

## ЗАДАНИЕ № 2

### “РАСЧЕТ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ”

1. Для заданной схемы балки построить эпюры  $M$  и  $Q$ .

2. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавровое сечение балки, приняв допускаемое напряжение  $[\sigma]=160$  МПа, и построить эпюру  $\sigma$  в опасном сечении балки.

3. Проверить прочность балки по касательным напряжениям, приняв допускаемое напряжение  $[\tau]=100$  МПа, и построить эпюру  $\tau$  в стенке двутавра для опасного сечения балки.

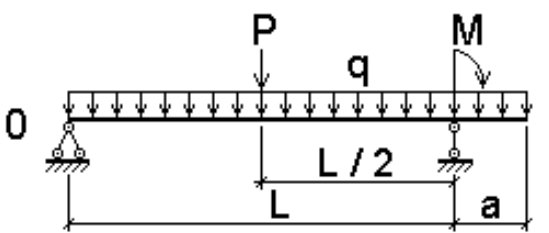
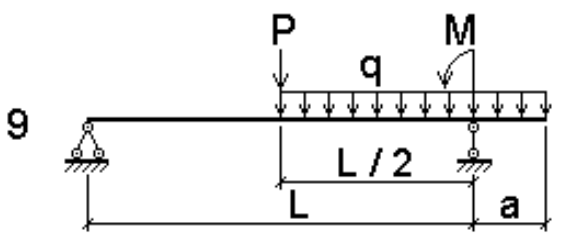
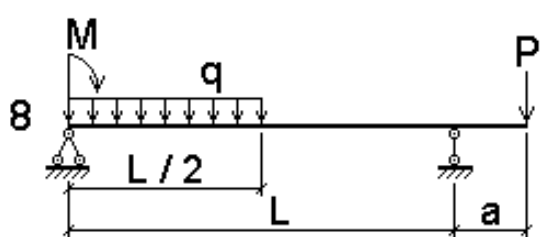
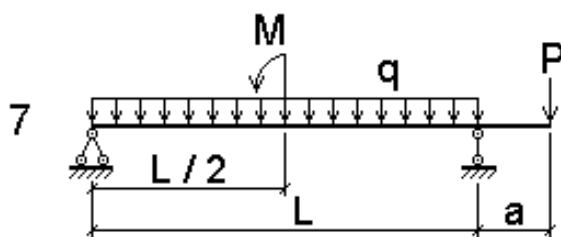
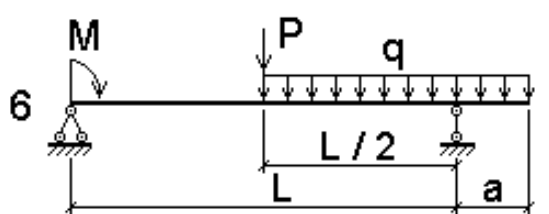
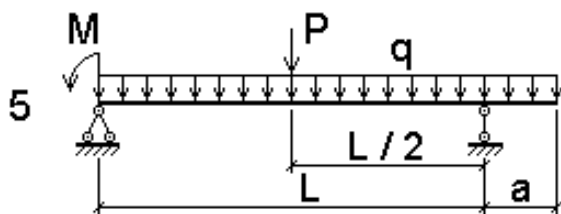
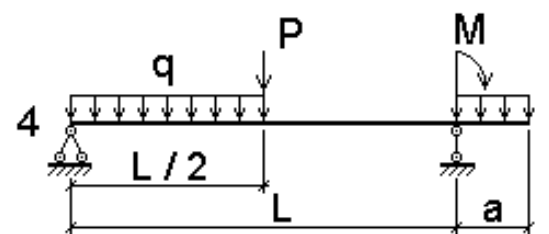
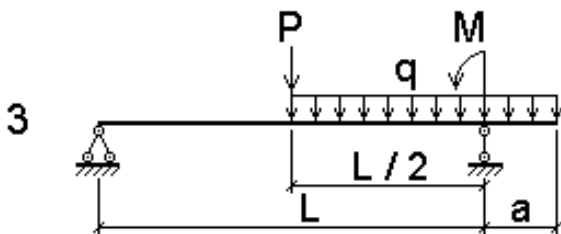
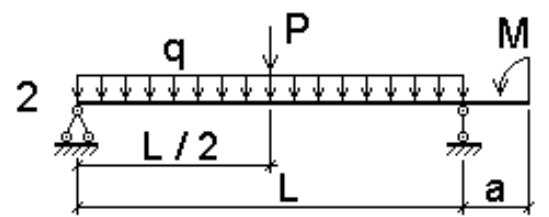
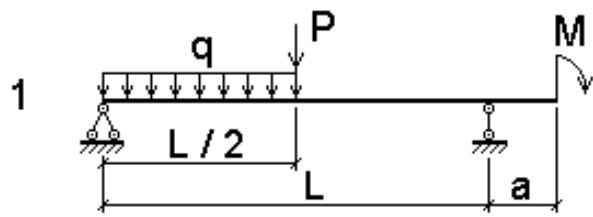
4. Проверить прочность балки по III теории прочности.

