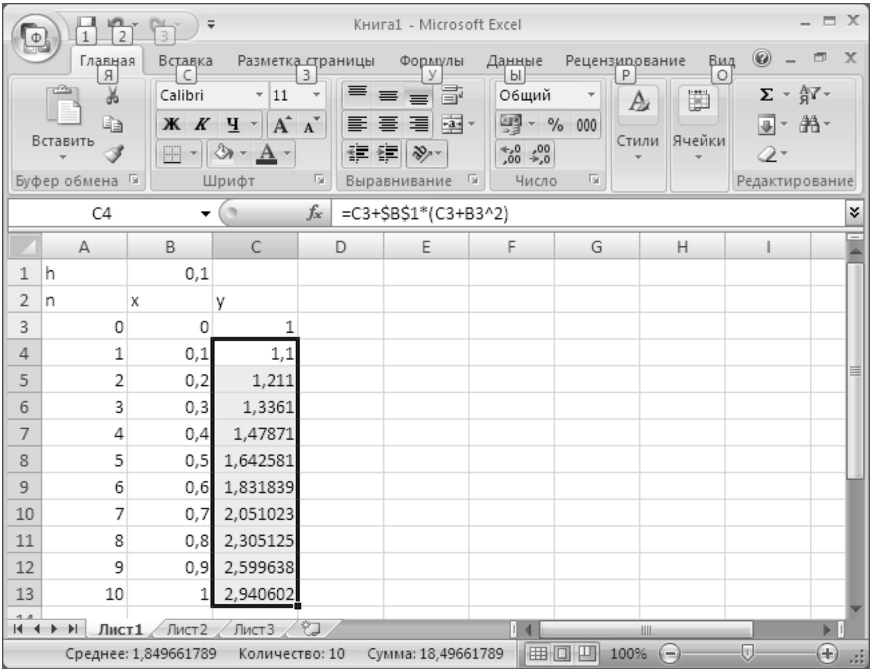
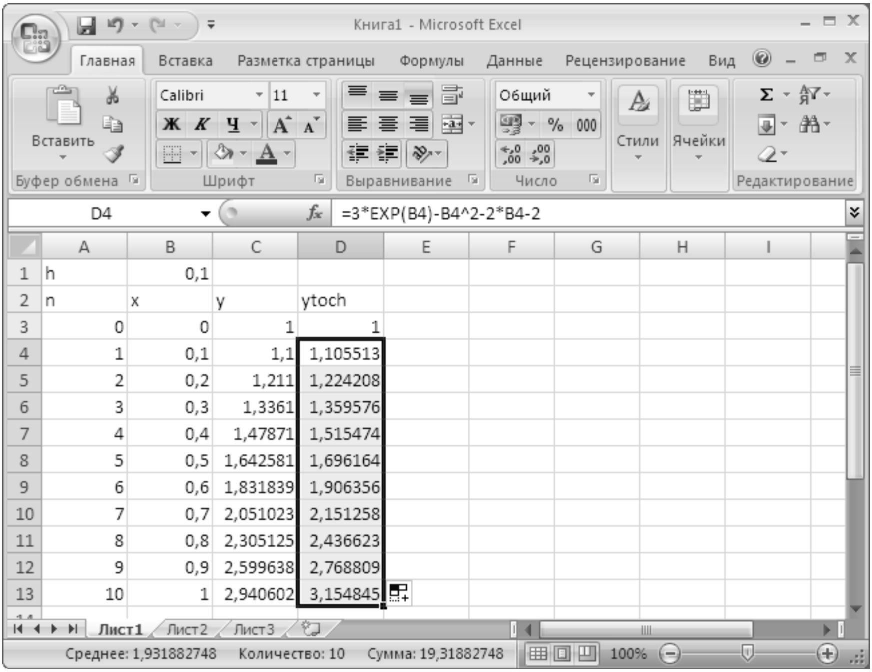


Рис. 1. Решение дифференциального уравнения по методу Эйлера

Уравнение задания 1 имеет аналитическое решение $y(x) = 3 \cdot e^{x} - x^{2} - 2x - 2$. Для сопоставления вычислим точное значение решения дифференциального уравнения (*ytoch*) в ячейках D4:D13 при тех же значениях аргумента *x*, в которых получили приближенное значение (рис. 2).

Представим графически полученные численное (диапазон ячеек C4:C13) и аналитическое решения (диапазон ячеек D4:D13) (рис. 3).



	A	B	C	D
1	h	0,1		
2	n	x	y	ytoch
3	0	0	1	1
4	1	0,1	1,1	1,105513
5	2	0,2	1,211	1,224208
6	3	0,3	1,3361	1,359576
7	4	0,4	1,47871	1,515474
8	5	0,5	1,642581	1,696164
9	6	0,6	1,831839	1,906356
10	7	0,7	2,051023	2,151258
11	8	0,8	2,305125	2,436623
12	9	0,9	2,599638	2,768809
13	10	1	2,940602	3,154845

Рис. 2. Точное решение дифференциального уравнения

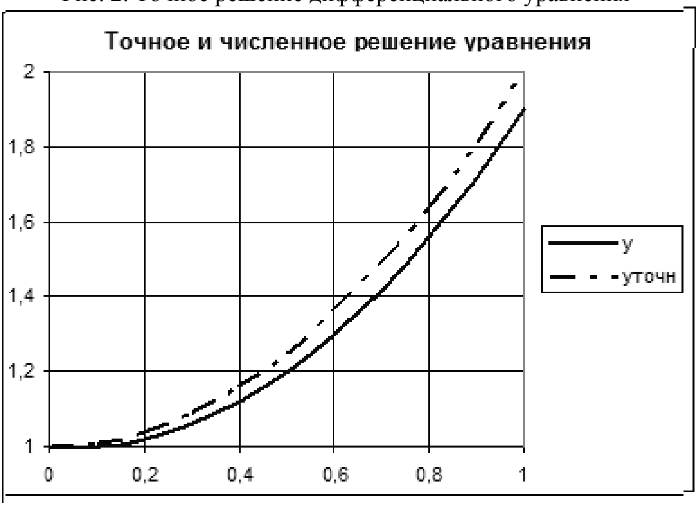


Рис. 3. Сопоставление приближенного (у) и точного (уточн) решений

В заданиях к разделу предложены дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, т.е. уравнения того типа, которые решаются аналитически. Например, найти решение уравнения $xy' + y = 0$ с начальным условием *y(1)=2*. Группируем слева от знака равенства члены, содержащие *y*, справа – *x*. Это уравнение можно проинтегрировать, т.е. $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$. Получается $\ln y = -\ln x + C$. Выражаем явно неизвестную функцию *y* через *x* $y = \frac{C}{x}$. Неизвестная постоянная *C* определяется с использованием начального условия, т.е. $2 = \frac{C}{1}$. Откуда имеем *C*=2. И точное решение: $y = \frac{2}{x}$.

В пакете MathCAD имеется несколько функций для решения обыкновенных дифференциальных уравнений [9]. Одна из них - функция для решения обыкновенных дифференциальных уравнений – ***odesolve***. Она имеет три аргумента: *x* – аргумент искомой функции *f(x), b* – конец интервала интегрирования, *n* – число шагов интегрирования. Решение с использованием этой функции происходит по следующей схеме:

- Вводится слово *given*, указывающее на то, что далее следует решаемое дифференциальное уравнение и его начальное условие;
- Вводится решаемое дифференциальное уравнение. Для записи знака производной используется комбинация клавиш Ctrl и F7. Возможно написание уравнения с использованием дифференциала. Тогда знак дифференциала выбирается с палитры «Вычисления» (Calculus). Далее вводится начальное условие. При записи уравнения, равно как и начального условия ставится «жирный» знак равенства с палитры «Булева алгебра» (Boolean);
- Вводится имя встроенной функции *odesolve(x,b,n)* с присвоением ей уникального имени и с численными значениями *b* и *n*.

• Задаются значения аргумента, в которых нужно узнать решение. Для вывода результата работы функции *odesolve(x,b,n)* набирается имя и ставится знак равенства.

Полученное решение можно вывести в виде таблицы. Для этого присвоить переменной *x* значения, соответствующие желаемому диапазону изменения функции *f(x),* ввести имя, присвоенное функции *odesolve*, нажать клавишу «равно» для получения решения в виде таблицы (рис. 4). Решение можно также вывести графически, что более наглядно.

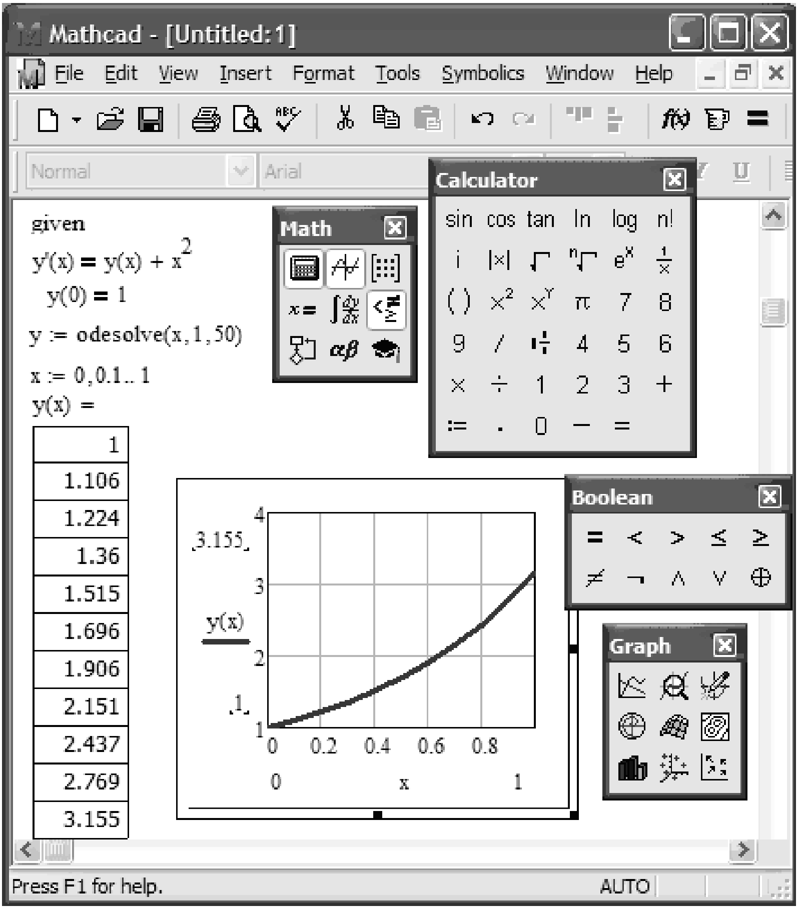


Рис. 4. Решение дифференциального уравнения функцией *odesolve*

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1

Решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $y'(x) = f(x, y(x))$. Найти точное и численное решения уравнения на заданном промежутке изменения аргумента при заданном начальном условии. Численное решение уравнения найти методом Эйлера и оценить погрешность. Решение выполнить в Microsoft Excel. Решить уравнение в пакете Mathcad, используя функцию *odesolve*.

В отчете привести:

- точное (аналитическое) решение уравнения;
- формулу Эйлера численного решения уравнения;
- численное решение по формуле Эйлера и значения точного решения при этих же значениях аргумента *x* в Microsoft Excel;
- графики точного и численного решений Microsoft Excel;
- оценку максимальной погрешности численного решения;
- описание функции, выполняющей решения обыкновенного дифференциального уравнения *odesolve*;
- решение, полученное в пакете Mathcad с использованием функции *odesolv*e.

Номер варианта	**Уравнение**	**Промежуток интегрирования**	**Начальное условие**
1.	$y' + 3 \cdot x \cdot y = 0$	$x \in [-1, 1.2]$	$y(-1) = 1{,}9$
2.	$y' = \dfrac{\sqrt{y}}{2x^2}$	$x \in [1.25, 3.5]$	$y(1.25) = 1.8$
3.	$y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$	$x \in [0.8, 3.2]$	$y(0.8) = 2$
4.	$y' = \dfrac{y}{x}$	$x \in [1.5, 2.9]$	$y(1.5) = 1.4$
5.	$y' = 2.5 \cdot \dfrac{x}{y+1}$	$x \in [1, 2.85]$	$y(1) = 1.93$

6.	$x \cdot y \cdot y' - 3.3 = 0$	x∈[1.3, 3.5]	$y(1.3) = 2{,}5$
7.	$y' = -\dfrac{x}{2y}$	x∈[0.7, 2.9]	$y(0.7) = 1.49$
8.	$y' = \dfrac{\sqrt{y + 0{,}56}}{x}$	x∈[0.8, 2.5]	$y(0.8) = 1.5$
9.	$(x^2 - 1) \cdot y' - 2.8xy^2 = 0$	x∈[1.7, 2.5]	$y(1.7) = 1.85$
10.	$(x^2 - 1) \cdot y' + 1.9xy^2 = 0$	x∈[0.8, 1.5]	$y(0.8) = 1.5$

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. МЕТОД РУНГЕ-КУТТА[3]

Погрешность метода Эйлера велика, поэтому на практике чаще используется метод Рунге-Кутта. Существуют формулы Рунге-Кутта нескольких видов [7]. Мы будем производить расчеты формулами четвертого порядка, которые имеют вид:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6} \qquad (2),$$

где $k_1 = h \cdot f(x_k, y_k)$, $k_2 = h \cdot f\left(x_k + \dfrac{h}{2}, y_k + \dfrac{k_1}{2}\right)$, (3)

$$k_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}\right),\ k_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3).$$

В формулах (2, 3) использованы обозначения: h – шаг изменения аргумента x, $f(x,y)$ – правая часть решаемого дифференциального уравнения. При вычислении значения функции в точке x_{k+1} (y_{k+1}) последовательно вычисляются значения вспомогательных коэффициентов k_1, k_2, k_3, k_4.

