ГЛАВА 4. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4.1. Введение в динамику механической системы

Механической системой называется совокупность материальных точек или тел, движения которых *взаимосвязаны*. Механической системой являются, например, Солнечная планетная система, а также какой-либо механизм или машина.

Различают *изменяемые* и *неизменяемые* механические системы. ***Изменяемой*** называется такая система, взаимное расположение точек которой под действием сил может изменяться. В противном случае система называется ***неизменяемой***.

Механические системы могут быть также *несвободными* и *свободными*. ***Несвободной*** называется такая система, на положение и скорости точек которой наложены наперед заданные и не зависящие от характера движения точек ограничения. Если такие ограничения отсутствуют, то система называется ***свободной***.

Тела, с помощью которых реализуются ограничения, наложенные на движения точек несвободной системы, называются ***связями***; типы связей были рассмотрены в главе 1.

Центром масс механической системы, состоящей из n материальных точек или твердых тел, называется геометрическая точка C в пространстве, радиус-вектор $\bar{r}_C$ которой определяется формулой:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{M}; \tag{4.1}$$

где $\bar{r}_k$ - радиус-вектор некоторой k-ой точки системы относительно системы координат $Oxyz$;

$M = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ - масса системы, равная сумме масс всех ее точек;

$\bar{r}_C$ - радиус-вектор центра масс C.

Декартовы координаты этой точки будут соответственно равны

$$x_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}; \; y_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}; \; z_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}. \qquad (4.2)$$

В случае, если рассматривается твердое тело или система твердых тел, понятие центра масс совпадает с понятием центра тяжести.

Силы, приложенные к точкам системы можно разделить на *внешние* и *внутренние*. ***Внешними*** называются силы, действующие на систему извне. ***Внутренними*** называются силы взаимодействия между материальными точками самой системы. Отметим, что в состав внешних и внутренних сил могут входить как *активные силы*, так и *реакции связей*. В дальнейшем условимся обозначать внешнюю силу $\overline{F}^{e}$, а внутреннюю - $\overline{F}^{i}$.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Обозначим через $\overline{F}_k^{\,e}$ и $\overline{F}_k^{\,i}$ равнодействующие соответственно внешних и внутренних сил, приложенных к точке системы с номером k. Движение этой системы может быть описано следующими n уравнениями, которые являются ***основными уравнениями динамики материальной точки***, записанными для каждой из точек системы:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^{\,e} + \bar{F}_k^{\,i} \quad (k = 1,2...n), \tag{4.3}$$

где m_k и $\bar{a}_k$ - масса и ускорение k -ой точки системы.

В проекциях на оси инерциальной декартовой системы координат имеем:

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^{\,e} + F_{kx}^{\,i};\ m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^{\,e} + F_{ky}^{\,i};\ m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^{\,e} + F_{kz}^{\,i}, \tag{4.4}$$

$$(k = 1,2...n).$$

Уравнения (4.4) представляют собой систему дифференциальных уравнений движения материальных точек всей системы.

Решение задачи динамики механической системы путем интегрирования системы $3n$ дифференциальных уравнений (4.4) практически нереализуемо, поскольку внутренние силы и входящие в число внешних сил реакции связей заранее неизвестны, а число n точек системы может быть достаточно велико.

В связи с этим в теоретической механике разработаны методы, позволяющие в какой-то степени обойти указанные трудности. При этом в рассмотрение вводятся векторные и скалярные величины, характеризующие движение механической системы в целом и называемые ***мерами движения*** системы. К числу таких мер относятся ***количество движения, момент количества движения (кинетический момент) и кинетическая энергия механической системы***.

Связь между этими мерами движения и мерами действия сил выражается с помощью так называемых ***общих теорем динамики***.

Одну из таких общих теорем – ***теорему об изменении кинетической энергии механической системы*** и будем рассматривать далее, но перед этим введем некоторые необходимые понятия.

4.2. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси

Рассмотрим частный случай механической системы – ***твердое тело***, которое вращается вокруг неподвижной оси, с которой совместим координатную ось Oz.