Исходные данные принимаются в соответствии с шифром студента, который необходимо получить у преподавателя. Численные данные к РПР-2 определяются по 1-й цифре шифра из следующей таблицы:

Группа	1-я цифра шифра	P кН	q кН/м	M кНм	L м	a м
21	0	20	10	50	4	1
	1	30	20	60	5	2
	2	40	30	40	6	2
	3	50	10	60	7	3
22	0	60	20	50	5	1
	1	40	30	60	6	2
	2	50	10	50	7	2
	3	60	20	60	8	3
23	0	20	30	40	6	2
	1	30	10	60	7	2

	2	50	20	50	8	3
	3	60	30	40	9	3
24	0	40	10	60	4	1
	1	30	30	50	5	2
	2	20	20	40	6	2
	3	50	20	40	7	3

Расчетная схема балки принимается по 2-й цифре шифра:



## **4. Проверка прочности балки при плоском поперечном изгибе**

### **4.1. Общие положения**

Плоским поперечным изгибом называется такое напряженно-деформированное состояние балки, при котором из всех внутренних силовых факторов не равны нулю только поперечная сила в направлении одной оси и изгибающий момент относительно другой главной центральной оси инерции сечения балки.

Плоский поперечный изгиб реализуется, когда нагрузка приложена в продольной плоскости симметрии или приводится к ней в каждом поперечном сечении. Если такой плоскости у балки нет, то нагрузка должна быть приложена в одной из главных плоскостей инерции балки (главная плоскость инерции – это плоскость, проходящая через одну из главных центральных осей поперечного сечения и продольную ось балки).

Проверка прочности предусматривает определение внутренних силовых факторов  $Q(z)$  и  $M(z)$  в каждом сечении балки, нахождение по ним максимальных по модулю нормальных -  $\sigma$ , касательных -  $\tau$  и эквивалентных -  $\sigma_{\text{экв}}$  напряжений в соответствующих точках балки и сравнение названных напряжений с допускаемыми.

Методические указания к выполнению проверки прочности балки и пример расчета приведены в подразделах 4.2 и 4.3.

### **4.2. Методические указания**

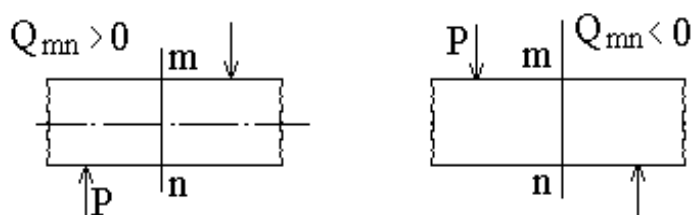
1. Начертить в удобном масштабе расчетную схему балки, указать на ней числовые значения сил, нагрузок, моментов, длин пролетов, консолей и участков, показать реакции опор, пронумеровать участки.