Метод Рунге-Кутта является более трудоемким, чем метод Эйлера. На каждом шаге вычислительного процесса требуется четырехкратное вычисление правой части дифференциального уравне-

---

[3] Рунге и Кутта – немецкие математики XIX в.

ния. Тем не менее, этот метод является самым распространенным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задание 2. *С помощью метода Рунге-Кутта получить приближенное решение уравнения* $y' = 1 + 0.8 \cdot y \cdot \sin x$, *удовлетворяющего условию y(0)=1.6 на промежутке изменения* $x \in [0,1]$.

Решение в табличном процессоре Microsoft Excel

В столбец А заносим значения аргумента *x*, при которых вычисляется функция *y(x)* (рис. 5).

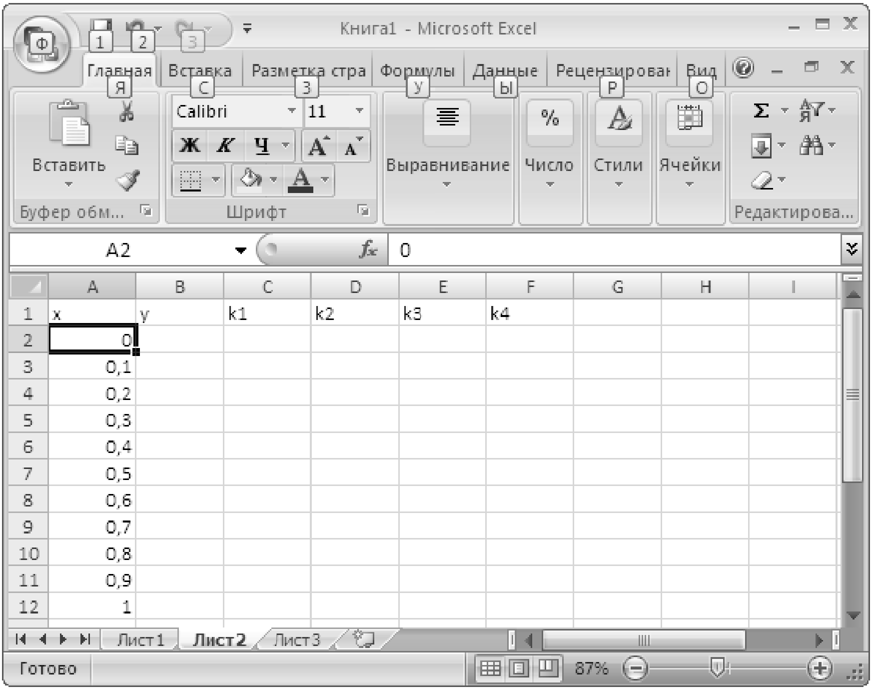


Рис. 5. Первый этап вычисления решения методом Рунге-Кутта

В соседнем столбце (В) второй строки около начального значения аргумента *x* записываем заданное значение функции *y* (рис. 6). В соседних четырех столбцах (C-F) производим вычисление вспомогательных коэффициентов k_1, k_2, k_3, k_4 по формулам 3 (рис. 6).

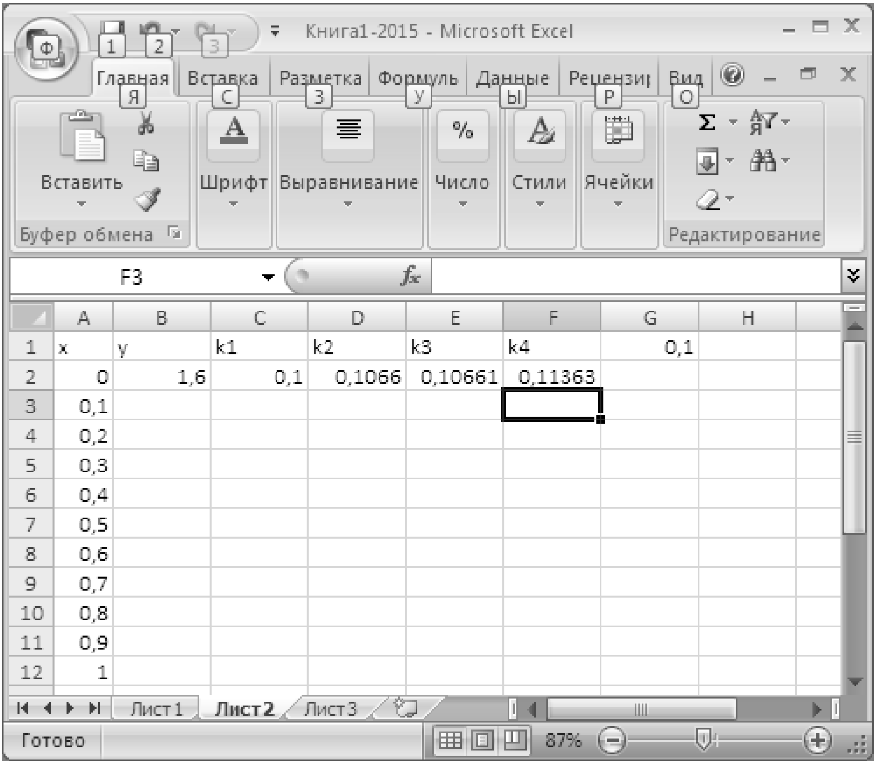
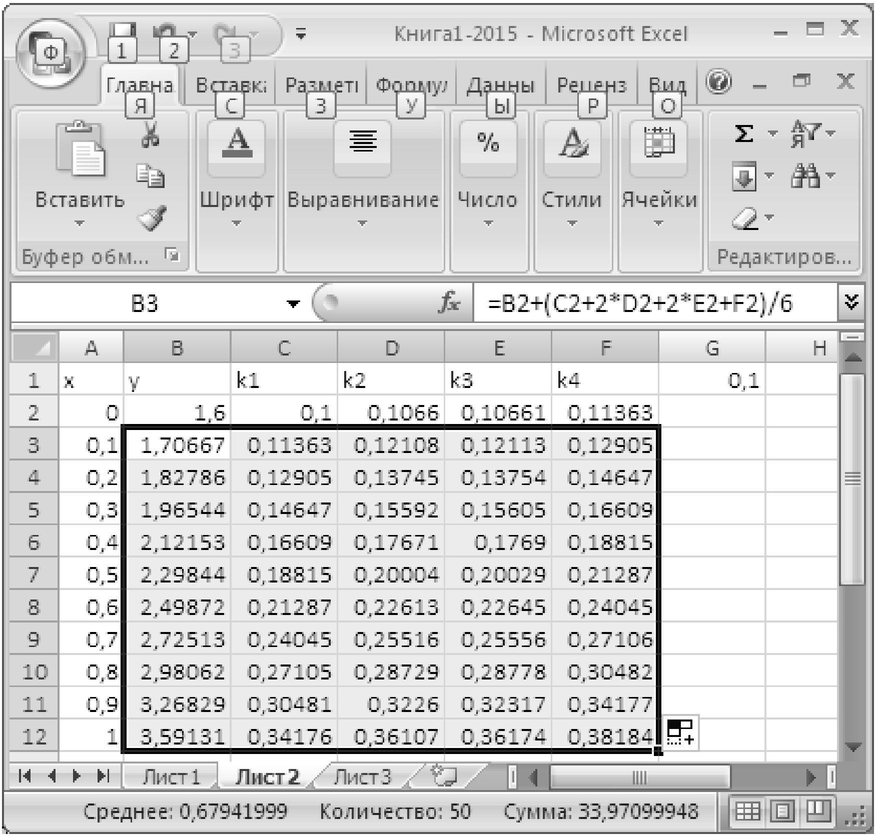


Рис. 6. Вычисление коэффициентов по формулам (3)

В ячейку G1 заносим значение шага изменения аргумента, который входит во все формулы. На основе вычисленных значений вспомогательных коэффициентов по формуле (2) определяем значение функции при значении аргумента x=0.1 точке. Далее выделяем диапазон ячеек с формулами C2:F2, и производим копирование на диапазон изменения аргумента x до строки 12 (рис. 7).



B3 =B2+(C2+2*D2+2*E2+F2)/6

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	k1	k2	k3	k4	0,1
2	0	1,6	0,1	0,1066	0,10661	0,11363	
3	0,1	1,70667	0,11363	0,12108	0,12113	0,12905	
4	0,2	1,82786	0,12905	0,13745	0,13754	0,14647	
5	0,3	1,96544	0,14647	0,15592	0,15605	0,16609	
6	0,4	2,12153	0,16609	0,17671	0,1769	0,18815	
7	0,5	2,29844	0,18815	0,20004	0,20029	0,21287	
8	0,6	2,49872	0,21287	0,22613	0,22645	0,24045	
9	0,7	2,72513	0,24045	0,25516	0,25556	0,27106	
10	0,8	2,98062	0,27105	0,28729	0,28778	0,30482	
11	0,9	3,26829	0,30481	0,3226	0,32317	0,34177	
12	1	3,59131	0,34176	0,36107	0,36174	0,38184	

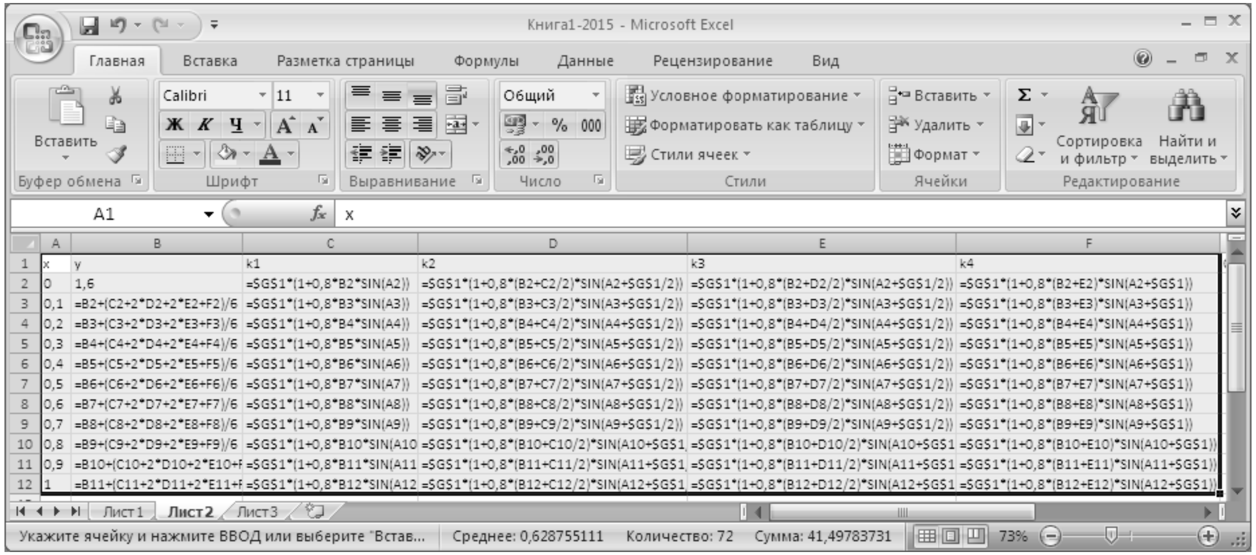
Среднее: 0,67941999 Количество: 50 Сумма: 33,97099948

Рис. 7. Решение методом Рунге-Кутта

На рис. 8 представлен фрагмент таблицы Microsoft Excel с решением в режиме отображения формул.

Полученное решение можно представить графически. На основе данных в столбцах A и B строится диаграмма категории – «точечная».

Результат построения представлен на рис. 9.