Осевым моментом инерции тела относительно оси Oz называется величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний до оси вращения:

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k{}^2 \,,\ (кг \cdot м^2)\,. \tag{4.5}$$

Здесь m_k и h_k - соответственно масса и расстояние до оси вращения некоторой точки M_k вращающегося тела.

Из формулы (4.5) следует, что момент инерции является постоянной, положительной, скалярной величиной, не зависящей от движения тела и характеризующей распределение масс точек тела относительно оси вращения.

Если при поступательном движении твердого тела ***мерой инертности*** (способностью тела сопротивляться изменению его скорости) является масса, то при вращательном движении тела мерой инертности тела является осевой момент инерции.

Моменты инерции однородных тел простой геометрической формы вычисляются путем интегрирования, их значения приводятся в технических справочниках и в учебных пособиях по механике.

Моменты инерции неоднородных тел сложной конфигурации вычисляются как путем их мысленного расчленения на фрагменты в виде простых геометрических форм, так и определяются экспериментально.

Осевой момент инерции можно выразить через ***радиус инерции*** i_z тела по формуле:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}, \tag{4.6}$$

где M - масса тела.

Величины осевых моментов инерции некоторых однородных симметричных тел приводятся ниже.

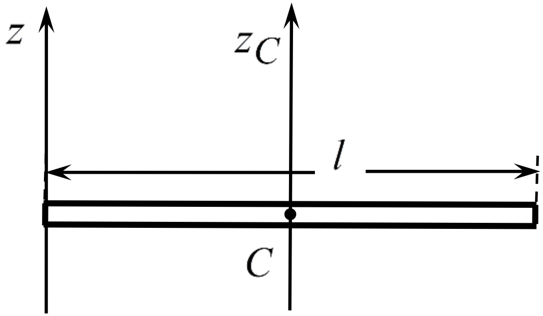


Рис. 4.1

А) Однородный тонкий стержень (рис. 4.1)

$$I_z = \frac{Ml^2}{3}, \quad I_{z_C} = \frac{Ml^2}{12}$$

Б) Круглое тонкое (рис. 4.2) кольцо (окружность)

$$I_z = Mr^2$$

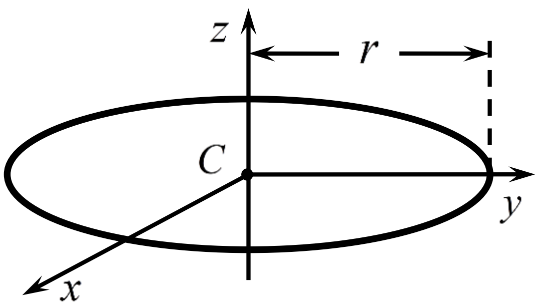


Рис. 4.2

В) Круглый диск (рис. 4.3)

$$I_z = \frac{Mr^2}{2}$$

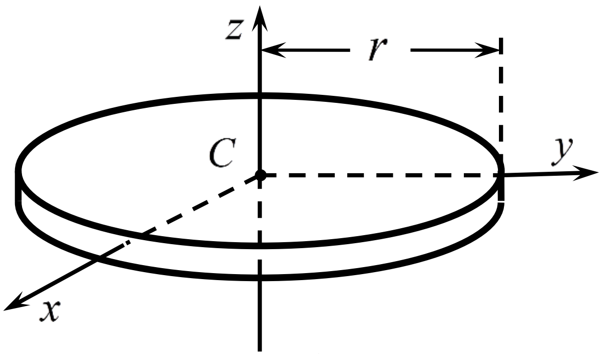


Рис. 4.3

Г) Круглый цилиндр (рис. 4.4)