2. Составить уравнения равновесия балки, определить опорные реакции и нанести их значения на схему.

3. Применить метод сечений при определении поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ , построить эпюры  $Q$  и  $M$ . При построении эпюр согласно этому методу следует мысленно разрезать балку на две части в пределах каждого участка произвольно намеченным и зафиксированным по длине поперечным сечением. Причем, фиксированная координата по длине балки для данного поперечного сечения может отсчитываться от общего начала координат слева и справа балки или отдельно в пределах каждого участка.

Отбросить одну часть, например, правую. Заменить ее действие на левую искомыми внутренними усилиями  $Q$  и  $M$ . Найти эти усилия из уравнений равновесия системы сил, приложенных к левой части, включая и сами  $Q$  и  $M$ .

Поперечная сила  $Q$  в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил.



Изгибающий момент  $M$  в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения относительно центра тяжести сечения.

Поперечная сила в сечении балки считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз, и отрицательной – если направлена в противоположные стороны.

Изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз, и



отрицательным – выпуклостью вверх.

Записать аналитические выражения для поперечной силы  $Q(z)$  и изгибающего момента  $M(z)$  для каждого участка балки и вычислить значения  $Q(z)$  и  $M(z)$  на границах каждого участка. Если зависимость для изгибающего момента на участке криволинейна, а поперечная сила на границах этого участка имеет разный знак, то следует определить координату  $z$  на этом участке, где поперечная сила равна нулю, и для этой точки вычислить экстремальное значение изгибающего момента.

По полученным значениям построить графики – эпюры  $Q(z)$  и  $M(z)$ .

4. Используя дифференциальные зависимости при изгибе:

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{d^2M}{dz^2} = q \quad (4.2.1)$$

проверить правильность построения обеих эпюр.

5. Подобрать из условия прочности балки по нормальным напряжениям двутавровое сечение по моменту сопротивления  $W_x$ :

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} \quad (4.2.2)$$

Выписать из сортамента геометрические характеристики сечения  $W_x$ ,  $J_x$  – осевой момент инерции,  $S_x$  – статический момент полусечения,  $s$  – толщина стенки,  $b$  и  $t$  – ширина и толщина полки двутавра.

6. Определить максимальные нормальные напряжения по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \quad (4.2.3)$$

и построить эпюру  $\sigma$  в сечении балки.

7. Проверить прочность балки по касательным напряжениям:

$$\tau = \frac{|Q_{\max}| \cdot S_x}{J_x \cdot s} \leq [\tau] \quad (4.2.4)$$

и построить эпюру касательных напряжений  $\tau$  в стенке двутавра, рассчитав их в точках перехода к полке по формуле:

$$\tau_k = \frac{|Q_{\max}| \cdot b \cdot t \left( \frac{h-t}{2} \right)}{J_x \cdot S} \quad (4.2.5)$$

8. Проверить прочность балки по III теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (4.2.6)$$

Так как расчетное напряжение зависит от  $\sigma$  и  $\tau$ , то проверке подлежит тот элемент материала балки, для которых  $\sigma$  и  $\tau$  будут одновременно возможно большими и это осуществимо при наличии таких двух условий:

а) изгибающий момент и поперечная сила достигают наибольшей величины в одном и том же сечении по длине балки;

б) ширина резко меняется вблизи краев сечения (например, в двутавре или пустотелом прямоугольном профиле). Нормальные и касательные напряжения на уровне перехода от полки к стенке (в точках «к» см. рис.8) для таких профилей имеют величину, близкую максимальной.

Указанные два условия, таким образом, определяют и необходимость дополнительной проверки прочности, а также сечение и точку на нем, для которых эта проверка должна быть сделана.

Если эти условия не имеют места, тогда следует выбрать несколько поперечных сечений по длине балки и несколько точек по высоте сечения, могущих дать наиболее высокие значения расчетного напряжения.