	A	B	C	D	E	F
1	x	y	k1	k2	k3	k4
2	0	1,6	=$G$1*(1+0,8*B2*SIN(A2))	=$G$1*(1+0,8*(B2+C2/2)*SIN(A2+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B2+D2/2)*SIN(A2+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B2+E2)*SIN(A2+$G$1))
3	0,1	=B2+(C2+2*D2+2*E2+F2)/6	=$G$1*(1+0,8*B3*SIN(A3))	=$G$1*(1+0,8*(B3+C3/2)*SIN(A3+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B3+D3/2)*SIN(A3+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B3+E3)*SIN(A3+$G$1))
4	0,2	=B3+(C3+2*D3+2*E3+F3)/6	=$G$1*(1+0,8*B4*SIN(A4))	=$G$1*(1+0,8*(B4+C4/2)*SIN(A4+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B4+D4/2)*SIN(A4+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B4+E4)*SIN(A4+$G$1))
5	0,3	=B4+(C4+2*D4+2*E4+F4)/6	=$G$1*(1+0,8*B5*SIN(A5))	=$G$1*(1+0,8*(B5+C5/2)*SIN(A5+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B5+D5/2)*SIN(A5+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B5+E5)*SIN(A5+$G$1))
6	0,4	=B5+(C5+2*D5+2*E5+F5)/6	=$G$1*(1+0,8*B6*SIN(A6))	=$G$1*(1+0,8*(B6+C6/2)*SIN(A6+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B6+D6/2)*SIN(A6+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B6+E6)*SIN(A6+$G$1))
7	0,5	=B6+(C6+2*D6+2*E6+F6)/6	=$G$1*(1+0,8*B7*SIN(A7))	=$G$1*(1+0,8*(B7+C7/2)*SIN(A7+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B7+D7/2)*SIN(A7+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B7+E7)*SIN(A7+$G$1))
8	0,6	=B7+(C7+2*D7+2*E7+F7)/6	=$G$1*(1+0,8*B8*SIN(A8))	=$G$1*(1+0,8*(B8+C8/2)*SIN(A8+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B8+D8/2)*SIN(A8+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B8+E8)*SIN(A8+$G$1))
9	0,7	=B8+(C8+2*D8+2*E8+F8)/6	=$G$1*(1+0,8*B9*SIN(A9))	=$G$1*(1+0,8*(B9+C9/2)*SIN(A9+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B9+D9/2)*SIN(A9+$G$1/2))	=$G$1*(1+0,8*(B9+E9)*SIN(A9+$G$1))
10	0,8	=B9+(C9+2*D9+2*E9+F9)/6	=$G$1*(1+0,8*B10*SIN(A10	=$G$1*(1+0,8*(B10+C10/2)*SIN(A10+$G$1	=$G$1*(1+0,8*(B10+D10/2)*SIN(A10+$G$1	=$G$1*(1+0,8*(B10+E10)*SIN(A10+$G$1))
11	0,9	=B10+(C10+2*D10+2*E10+F	=$G$1*(1+0,8*B11*SIN(A11	=$G$1*(1+0,8*(B11+C11/2)*SIN(A11+$G$1	=$G$1*(1+0,8*(B11+D11/2)*SIN(A11+$G$1	=$G$1*(1+0,8*(B11+E11)*SIN(A11+$G$1))
12	1	=B11+(C11+2*D11+2*E11+F	=$G$1*(1+0,8*B12*SIN(A12	=$G$1*(1+0,8*(B12+C12/2)*SIN(A12+$G$1	=$G$1*(1+0,8*(B12+D12/2)*SIN(A12+$G$1	=$G$1*(1+0,8*(B12+E12)*SIN(A12+$G$1))

Рис. 8. Таблица с вычислениями в режиме отображения формул

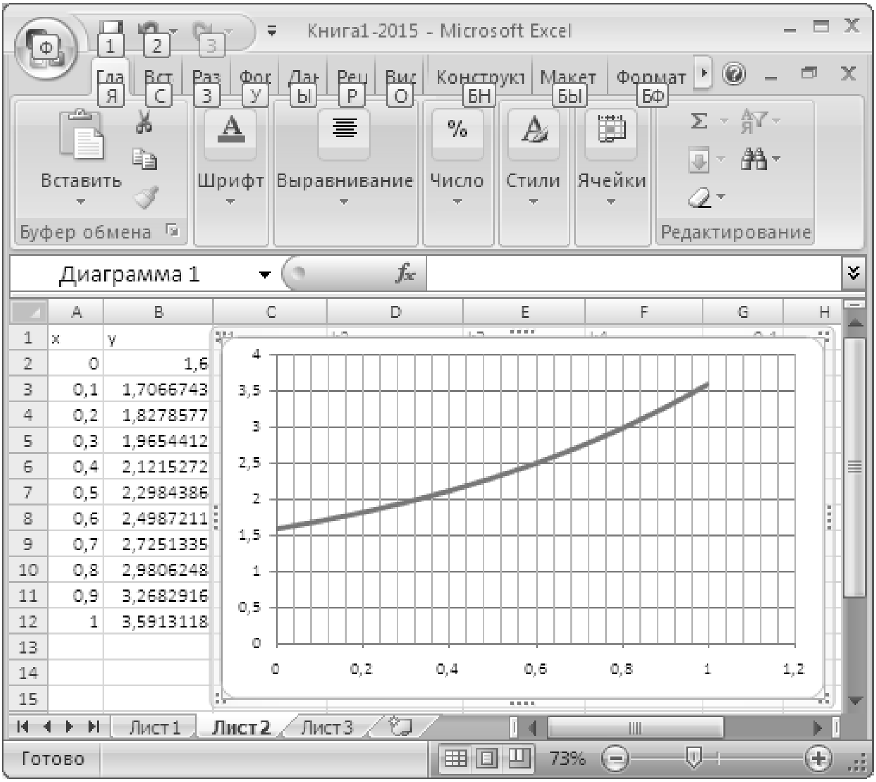


Рис. 9. Графическое представление решения

Решение в пакете MathCAD

В пакете MathCAD кроме функции *odesolve* имеется функция ***rkfixed*** решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта. Она имеет пять аргументов:

- Имя переменной с начальным условием;
- Левый конец промежутка интегрирования;
- Правый конец промежутка интегрирования;
- Число точек деления промежутка интегрирования;

* Имя функции, где описана правая часть дифференциального уравнения.

На рис. 10 приведено решение задания 2 с использованием функции *rkfixed*.

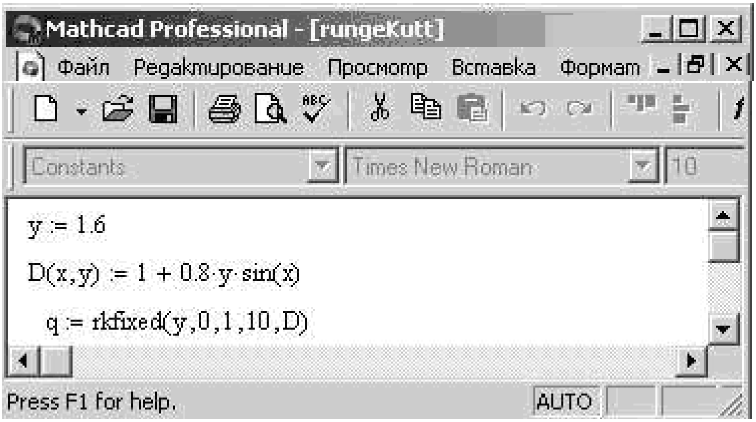


Рис. 10. Задание исходных данных и решение дифференциального уравнения

Результат вычислений заносится пакетом в матрицу, где первый столбец – значения аргумента *x*, второй – значения функции при этих значениях аргумента (рис. 11).

Полученное решение может быть представлено графически средствами пакета (рис. 12). Для этого нужно построить график зависимости решения от аргумента x, т.е. показать зависимость величин, расположенных во втором столбце, от значений аргумента, расположенных в первом столбце. Так как отсчет в MathCAD начинается с нуля, нужно по оси абсцисс отложить значения нулевого столбца, по оси ординат – первого. Выделение *n*-го столбца матрицы *M* в MathCAD производится оператором $M^{<n>}$. Это достигается с помощью кнопки  панели «Матрицы» или одновременным нажатием клавиш *M* Ctrl ^ *n*. Решение можно показать графически, т.к. решение является матрицей, где в нулевом столбце – значения аргумента, в первом столбце – значения функции (рис. 12).

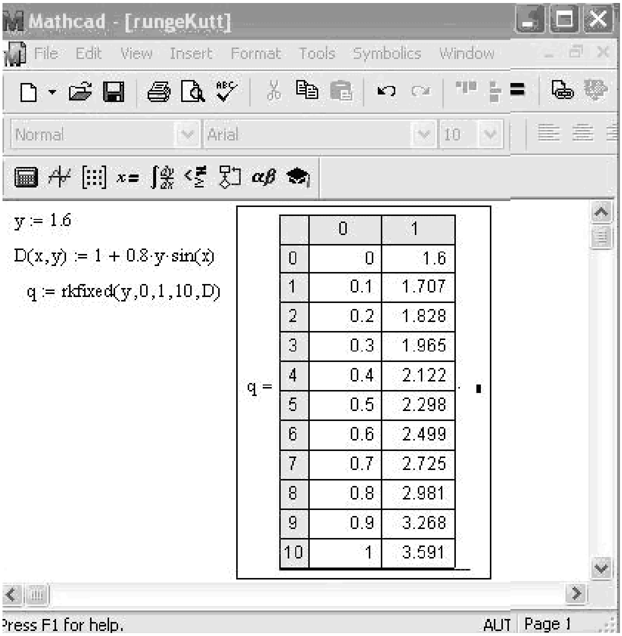


Рис. 11. Решение уравнения с использованием функции *rkfixed*

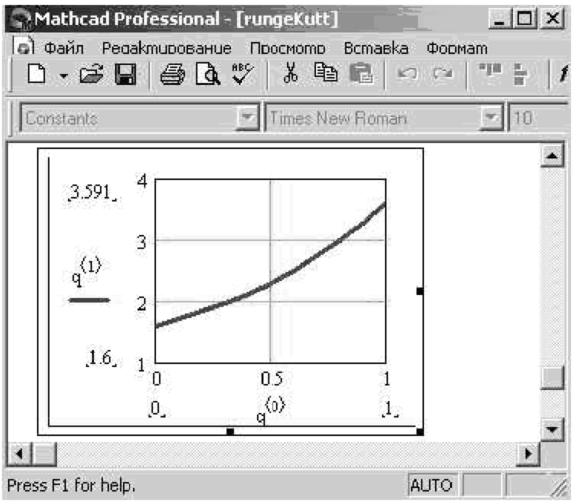


Рис. 12. Графическое представление решения

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2

С помощью метода Рунге-Кутта получить численное решение обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$ на промежутке изменения $x \in [a,\ b]$, удовлетворяющее условию $y(a)=y_0$. Сравнить с решением уравнения методом Эйлера. Решить данное уравнение в пакетах Microsoft Excel и MathCAD.

В отчете привести:

- формулу Рунге-Кутта решения уравнения;
- решение по формуле Рунге-Кутта в Microsoft Excel в табличной и графической форме;
- решение по формуле Эйлера в Microsoft Excel в табличной и графической форме;
- максимальную разность результатов;
- описание функции решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта *rkfixed*;
- решение, полученное в пакете Mathcad с использованием функций *rkfixed и odesolve*;
- сравнить решения, полученные разными функциями.

Вариант	**Уравнение**	**Начальное условие**	**Промежуток интегрирования**
1	$y' = \cos(x+y) + \dfrac{(x-y)^3}{2}$	$y(1)$=0.28	$x \in [1, 2.96]$
2	$y' = y\sin x - \cos x \sin x$	$y(0)$=0,367	$x \in [0; 1]$
3	$y' = 1 + 1{,}2y\sin x - 1{,}5 \cdot y^2$	$y(0{,}1)$=-0,8	$x \in [0{,}1; 2.4]$
4	$y' = x + \cos\dfrac{y}{e}$	$y(1.4)$=2.5	$x \in [1.4, 2.7]$
5	$y' = x + \sin\dfrac{y}{\sqrt{1.3}}$	$y(0.1)$=0.8	$x \in [0.1, 1.8]$
6	$y' = \dfrac{\cos y}{x+2} + e^{-y^2}$	$y(1)$=0.84	$x \in [1, 2.6]$.

7	$y' = \cos\left(4x + y^2\right) + 2ctg\left(x - y\right)$`	$y(0)$=-0,8	$x \in [0; 2.3]$
8	$y' = \frac{\cos x}{x+1} - 0{,}5 \cdot y^2 + \ln\left(x \cdot y\right)$	y(3)=1,5	$x \in [3, 3.6]$
9	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$	y(0.5)=0.6	$x \in [0.5, 2]$
10	$\frac{y'}{6.71} = x + \cos 2\frac{y}{\pi}$	$y(1.48)$=2.9	$x \in [1.4, 2.9]$

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. МЕТОД ЭЙЛЕРА

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, содержащих несколько неизвестных функций и их производные, причем в каждое из уравнений входит хотя бы одна производная. Общий вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots. y_n\right) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots. y_n\right) \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1, y_2, \ldots. y_n\right) \end{cases} \qquad (4)$$

где $y_1, y_2, y_3, \ldots. y_n$ – неизвестные функции от независимой переменной x, подлежащие определению, а $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ – известные функции от $x, y_1, y_2, \ldots y_n$, заданные и непрерывные в некоторой области. Число n называется порядком системы.

Совокупность *n* функций

$$y_1 = \varphi_1\left(x\right), y_2 = \varphi_2\left(x\right), \cdots y_n = \varphi_n\left(x\right), \qquad \mathbf{(5)}$$

определенных в интервале (*a,b*), называется решением системы в интервале (*a,b*), если функции (5) обращают уравнения систе-

мы (1) в тождества, справедливые при всех значениях *x* из промежутка (*a,b*).

Задача нахождения решения $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \cdots y_n = y_n(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y_1 = y_1^0(x), y_2 = y_2^0(x), \cdots y_n = y_n^0(x)\, при\ x = x_0$,

где $x_0, y_1^0(x), y_2^0(x), \cdots, y_n^0(x)$ - заданные числа (начальные данные) называется задачей Коши.

Математическая модель «хищник-жертва» описывает взаимодействие особей разных популяций, живущих в одной местности. Эта модель описывает взаимосвязь количества животных каждой группы (*x(t), y(t))* во времени. Предполагается, что скорость роста числа жертв равна сумме двух слагаемых: первое пропорционально числу жертв второе пропорционально числу встреч хищников с жертвами, т.е популяция жертв описывается дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = ax + bxy$. Изменение численности популяции хищников происходит из-за естественной убыли при отсутствии пищи, и роста количества пищи, пропорционального числу встреч жертв с хищниками, что описывается уравнением $\frac{dy}{dt} = fy + cxy$.

Эта классическая модель в экологии, в настоящее время нашла применение для описания поведения экономических, биологических и социальных систем [8].

Класс систем, имеющих аналитическое решение, достаточно узок. При нахождении численного решения системы к каждому из них применяют формулу Эйлера или Рунге-Кутта. Рассмотрим решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, используя формулу Эйлера. Применяем ее к каждому из уравнений системы

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot f_1(x, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + h \cdot f_2(x, y_n, z_n) \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим решение системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = f_1(x, y(x), z(x)) \\ \dfrac{dz(x)}{dx} = f_2(x, y(x), z(x)) \end{cases} \quad (7)$$

где *y(x), z(x)* – неизвестные функции от независимой переменной *x*, подлежащие определению, $f_1(x,y(x),z(x))$, $f_2(x, y(x),z(x))$ – известные функции, заданные и непрерывные.

Для нахождения решения применим методы численного решения. В частности, возможно применение как метода Эйлера, так и метода Рунге-Кутта для решения систем. К каждому уравнению системы применяем формулу Эйлера $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot f_1(x, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + h \cdot f_2(x, y_n, z_n) \end{cases}$ (8).

Задание 3. Найти решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $\begin{cases} y' = e^{-y^2-z^2} + 2x \\ z' = 2y^2 + z \end{cases}$ (9)

при изменении аргумента на промежутке $x \in [0,1]$ при начальных условиях $y(0)=0.5$, $z(0)=1$.

Решение. Применим формулы Эйлера (8) к каждому уравнению системы. Для данной задачи формулы (8) имеют вид:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot \left(e^{-y_n{}^2 - z_n{}^2} + 2x_n \right) \\ z_{n+1} = 2y_n{}^2 + z_n \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в табличном процессоре Microsoft Excel

В первой строчке столбцов A, B, C напишем названия величин, которые расположим в этих столбцах (*x, y, z*). В столбце A запишем значения аргумента с выбранным шагом (в данном примере равном 0,1). Во второй строчке столбцов B и C запишем заданные начальные условия $y^0(x), z^0(x)$. В третьей строчке столбцов B и C напишем формулы Эйлера для данной задачи (10). Выделим диапазон ячеек с формулами Эйлера и скопируем его на диапазон ячеек с значениями аргумента (рис. 13).

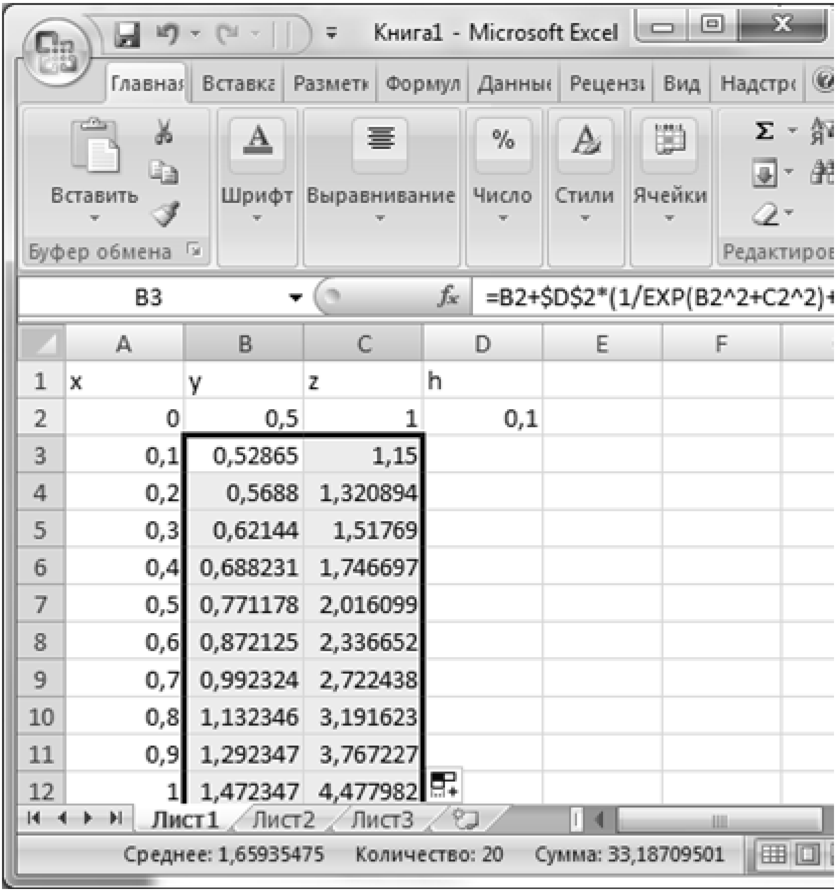


Рис. 13. Решение системы по формуле Эйлера в режиме отображения чисел

На рис. 14 приведен фрагмент таблицы Microsoft Excel в режиме отображения формул.

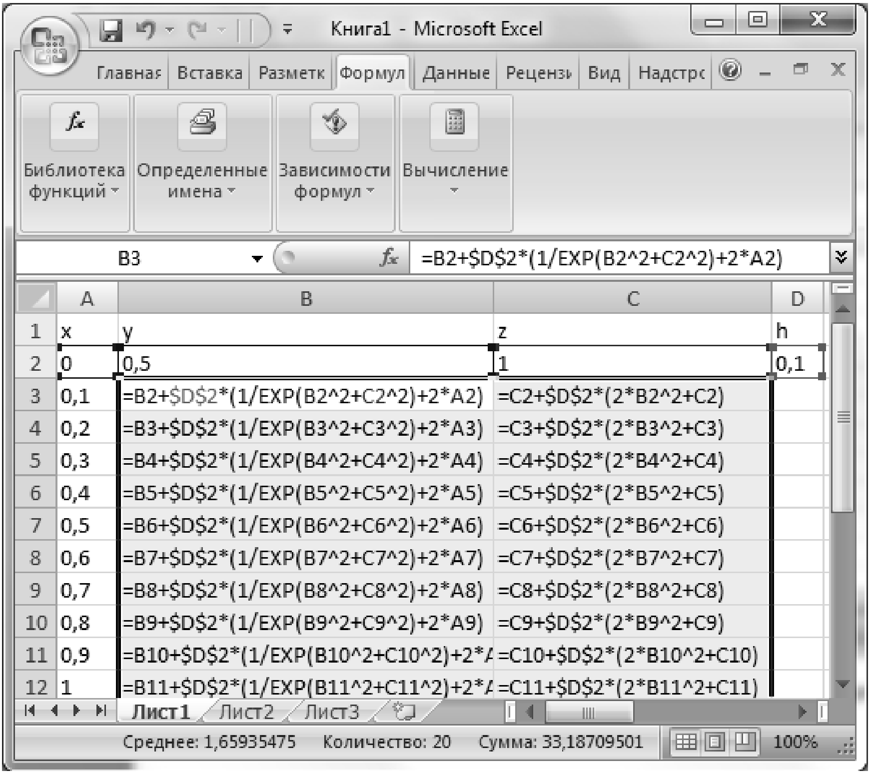
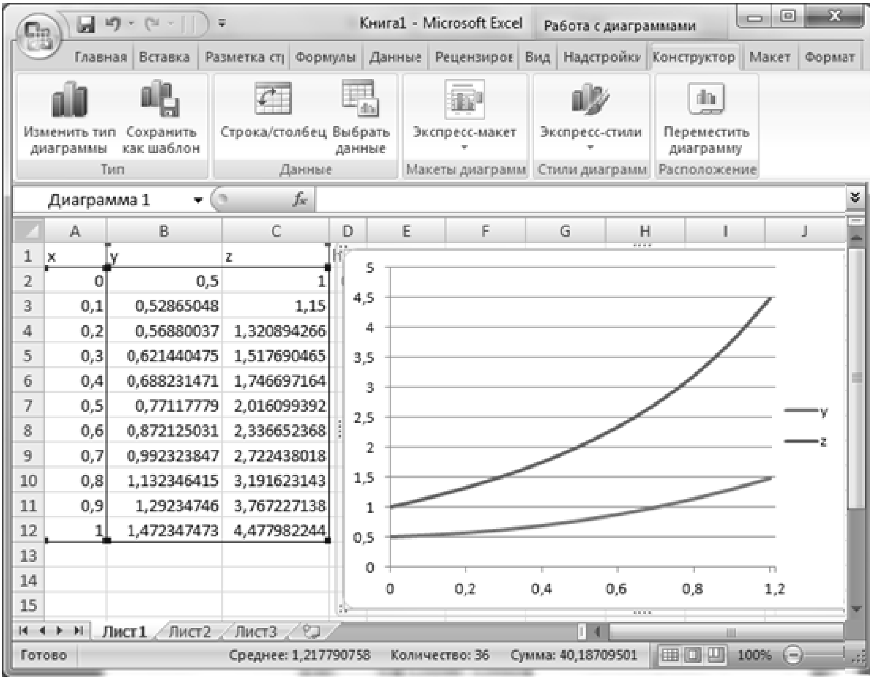


Рис. 14. Решение системы по формуле Эйлера в режиме отображения формул

Выделяем столбцы, содержащие значения аргумента, функций y, z и строим диаграмму типа «точечная». Представим полученное решение графически (рис. 15).



x	y	z
0	0,5	1
0,1	0,52865048	1,15
0,2	0,56880037	1,320894266
0,3	0,621440475	1,517690465
0,4	0,688231471	1,746697164
0,5	0,77117779	2,016099392
0,6	0,872125031	2,336652368
0,7	0,992323847	2,722438018
0,8	1,132346415	3,191623143
0,9	1,29234746	3,767227138
1	1,472347473	4,477982244

Рис. 15. Графическое представление решения

Решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в пакете MathCad

Функция *rkfixed,* предназначенная для решения дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутта, может быть применена для решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого ее аргументы записываются в векторном виде. Пусть q – вектор, первая компонента которого содержит функцию y системы, вторая – функцию z системы, то есть $q = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда начальные условия задачи $q = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Первое уравнение системы – первая компонента переменной, содержащей уравнения системы, второе уравнение – вторая компонента, то есть $D(x,q)=\begin{pmatrix} e^{-q_0^2-q_1^2}+2x \\ 2\cdot q_0+q_1 \end{pmatrix}$. Обращение к функции и решение приведены на рис. 16.

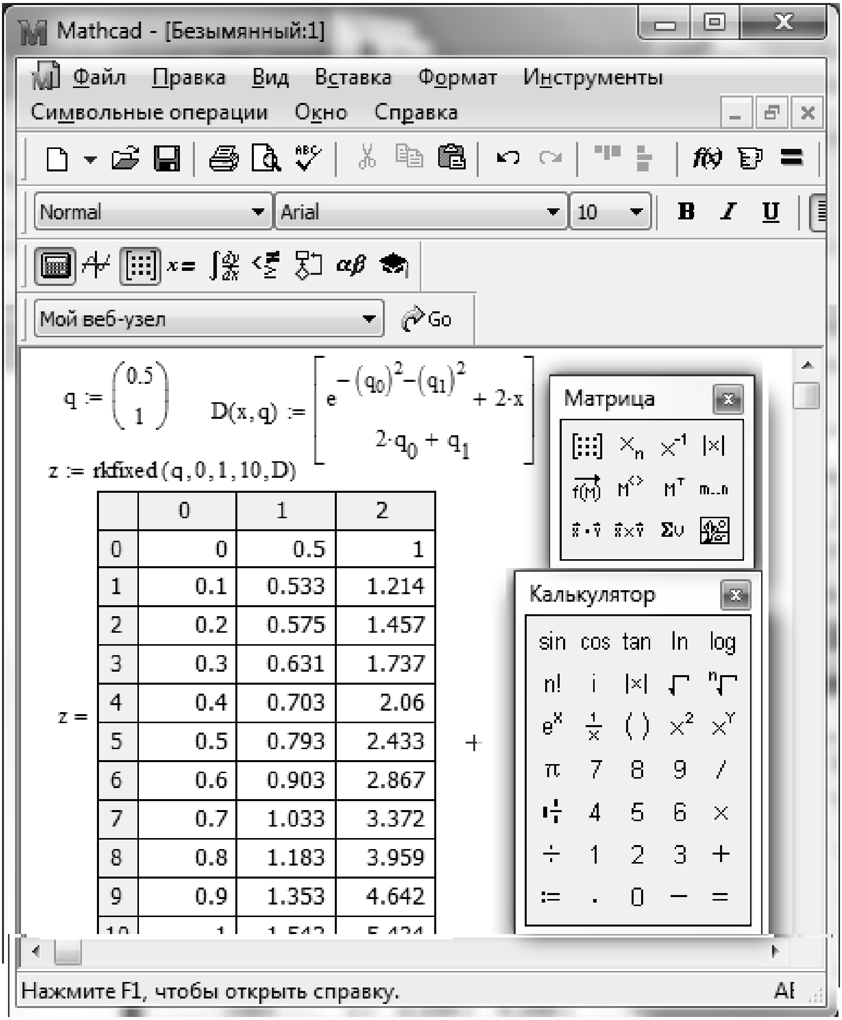


Рис. 16. Решение в пакете Mathcad

Построим графическое представление полученного решения (рис. 17). Надо помнить при этом, что аргумент в решении расположен в первом столбце матрицы решения, первая искомая функция – во втором, вторая – в третьем столбцах матрицы. Значит, на графике надо по оси абсцисс откладывать числа из нулевого столбца матрицы (в Mathcad отсчет идет от нуля), по оси ординат – значения первого и второго столбцов. Для выделения столбца в пакете Mathcad используются угловые скобки как надстрочный символ. Чтобы его набрать, можно воспользоваться кнопкой панели «Матрицы».