Для двутаврового сечения:

$$\sigma_{\text{к}} = \sigma = -\frac{M_{\text{х}} \cdot Y_{\text{к}}}{J_{\text{х}}} = -\frac{M \left( \frac{h}{2} - t \right)}{J_{\text{х}}} \quad (4.2.7)$$

$$\tau_{\text{к}} = \tau = \frac{Q \cdot S_{\text{х}}^{\text{к}}}{J_{\text{х}} \cdot S} = \frac{Qbt \left( \frac{h-t}{2} \right)}{J_{\text{х}} \cdot S} \quad (4.2.8)$$

Значения  $M$  и  $Q$  в формулах (7) и (8) берутся для одного выбранного сечения.

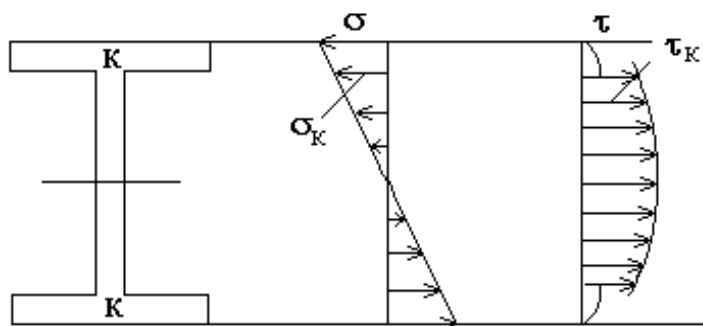


Рис. 8

### 4.3 Пример расчета

Для двутавровой балки (рис. 9а)

Построить эюры  $Q$  и  $M$ .

Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавровое сечение балки, если  $[\sigma] = 160$  МПа.

Построить эюру  $\sigma$  в стенке двутавра.

Проверить прочность балки по касательным напряжениям, если  $[\tau] = 100$  МПа.

Построить эюру  $\tau$  в сечении балки.

Проверить прочность балки по III теории прочности.

#### Исходные данные:

$C = 1$  м;  $a = 2$  м;  $b = 3$  м;  $l = 5$  м;  $q_1 = 20$  кНм;  $q_2 = 40$  кНм;  $M = 100$  кНм;

$P_1 = 40$  кН;  $P_2 = 50$  кН;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $[\tau] = 100$  МПа.

Определение опорных реакций

$$\sum M_a = -M - R_b \cdot \ell + \frac{qa^2}{2} + P_1 a + q_2(b+c) \left( a + \frac{b+c}{2} \right) + P_2(\ell+c) = 0$$

$$R_b = \frac{\frac{qa^2}{2} + P_1 a + \frac{q}{2}(b+c) \left( a + \frac{b+c}{2} \right) + P_2(b+c) - M}{\ell} =$$

$$= \frac{\frac{20 \cdot 4}{2} + 40 \cdot 2 + 40(3+1) \left( 2 + \frac{3+1}{2} \right) + 50(5+1) - 100}{5} = 192 \text{ кН};$$

$$\sum M_b = M - R_a \cdot \ell + q_1 a \left( b + \frac{a}{2} \right) + P_1 b + \frac{q_2 b^2}{2} - P_2 c - \frac{q_2 c^2}{2} = 0;$$

$$R_a = \frac{M + q_1 a \left( b + \frac{a}{2} \right) + P_1 b + \frac{q_2 b^2}{2} - P_2 c - \frac{q_2 c^2}{2}}{\ell} =$$

$$= \frac{100 + 20 \cdot 2 \left( 3 + \frac{2}{2} \right) + 40 \cdot 3 + 40 \cdot \frac{3^2}{2} - 50 \cdot 1 - 40 \cdot \frac{1^2}{2}}{5} = 98 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum Y = R_a + R_b - q_1 a - q_2(b+c) - P_1 - P_2 =$$