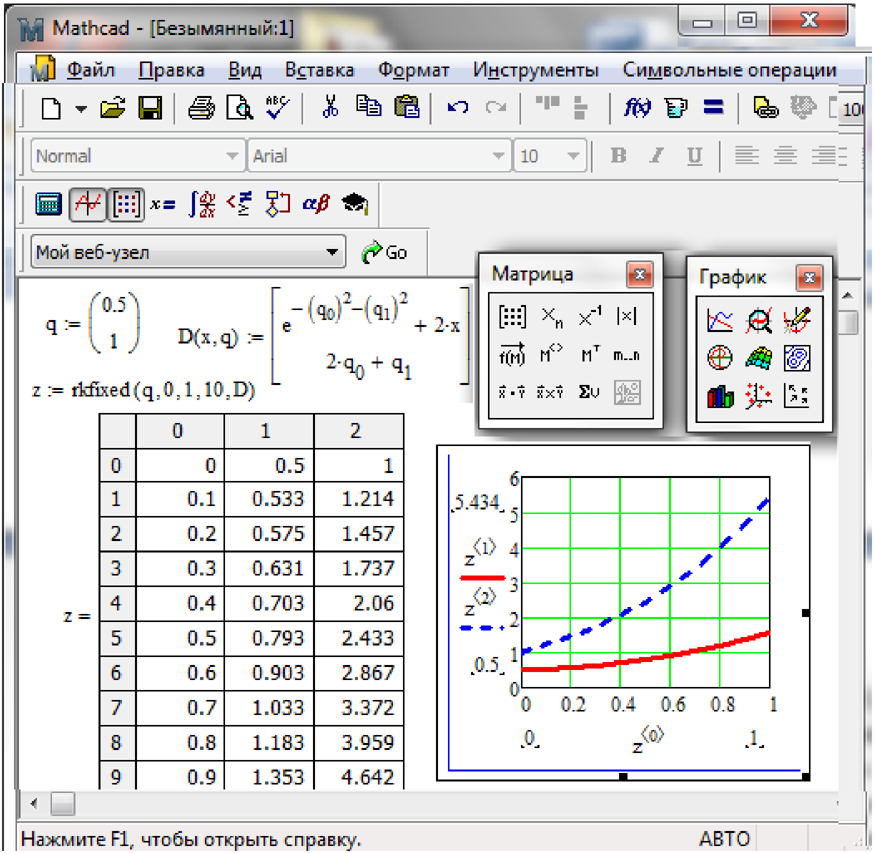


Рис. 17. Решение системы в пакете Mathcad

Видно, что решения, полученные разными методами, несколько различаются. Это вызвано тем, что в разных пакетах использованы разные методы.

Варианты задания 3

Найти численное решение задачи Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x), z(x)) \\ \dfrac{dz(x)}{dx} = g(x, y(x), z(x)) \end{cases}$$

на промежутке изменения $x \in [0,\ 3]$, удовлетворяющее условиям $y(0)=y_0$ и $z(0)=z_0$ в Microsoft Excel методом Эйлера. Решить систему уравнений в пакете Mathcad, используя функцию *rkfixed*.

В отчете привести:

- формулу Эйлера нахождения численного решения системы двух дифференциальных уравнений первого порядка;
- численное решение по формуле Эйлера в Microsoft Excel;
- график численного решения в Microsoft Excel;
- описание функции решения обыкновенного дифференциального уравнений *rkfixed*;
- решение, полученное в пакете Mathcad с использованием функции *rkfixed.*

Вариант	**Правые части уравнений системы**	y_0	z_0
1	$f(x, y(x), z(x)) = 0.56$ $g(x, y(x), z(x)) = 0.09xz - y$	y_0 =0.7	z_0=1/11
2	$f(x, y(x), z(x)) = 0.3$ $g(x, y(x), z(x)) = -0.07e^{0.4x}$	y_0 =1.3	z_0=0.125
3	$f(x, y(x), z(x)) = 0.8x$ $g(x, y(x), z(x)) = 0.11xy - x^2 y$	y_0 =-1	z_0=1/11

4	$f(x, y(x), z(x)) = x.$ $g(x, y(x), z(x)) = 0.1xz - y$	y_0 =0.7	z_0=1/12
5	$f(x, y(x), z(x)) = y$ $g(x, y(x), z(x)) = -0.08e^{0.4x}$	y_0 =0.3	z_0=1/9
6	$f(x, y(x), z(x)) = x + y.$ $g(x, y(x), z(x)) = 0.12xz - x^2 y$	y_0=1.6	z_0=1/12
7	$f(x, y(x), z(x)) = 0.5$ $g(x, y(x), yz(x)) = -0.09e^{0.4x}$	y_0 =0	z_0=0.1
8	$f(x, y(x), z(x)) = -y$ $g(x, y(x), z(x)) = -0.1e^{-0.5x}$	y_0 =1.3	z_0=0.1
9	$f(x, y(x), z(x)) = 0.4x$ $g(x, y(x), z(x)) = 0.13xz - x^2 y$	y_0 =0.8	z_0=1/13
10	$f(x, y(x), z(x)) = 2y - z$ $g(x, y(x), z(x)) = y + 2z$	y_0=-1	z_0=1.

ЗАДАЧА О ПАДЕНИИ ТЕЛА

Типичная задача механики – падение предметов у земной поверхности. Любой предмет считаем материальной точкой. Координата *y(t),* скорость *v(t),* ускорение *a(t)* определяются как решения уравнений

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} \tag{11}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \tag{12}$$

где *a(t)* – известно из закона Ньютона $a(t) = \dfrac{F(y, v, t)}{m}$ (13)

F – равнодействующая сила,
m – масса

Решение задачи – решение системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (11), (12).

Возможны две постановки физической задачи:

- ✓ Сопротивление воздуха отсутствует
- ✓ Имеется сопротивление воздуха

Первый случай: отсутствует сопротивление воздуха. Это модель свободного падения тела. В этом случае $a=g$. В этом случае решение уравнений (11) и (12) имеет вид:

$$v(t) = v_0 + gt$$
$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \tag{14}$$

где y_0, v_0 - начальные координата и скорость материальной точки. Для полного решения необходимо задать два начальных условия.

Второй случай: сопротивление воздуха имеется. Тормозящая сила направлена противоположно скорости движения тела, значит, она направлена вверх. Значит, результирующая сила, действующая на материальную точку:

$$F = F_g - F_d = mg - F_d$$

Сила F_d определяется эмпирически. Существуют зависимости между сопротивлением воздуха и скоростью падения. Эмпирически установлено, что наблюдается пропорциональность силы сопротивления скорости точки в некоторой степени, т.е. зависимости типа

$$F_d(v) = kv$$
$$F_d(v) = kv^2$$

Коэффициент пропорциональности k зависит от свойств среды и геометрии тела. Систему уравнений (11) и (12) решаем численно методом Эйлера. Изменение времени принимаем с шагом Δt , т.е. решение находим в точках $t_n = t_0 + n \cdot \Delta t$. Скорость и координату $y(t_n)$ в этих точках вычисляем из соотношений: $\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + a_n \cdot \Delta t \\ y_{n+1} &= y_n + v_n \cdot \Delta t \end{aligned}$.

Задание 4. *Тело массой 5 кг начинает падать с высоты Н. Вычислить время падения тела до земли с учетом сопротивления воздуха, пропорционального скорости падения (k=0.0001), и без учета сопротивления воздуха.*

Решение. Согласно второму закону Ньютона

$$a(t) = \frac{F(y,v,t)}{m} = \frac{mg - F_d}{m} = \frac{mg - kv}{m}$$

Закон сопротивления воздуха пропорционален скорости $F_d = k \cdot v$, k=0.0001, начальные условия $y\big|_{t=0} = 50$ м, $v(t)\big|_{t=0} = 0$ и $a(t)\big|_{t=0} = \frac{mg - k \cdot v\big|_{t=0}}{m} = g$.

Ищем численное решение:

Зная начальные условия при t=0, ищем решение в точке $t_1 = t_0 + \Delta t$:

$$v(t_1) = v(t_0) + a(t_0) \cdot \Delta t = 0 + g \cdot \Delta t \tag{15}$$

$$y(t_1) = y(t_0) + v(t_1) \cdot \Delta t \tag{16}$$

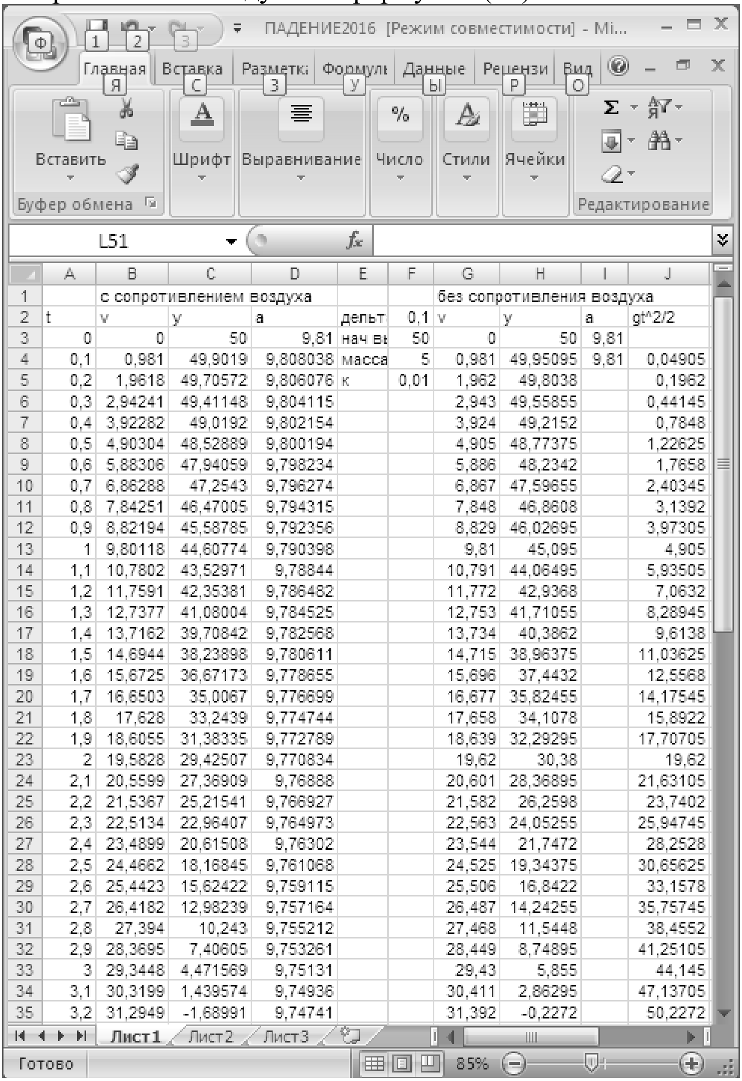
$$a(t_1) = \frac{mg - k \cdot v(t_1)}{m} \tag{17}$$

Затем вычисляем решение в точке $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Вычисления повторяем до тех пор, пока значение координаты у остается положительным. Отрицательные значения соответствуют положению тела ниже земной поверхности.

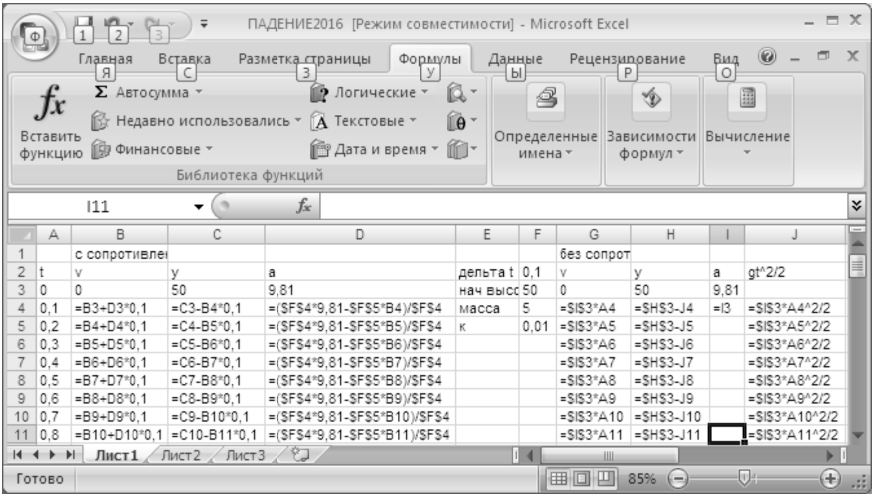
Решение в Microsoft Excel: первый столбец таблицы (А) отводим для значений времени, в которые вычисляем скорость и высоту тела, во втором столбце будем вычислять скорость тела, в третьем – высоту, в четвертом ускорение. В пятом и шестом столбцах записываем исходные данные задачи. В третьей строке записываем начальные условия задачи: отсчет времени начинается с нуля, начальная скорость равняется нулю, начальная высота, с которой падает тело 50 м, начальное ускорение равняется 9,81. В строках первого столбца записываем значения времени, в которых ищем решение задачи. Выбираем шаг изменения времени 0,1 до значения 3,3. В столбце В записываем формулу (15) для вычисления скорости, в столбце C формулу (16) для вычисления высоты, в четвертом – формулу (17) для вычисления ускорения (рис. 18, 19).

Одновременно выполняем расчет времени падения тела без учета сопротивления воздуха по формулам (14).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		с сопротивлением воздуха					без сопротивления воздуха			
2	t	v	y	a	дельт	0,1	v	y	a	gt^2/2
3	0	0	50	9,81	нач вы	50	0	50	9,81	
4	0,1	0,981	49,9019	9,808038	масса	5	0,981	49,95095	9,81	0,04905
5	0,2	1,9618	49,70572	9,806076	к	0,01	1,962	49,8038		0,1962
6	0,3	2,94241	49,41148	9,804115			2,943	49,55855		0,44145
7	0,4	3,92282	49,0192	9,802154			3,924	49,2152		0,7848
8	0,5	4,90304	48,52889	9,800194			4,905	48,77375		1,22625
9	0,6	5,88306	47,94059	9,798234			5,886	48,2342		1,7658
10	0,7	6,86288	47,2543	9,796274			6,867	47,59655		2,40345
11	0,8	7,84251	46,47005	9,794315			7,848	46,8608		3,1392
12	0,9	8,82194	45,58785	9,792356			8,829	46,02695		3,97305
13	1	9,80118	44,60774	9,790398			9,81	45,095		4,905
14	1,1	10,7802	43,52971	9,78844			10,791	44,06495		5,93505
15	1,2	11,7591	42,35381	9,786482			11,772	42,9368		7,0632
16	1,3	12,7377	41,08004	9,784525			12,753	41,71055		8,28945
17	1,4	13,7162	39,70842	9,782568			13,734	40,3862		9,6138
18	1,5	14,6944	38,23898	9,780611			14,715	38,96375		11,03625
19	1,6	15,6725	36,67173	9,778655			15,696	37,4432		12,5568
20	1,7	16,6503	35,0067	9,776699			16,677	35,82455		14,17545
21	1,8	17,628	33,2439	9,774744			17,658	34,1078		15,8922
22	1,9	18,6055	31,38335	9,772789			18,639	32,29295		17,70705
23	2	19,5828	29,42507	9,770834			19,62	30,38		19,62
24	2,1	20,5599	27,36909	9,76888			20,601	28,36895		21,63105
25	2,2	21,5367	25,21541	9,766927			21,582	26,2598		23,7402
26	2,3	22,5134	22,96407	9,764973			22,563	24,05255		25,94745
27	2,4	23,4899	20,61508	9,76302			23,544	21,7472		28,2528
28	2,5	24,4662	18,16845	9,761068			24,525	19,34375		30,65625
29	2,6	25,4423	15,62422	9,759115			25,506	16,8422		33,1578
30	2,7	26,4182	12,98239	9,757164			26,487	14,24255		35,75745
31	2,8	27,394	10,243	9,755212			27,468	11,5448		38,4552
32	2,9	28,3695	7,40605	9,753261			28,449	8,74895		41,25105
33	3	29,3448	4,471569	9,75131			29,43	5,855		44,145
34	3,1	30,3199	1,439574	9,74936			30,411	2,86295		47,13705
35	3,2	31,2949	-1,68991	9,74741			31,392	-0,2272		50,2272

Рис. 18. Решение задачи о падении тела с учетом сопротивления воздуха



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		с сопротивлен					без сопрот			
2	t	v	y	a	дельта t	0,1	v	y	a	gt^2/2
3	0	0	50	9,81	нач высо	50	0	50	9,81	
4	0,1	=B3+D3*0,1	=C3-B4*0,1	=($F$4*9,81-$F$5*B4)/$F$4	масса	5	=$I$3*A4	=$H$3-J4	=I3	=$I$3*A4^2/2
5	0,2	=B4+D4*0,1	=C4-B5*0,1	=($F$4*9,81-$F$5*B5)/$F$4	к	0,01	=$I$3*A5	=$H$3-J5		=$I$3*A5^2/2
6	0,3	=B5+D5*0,1	=C5-B6*0,1	=($F$4*9,81-$F$5*B6)/$F$4			=$I$3*A6	=$H$3-J6		=$I$3*A6^2/2
7	0,4	=B6+D6*0,1	=C6-B7*0,1	=($F$4*9,81-$F$5*B7)/$F$4			=$I$3*A7	=$H$3-J7		=$I$3*A7^2/2
8	0,5	=B7+D7*0,1	=C7-B8*0,1	=($F$4*9,81-$F$5*B8)/$F$4			=$I$3*A8	=$H$3-J8		=$I$3*A8^2/2
9	0,6	=B8+D8*0,1	=C8-B9*0,1	=($F$4*9,81-$F$5*B9)/$F$4			=$I$3*A9	=$H$3-J9		=$I$3*A9^2/2
10	0,7	=B9+D9*0,1	=C9-B10*0,1	=($F$4*9,81-$F$5*B10)/$F$4			=$I$3*A10	=$H$3-J10		=$I$3*A10^2/2
11	0,8	=B10+D10*0,1	=C10-B11*0,1	=($F$4*9,81-$F$5*B11)/$F$4			=$I$3*A11	=$H$3-J11		=$I$3*A11^2/2

Рис. 19. Фрагмент таблицы с решением задачи о падении тела в режиме отображения формул

Проанализируем полученный результат. Положение тела над землей (столбец С таблицы) убывает, так как тело падает с некоторой высоты. Через примерно 3,1 сек. тело упадет на землю. С этого момента формулы определения высоты дают уже отрицательное значение. Это значит, что вычисления уже не имеют смысла.

Сравнивая результаты решения по двум моделям, можем утверждать, что учет сопротивления воздуха при падении тела вносит незначительное изменение в результат. Это говорит о том, что математическая модель падающего тела без учета сопротивления воздуха хорошо описывает его падение, и учет сопротивления воздуха не вносит значительных изменений.

Решение в пакете MathCAD

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений применим функцию *odesolv*е, которая применяется для решения уравнений любого порядка. В связи с тем, что ось ординат обычно направлена вверх, а падение идет вниз в уравнении (16) перед второй производной (ускорением) ставится минус. Решение приведено на рис. 20.

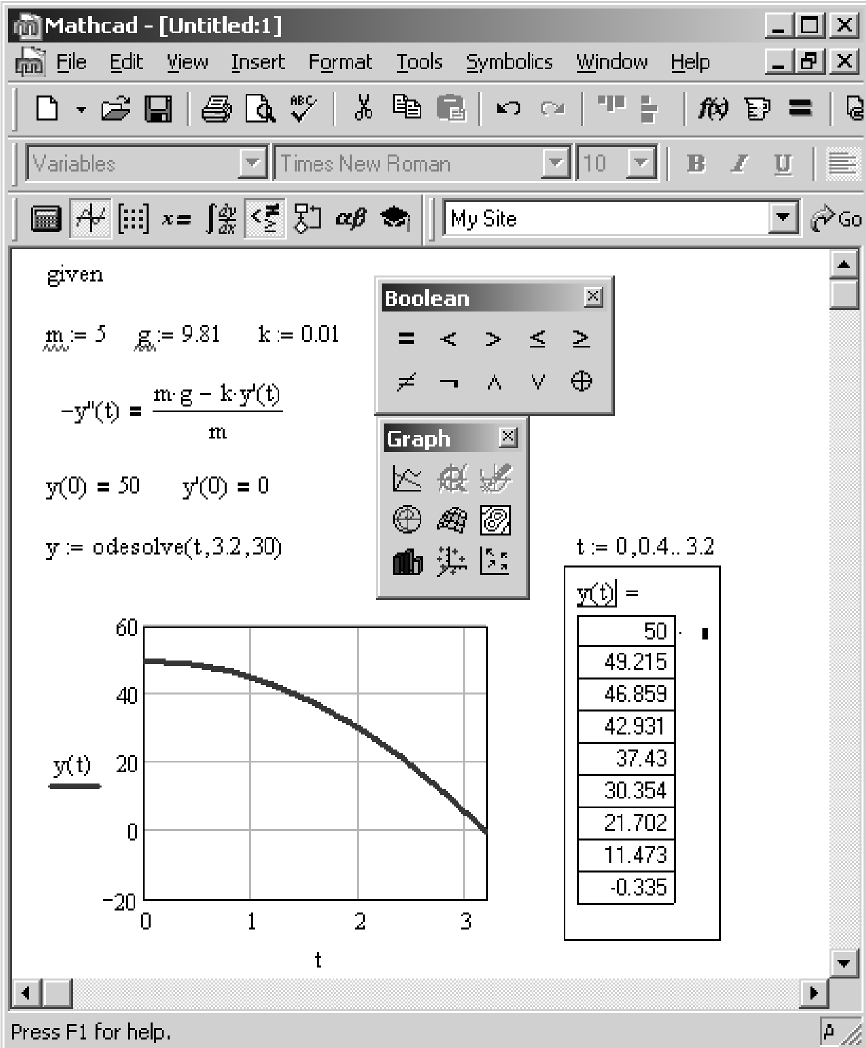


Рис. 20. Решение в MathCAD задачи о падении тела

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 4

Тело массой m начинает падать с высоты H. Сопоставить время падения тела до земли с учетом и без учета сопротивления воздуха. Сопротивление воздуха принять пропорциональным степени скорости падения $F_d = k \cdot v^c$.

Решение выполнить в табличном процессоре Microsoft Excel и пакете математических расчетов MathCAD.

В отчете привести:

- систему дифференциальных уравнений, описывающих падение тела;
- формулы Эйлера для вычисления численного решения системы дифференциальных уравнений первого порядка;
- численное решение системы уравнений по формуле Эйлера в Microsoft Excel (режимы отображения чисел и формул);
- графическое представление решений;
- приближенное решение, полученное в пакете Mathcad с использованием функции *odesolve.*

Вариант 1. m=10 кг, H=200 м. k=0.02, c=1.
Вариант 2. m=50 кг, H=200 м. k=0.2, c=2.
Вариант 3. m=75 кг, H=200 м. k=0.02, c=1.
Вариант 4. m=25 кг, H=200 м. k=0.2, c=2.
Вариант 5. m=100 кг, H=200 м. k=2, c=1.
Вариант 6. m=10 кг, H=200 м. k=0.002, c=2.
Вариант 7. m=10 кг, H=200 м. k=0.003, c=1.
Вариант 8. m=50 кг, H=200 м. k=0.03, c=2.
Вариант 9. m=10 кг, H=200 м. k=0.3 c=2.
Вариант 10. m=10 кг, H=100 м. k=0.0002, c=1.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЗАДАЧА КОШИ

Задано дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \tag{18}$$

и начальные условия

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (19).$$

Решением уравнения (18) является функция $y(x) = \varphi(x)$**, которая при подстановке в исходное уравнение (18) обратит его в тождество, и будут выполнены начальные условия (19).** Эта задача в математике называется задачей Коши.

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ на отрезке изменения аргумента $x \in [a,b]$ с начальными условиями $y(a)=y_a$, $y'(a)=y'_a$. Они содержат вторую производную неизвестной функции. В решении дифференциального уравнения второго порядка присутствуют две неизвестные постоянные, которые определяются из начальных условий. Уже рассматривались методы Эйлера и Рунге-Кутта решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. С помощью подстановки $y' = z,\ y'' = z'$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $y''(x, y(x)) = F(x, y(x, y(x)), y'(x))$ сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = G(x, y, y_1) \end{cases}$. К каждому из этих уравнений применим метод Эйлера или метод Рунге-Кутта [5].

Задание 5. *Задано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка* $y'' + \dfrac{y'}{\sin x} - x \cdot y = 0$ *с начальными условиями* $y(1) = 0{,}5$ *и* $y'(1) = -0{,}5$. *Найти приближенное решение уравнения на промежутке* $x \in [1, 2]$.

С помощью подстановки $y' = z,\ y'' = z'$ заданное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $\begin{cases} y' = z \\ z' = x \cdot y - \dfrac{z}{\sin x} \end{cases}$ с начальными условиями $y(1) = 0{,}5$ и

$z(1) = -0{,}5$. Применяя к каждому из уравнений системы метод Эйлера, можем записать систему в следующем виде:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot z_i \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot \left(x_i \cdot y_i - \dfrac{z_i}{\sin x_i} \right) \end{cases}, \tag{20}$$

где $x_0=1;\ y_0=0{,}5;\ z_0=-0{,}5$. Вычисления производим последовательно по каждой из формул системы, изменяя значение i от нуля до n, где n – число точек разбиения отрезка, на котором определяется решение. Каждое следующее значение аргумента вычисляется по формуле $x_{i+1} = x_i + h$, где h – шаг изменения аргумента.

Решение в табличном процессоре Microsoft Excel будем проводить в следующей последовательности: надписываем столбцы A, B, C как *x, y, y’*. В ячейку E1 записываем значение шага изменения аргумента. Заполняем ячейки столбца A значениями аргумента *x* – от начального значения 1 до конечного 2 шагом 0,1. Под заголовками *y, y’* записываем заданные начальные значения из задания. В третьей строке записываем формулы для вычисления *y, y’* по формулам системы (13) (рис. 21).

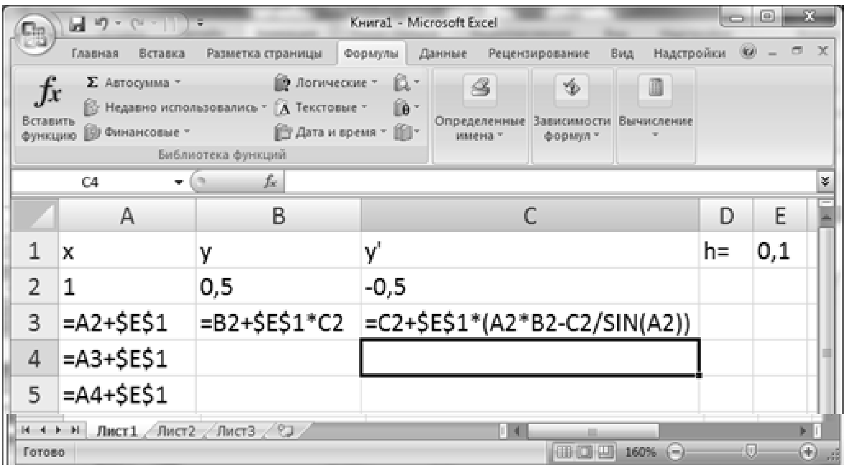


Рис. 21. Ввод формул для вычисления *y, y*

При записи формул нужно не забывать ставить абсолютный адрес ячейки E1, содержащей значение шага. Набранные формулы нужно скопировать до конечного значения аргумента - значения x=2. В результате копирования Microsoft Excel выведет полученные значения (рис. 22).