$$= 192 + 98 - 20 \cdot 2 - 40(3+1) - 40 - 50 = 0$$

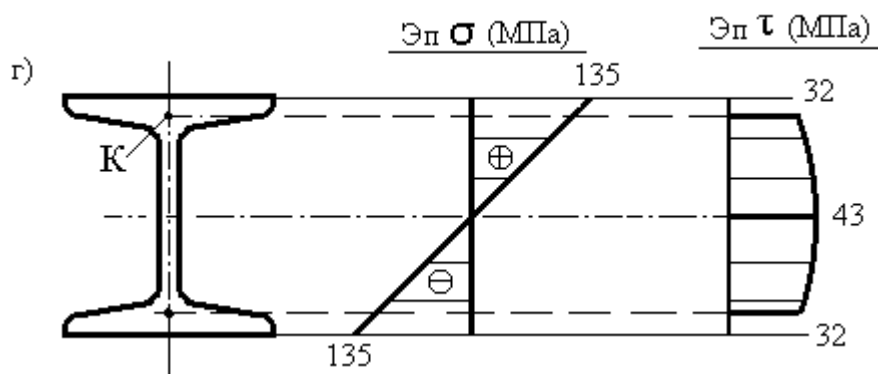
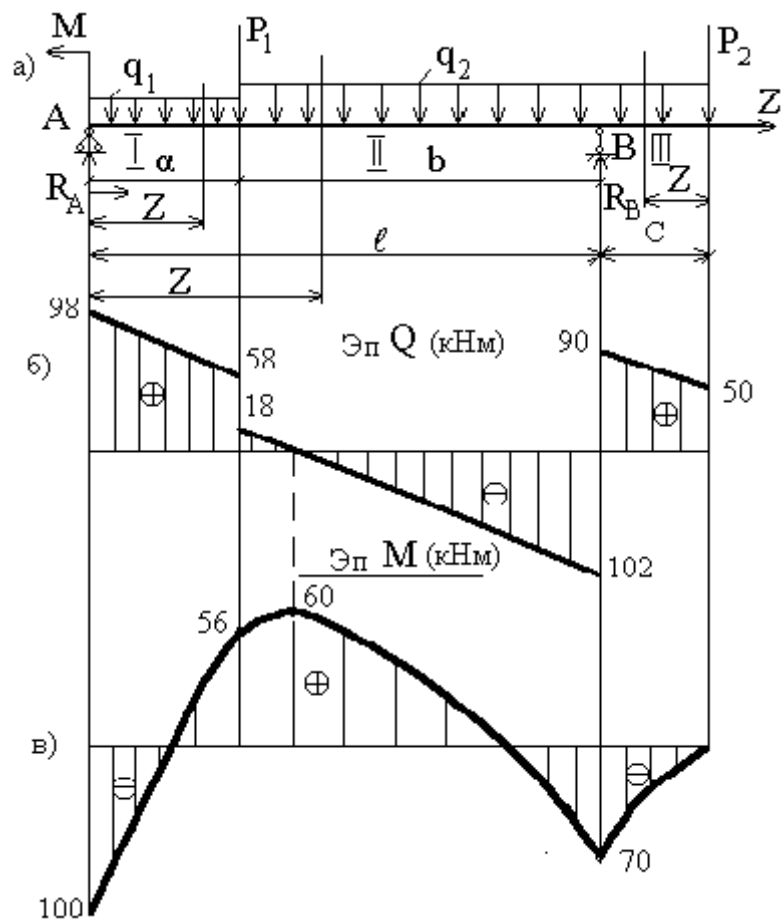


Рис. 9

## 2. Построение эпюры поперечных сил Q

$$Q_1 = R_a - q_1 z;$$

$$\text{При } z=0 \quad Q_1 = R_a = 98 \text{ кН}; \quad \text{При } z=2 \quad Q_1 = 58 \text{ кН};$$

$$Q_2 = R_1 - q_1 a - q_1 (z - a) - P_1;$$

$$\text{При } z=2 \quad Q_2 = 18 \text{ кН}; \quad \text{При } z=5 \quad Q_2 = -102 \text{ кН};$$

$$Q_3 = P_2 + q_2 z;$$

$$\text{При } z=0 \quad Q_3 = P_2 - 50 \text{ кН}; \quad \text{При } z=1 \quad Q_3 = 90 \text{ кН};$$

Эпюра Q показана на рис. 9б.