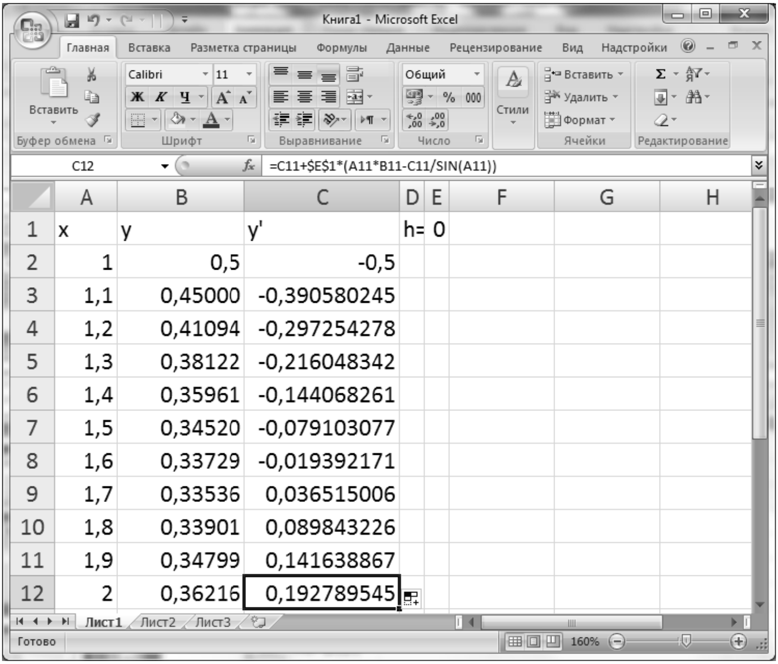
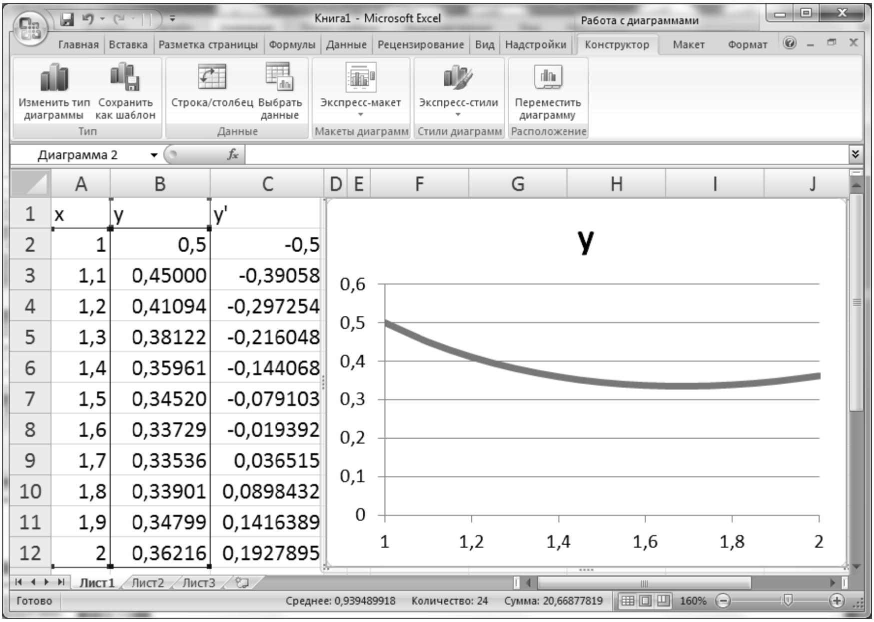


Рис. 22. Вывод результата вычислений

Полученное решение нужно проиллюстрировать графически. Для этого выделяем диапазоны ячеек, содержащие значения аргумента и функции, на ленте «Вставка» вызываем команду «Диаграмма» и строим диаграмму типа «точечная» (рис. 23).



	A	B	C
1	x	y	y'
2	1	0,5	-0,5
3	1,1	0,45000	-0,39058
4	1,2	0,41094	-0,297254
5	1,3	0,38122	-0,216048
6	1,4	0,35961	-0,144068
7	1,5	0,34520	-0,079103
8	1,6	0,33729	-0,019392
9	1,7	0,33536	0,036515
10	1,8	0,33901	0,0898432
11	1,9	0,34799	0,1416389
12	2	0,36216	0,1927895

Рис. 23. Графическое решение уравнения

Решение в пакете MathCAD

Для решения задачи в пакете MathCAD применяем функцию *odesolve*. Эта функция может искать решения обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка. Функция имеет три аргумента: имя аргумента искомой функции, правый конец интервала интегрирования, число шагов разбиения интервала интегрирования. Результатом работы функции является вычисленная функция.

Решение производится в несколько шагов:

- Записывается слово «Given»;
- Записывается дифференциальное уравнение, как оно выглядит в условии задачи с указанием аргумента. Знак равенства ставится «жирный» - с палитры Boolean. Для набора знака производной нажать сочетание клавиш Ctrl и F7;
- Записываются начальные условия;
- Вызывается встроенная функция *odesolve* с присвоением ей уникального имени. Задаются необходимые три аргумента.

• Для получения результата задаются значения аргумента, в которых определяется решение; далее набираем имя результата работы функции *odesolve* как функции аргумента *x* и нажимаем клавишу «=».MathCAD выводит вычисленные значения функции в заданных точках.

Решение приведено на рис. 24.

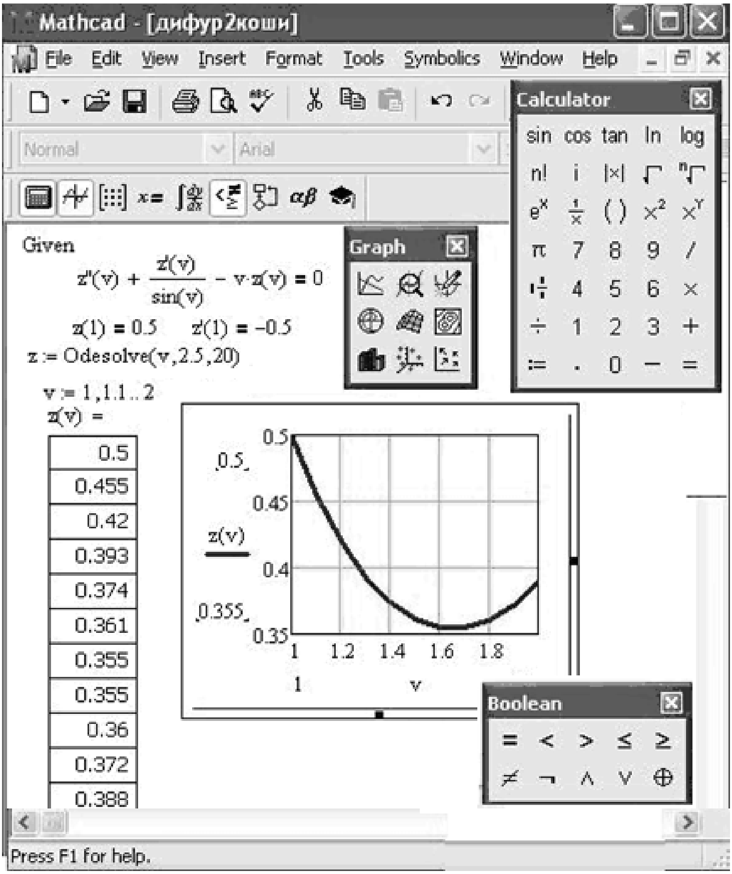


Рис. 24. Решение уравнения с использованием функции *odesolve*

Решение дифференциального уравнения может быть получено и с использованием функции решения обыкновенного дифференциального уравнения *rkfixed*, рассмотренной ранее (рис. 17). Результатом работы функции является матрица решений системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта с постоянным шагом.

Решение производится в несколько шагов:

- ✓ ввод вектора начальных условий с присвоением ему имени *y*;
- ✓ ввод вектора правых частей уравнений системы дифференциальных уравнений с присвоением ему имени *F* и обязательным указанием имен аргументов;
- ✓ ввод функции *rkfixed* с пятью численными значениями аргументов с присвоением ей уникального имени;
- ✓ получение решения нажатием клавиши “Enter”.

Для вывода решения ввести имя переменной, присвоенное функции, и нажать клавишу «=» (равно).

Программа выводит матрицу решения, в первом столбце которой содержатся значения *x*, для которых вычислено решение, во втором столбце – значения искомой функции в заданных точках, в третьем – значения первых производных в тех же точках. Для получения графической формы решения применить палитру Graph пакета, активизируя кнопку плоского графика. В маркере у оси абсцисс задается имя нулевого столбца матрицы решения (в котором содержатся значения аргумента *x*), в маркере у оси ординат *y* задается имя первого столбца матрицы решения, содержащего полученные значения искомой функции. Для задания номера столбца удобно воспользоваться значком указания столбца палитры Matrix $^{<>}$. На рис. 24 приведено описанное решение.

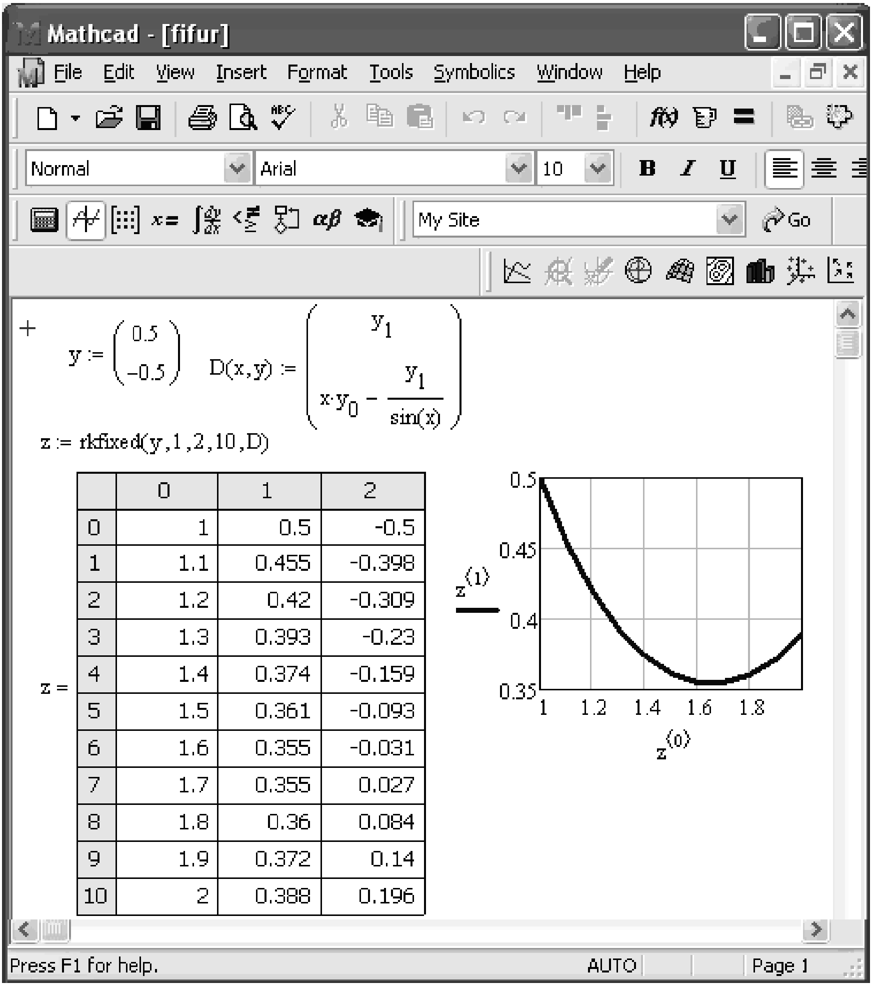


Рис. 24. Решение уравнения с использованием функции *rkfixed*

Решения, полученные всеми способами в обоих пакетах, совпадают.

Чтобы проверить точность полученного решения, найдем точное решение уравнения. Точное решение имеют линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения вида $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$, где a_1, a_2 – постоянные величины. Общим решением уравнения является функция $y(x) = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$, где C_1, C_2 – постоянные, k_1, k_2 – корни характеристического уравнения $k^2 + a_1 \cdot k + a_2 = 0$. (Если корни равные, то решение имеет вид $y(x) = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k_1 x}$, если корней вещественных нет, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то решение имеет вид $y(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x\right)$).

Задание 5. *Найти решение обыкновенного дифференциального линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами* $y'' + 3y' + y = 0$ *на диапазоне изменения аргумента x* $\in$ *[-0.5, 1] при начальных условиях y(-0.5)=-1, y'(-0.5)=0.5.*

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 1 = 0$. Корни уравнения вычисляются по формуле $k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1}$. Корни различны по величине, следовательно, решение имеет вид: $y(x) = C_1 \cdot e^{\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot x} + C_2 \cdot e^{\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot x}$. Для определения постоянных C_1, C_2 применим начальные условия уравнения:

$$-1 = C_1 \cdot e^{\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot (-0.5)} + C_2 \cdot e^{\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot (-0.5)} \qquad (21).$$

Вычислим первую производную уравнения и подставим ее во второе начальное условие

$y'(x) = C_1 \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot x} + C_2 \cdot \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot x}$, следовательно,

$$0.5 = C_1 \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(-0.5)} + C_2 \cdot \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) e^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(-0.5)} \quad (22).$$

Т.е. для определения постоянных нужно решить систему линейных алгебраических уравнений (21) и (22). Решение выполним в пакете MathCAD. Решение приведено на рис. 25.

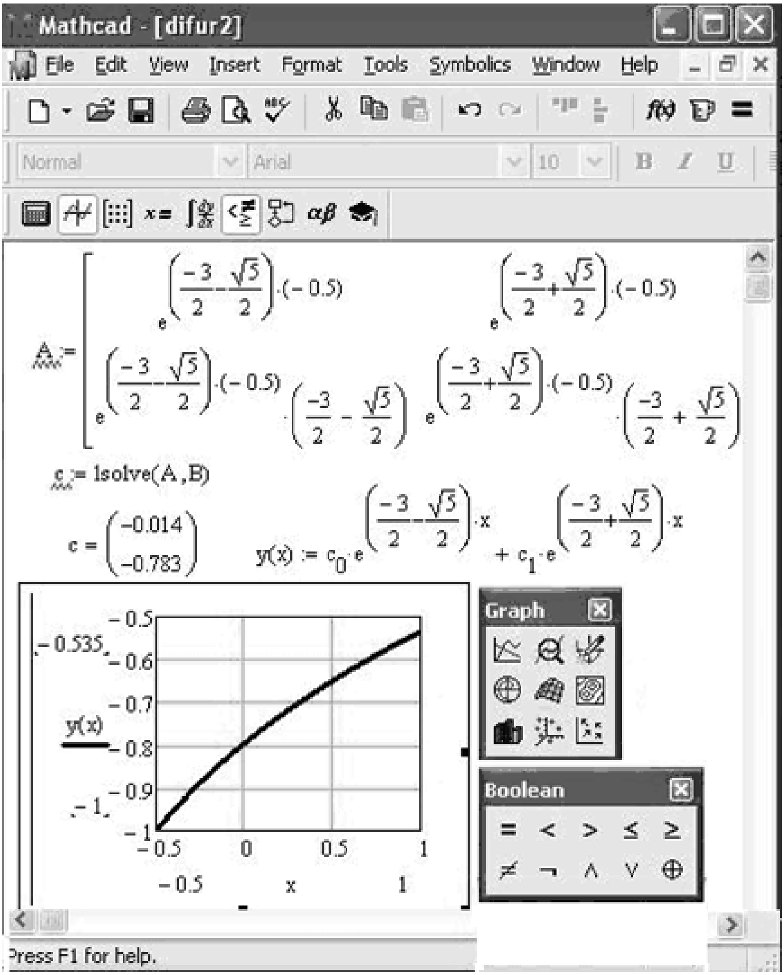


Рис. 25. Точное решение уравнения

Сопоставим полученное точное решение с приближенными, вычисленными с использованием функций *odesolve* (рис. 26) и *rkfixed* (рис. 27).

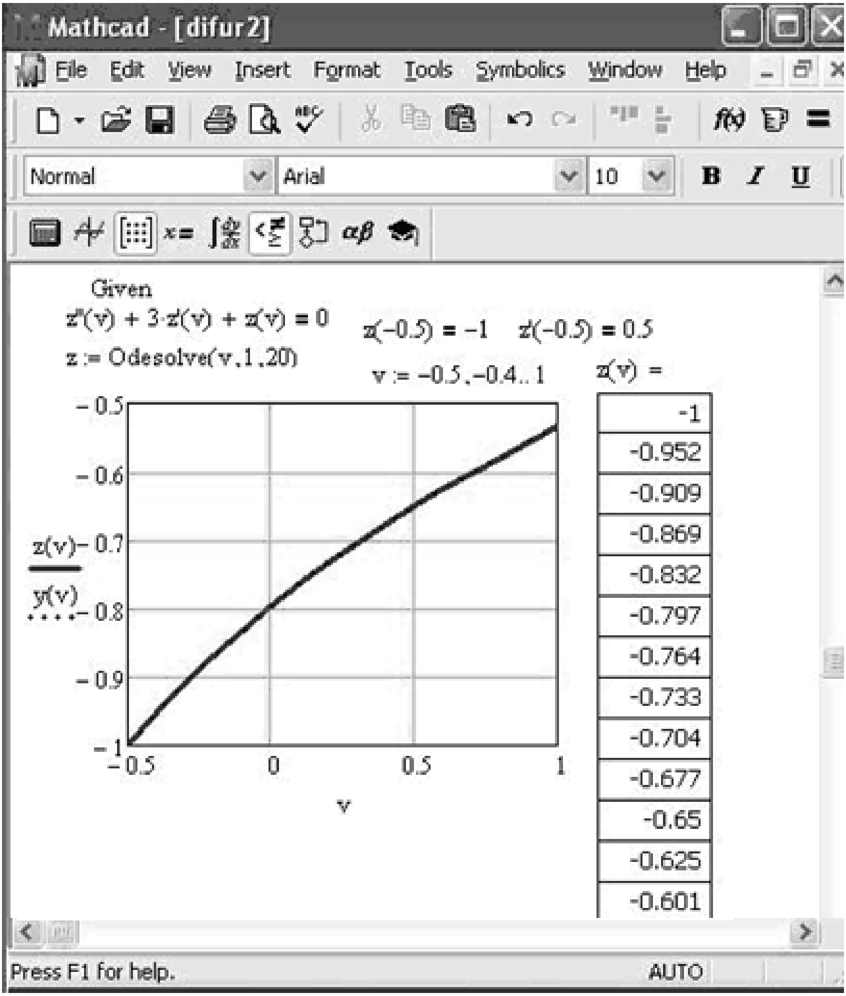
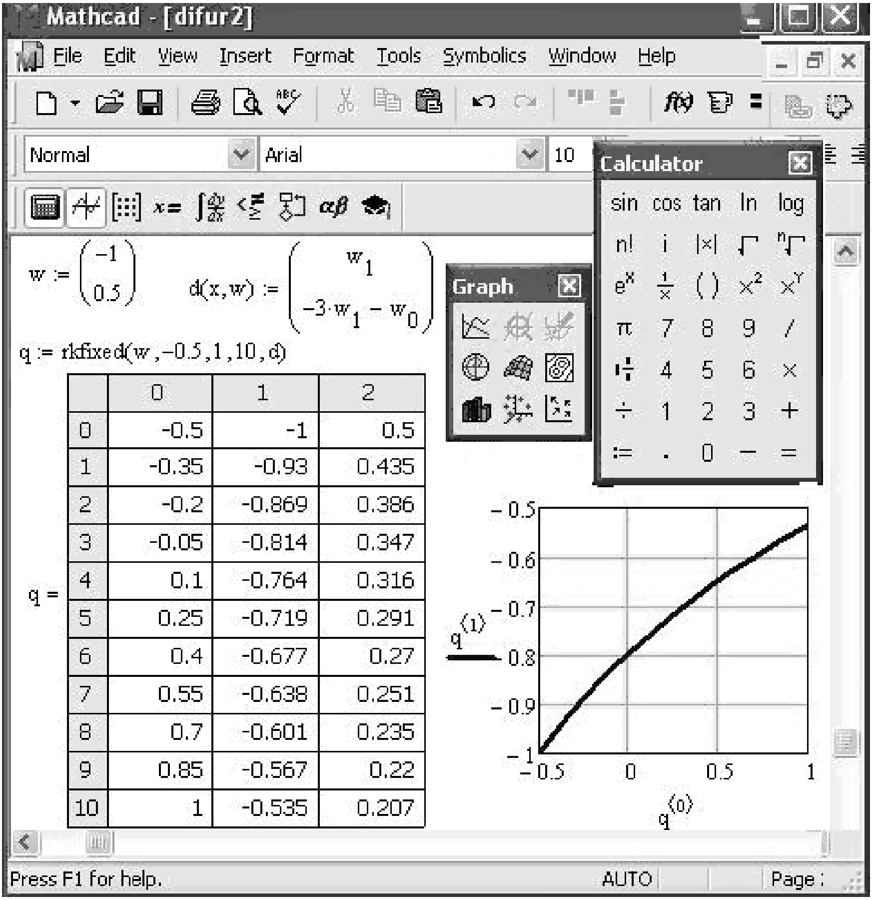


Рис. 26. Решение уравнения с использованием функции *odesolve*



	0	1	2
0	-0.5	-1	0.5
1	-0.35	-0.93	0.435
2	-0.2	-0.869	0.386
3	-0.05	-0.814	0.347
4	0.1	-0.764	0.316
5	0.25	-0.719	0.291
6	0.4	-0.677	0.27
7	0.55	-0.638	0.251
8	0.7	-0.601	0.235
9	0.85	-0.567	0.22
10	1	-0.535	0.207

Рис. 27. Графическое решение уравнения с использованием функции *rkfixed*

Как видим, решения точное и полученное функциями практически совпадают.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 5

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(y', y, x)$ с начальными условиями $y(a) = y_0$ и $y'(a) = y'_0$. Найти точное решение уравнения. Найти численное решение уравнения методом Эйлера на промежутке $x\in[a,\ b]$. Оценить максимальную погрешность вычисления. Решение выполнить в Microsoft Excel и пакете Mathcad.

В отчете привести:

- точное (аналитическое) решение уравнения;
- формулу Эйлера вычисления численного решения уравнения второго порядка;
- решение уравнения по формуле Эйлера в Microsoft Excel (таблички в режимах отображения чисел и формул);
- графики точного и численного решений;
- максимальную погрешность – абсолютную и относительную;
- описание функций решения обыкновенного дифференциального уравнения *odesolve* и *rkfixed*;
- точное решение и решения, полученные в пакете Mathcad с использованием функций *odesolve* и *rkfixed.*
-

ВАРИАНТ	**УРАВНЕНИЕ**	**НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ**	**ПРОМЕЖУТОК ИНТЕГРИРОВАНИЯ**
1.	$y'' - 4y = 0$	$y(0.8) = -1$; $y'(0.8) = 0{,}5$	$x\in[0.8,\ 1.8]$.
2.	$y'' - 2y' + y = 0$	$y(0) = 0{,}85$; $y'(0) = 1{,}5$	$x\in[0,\ 2.5]$
3.	$1.2y'' - 4y' + 2y = 0$	$y(2) = 1{,}5$; $y'(2) = -0{,}5$	$x\in[2,\ 3.18]$
4.	$4y'' - 2y' + y = 0$	$y(0.9) = -0{,}85$; $y'(0.9) = 1{,}9$	$x\in[0.9,\ 3.2]$
5.	$y'' - 5.1y' + 4y = 0$	$y(0) = 5$, $y'(0) = 8$	$x\in[0,\ 3]$
6.	$y'' - 8y = 0$	$y(0.6) = -1{,}8$;	$x\in[0.6,\ 1.9]$.

		$y'(0.6) = -1{,}5$	
7.	$y'' - 2y = 0$	$y(0) = 0{,}5$; $y'(0) = -1{,}5$	$x \in [0,\ 1.5]$.
8.	$2y'' - y' - y = 0$	$y(1) = 0{,}5$ б $y'(1) = -0{,}5$	$x \in [1,\ 2.5]$.
9.	$y'' + 2y' - 2y = 0$	$y(0.7) = 0{,}5$; $y'(0.7) = 1{,}5$	$x \in [0.7,\ 2.5]$.
10.	$-y'' - 2y' + y = 0$	$y(0) = -0{,}85$ $y'(0) = 1{,}5$	$x \in [0,\ 2.5]$.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. *Быкова О.Г.* Информатика. Приближенные методы вычислений: Методические указания к практическим и лабораторным работам. СПб.: СПГГИ. - 2009.- 53 с.
2. *Быкова О.Г.* Информатика. Решение нелинейных и дифференциальных уравнений: Методические указания к практическим и лабораторным работам. СПб.: СПГГИ. - 2009.- 70 с.
3. *Быкова О.Г.* Работа в пакете Mathcad. СПб.: СПГГИ.- 2009.- 71 с.
4. *Быкова О.Г.* Табличный процессор Microsoft Excel. - СПб.: Национальный минерально-сырьевой университет «Горный».- 2013.- 65 с.
5. *Быкова О.Г.* Задачник по методам вычислений для инженеров. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing. - 2012.- 84 с.
6. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). - М.: Высшая школа, 2001.- 382 с.
7. *Волков Е.А.* Численные методы: Учебное пособие. 4-е изд., стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2007.- 256 с.
8. *Григулецкий В.Г., Ященко З.В.* Высшая математика для экономистов: уч. пособие для вузов/Серия «Высшее образование». - Ростов на Дону: Феникс, 2004.- 640 с.
9. *Половко А.М., Ганичев И.В.* MathCAD для студента. - СПб.: БХВ-Петербург, 2006.- 336 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ
В МАТЕМАТИЧЕСКОМ
МОДЕЛИРОВАНИИ

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ. ЗАДАЧА КОШИ

Методические указания к лабораторным работам
для студентов бакалавриата направления 21.03.01

Составитель *О.Г. Быкова*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой
информатики и компьютерных технологий

Ответственный за выпуск *П.Н. Дмитриев*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 28.07.2016. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,9. Усл.кр.-отт. 2,9. Уч.-изд.л. 2,2. Тираж 200 экз. Заказ 730. С 225.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2