## 3. Построение эпюры M изгибающих моментов

$$M_1 = -M + R_A z - \frac{q_1 z^2}{2};$$

$$\text{При } z=0 \quad M = -100 \text{ кНм}; \quad \text{При } z=2 \quad M = 56 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -M + R_A z - q_1 a \left( z - \frac{q_1}{2} \right) - P_1 (z - a) - q_2 \frac{(z - a)^2}{2};$$

Найдем экстремум изгибающего момента:

$$Q_2 = R_A - q_1 a - q_2 (z - a) - P_1 = 0$$

Отсюда

$$z = \frac{R_A - q_1 a + q_2 a - P_1}{q_2} = \frac{98 - 20 \cdot 2 + 40 \cdot 2 - 40}{40} = 2,45 \text{ м};$$

$$\text{При } z=2 \quad M_2 = 56 \text{ кНм}; \quad \text{При } z=2,45 \quad M_2 = 60 \text{ кНм};$$

$$\text{При } z=5 \quad M_2 = -70 \text{ кНм};$$

$$M_3 = -P_2 z - \frac{q_2 z^2}{2};$$

$$\text{При } z = 0 \quad M_3 = 0; \quad \text{При } z = 1 \quad M_3 = -70 \text{ кНм};$$

По полученным значениям ординат на участках построена эпюра М (рис. 9в).

1. Из условия прочности по нормальным напряжениям произведем подбор сечения балки.

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,625 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 625 \text{ см}^3$$

Из сортамента выбираем двутавр № 36 с  $W_x = 743 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 13380 \text{ см}^4$ ;  $b = 14,5 \text{ см}$ ;  $S_x = 423 \text{ см}^3$ ;  $t = 1,23 \text{ см}$ ;  $S = 0,75 \text{ см}$ .

2. Определим максимальные нормальные напряжения по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{100 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 135 \text{ МПа}$$

Эпюра нормальных напряжений в сечении показана на рис. 9г. Поскольку максимальный изгибающий момент отрицательный, то верхние волокна растянуты, а нижние сжаты.

3. Проверим прочность балки по касательным напряжениям. Из рис. 9б видно, что максимальная поперечная сила на опоре В. Поэтому проверку по касательным напряжениям проведем при  $Q_{\max} = 102 \text{ кН}$ .

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x}{J_x \cdot s} = \frac{102 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 0,75 \cdot 10^{-2}} = 43 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа.}$$

$$\tau_{\max} = 43 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа.}$$

Определим касательные напряжения в точке К – точке перехода от стенке к полке двутавра.

$$\tau_k = \frac{Q_{\max} \cdot b \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{J_x \cdot s} =$$

$$= \frac{102 \cdot 14,5 \cdot 1,23 \left( \frac{36}{2} - \frac{1,23}{2} \right) \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 0,75 \cdot 10^{-2}} = 31,51 \approx 32 \text{ МПа}$$

Эпюра касательных напряжений в стенке двутавра приведена на рис. 9г.

Проверка прочности балки по третьей теории прочности.

С использованием построенных эпюр Q и M определяем, что опасным сечением будет сечение на опоре А, где M = 100 кН·м; Q = 98 кН.

В опасном сечении в точке перехода от полки к стенке двутавра определим нормальные и касательные напряжения.

$$\sigma = \frac{Mx \left( \frac{h}{2} - t \right)}{J_x} = \frac{100 \cdot 10^3 \left( \frac{36}{2} - 1,23 \right) \cdot 10^{-2}}{13380 \cdot 10^{-8}} = 126 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Qbt \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{J_x \cdot s} = \frac{98 \cdot 10^3 \cdot 14,5 \cdot 1,23 \left( \frac{36}{2} - \frac{1,23}{2} \right) \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 0,75 \cdot 10^{-2}} = 30 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 140 \text{ МПа.}$$