$$I_z = \frac{Mr^2}{2}$$

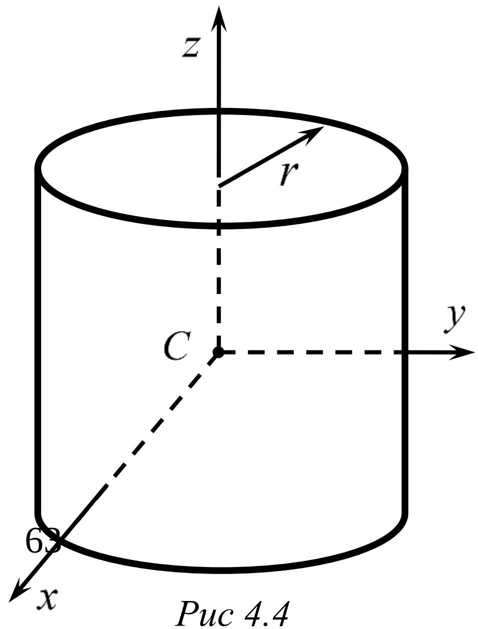


Рис 4.4

Если известен момент инерции относительно ***центральной оси*** (оси, проходящей через центр масс C тела), то можно определить момент инерции тела относительно любой оси, параллельной центральной. При этом используется теорема ***Гюйгенса*** о моментах инерции относительно параллельных осей (рис. 4.5): ***момент инерции тела относительно некоторой оси z равен моменту инерции относительно центральной оси z_C, проходящей через центр масс тела параллельно оси z, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями***.

То есть

$$I_z = I_{z_C} + Ml^2 . \quad (4.7)$$

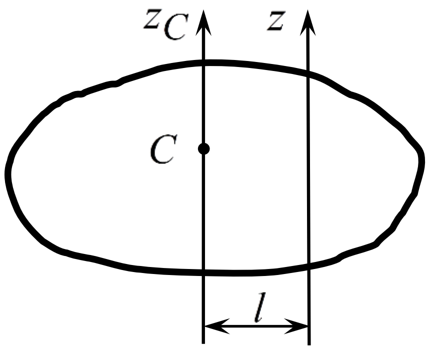


Рис. 4.5

4.3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

4.3.1. Определение кинетической энергии

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная положительная мера ее движения, определяемая формулой

$$T = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

где m - масса точки; v - модуль ее скорости.

Кинетической энергией механической системы называется арифметическая сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k v_k{}^2 . \tag{4.8}$$

Если в качестве системы рассматривается механизм или машина, то кинетическая энергия определяется следующей формулой

$$T = \sum_{j=1}^{N} T_j \quad (j = 1,2 \ldots N) , \tag{4.9}$$

где T_j - кинетическая энергия подвижного звена механизма с номером j, N - число подвижных звеньев, которые рассматриваются как твердые тела.

4.3.2. Кинетическая энергия твердого тела

Используя общую формулу (4.8) можно получить выражения для кинетической энергии твердого тела при различных случаях его движения.

А) Поступательное движение.

При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек, в том числе и скорость $\bar{v}_C$ его центра масс, одинаковы, поэтому:

$$\bar{v}_k = \bar{v}_C;\ v_k = v_C,\ (k = 1,2,...n).$$

Тогда кинетическая энергия тела будет равна:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k {v_k}^2 = \frac{{v_C}^2}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{1}{2} M{v_C}^2. \qquad (4.10)$$

Кинетическая энергия тела вычисляется как для точки C (центра масс тела), в которой сосредоточена вся масса тела.

Б) Вращение вокруг неподвижной оси.

В этом случае модуль скорости любой точки тела будет равен $v_k = h_k\omega$, а кинетическая энергия тела выразится как:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k {v_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k {h_k}^2}{2}\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k {h_k}^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \qquad (4.11)$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения z.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения его осевого момента инерции на квадрат угловой скорости.

В) Плоское движение.

Из кинематики известно, что плоское движение можно рассматривать как сложное, состоящее из поступательного движения вместе с полюсом (за который мы здесь выбираем центр масс тела C) и вращательного движения вокруг оси, проходящей через полюс (центр масс). Тогда можно написать:

$$T = \frac{1}{2} M v_C{}^2 + \frac{1}{2} I_{z_C} \omega^2 . \qquad (4.12)$$

Здесь I_{z_C} - осевой момент инерции относительно оси z, проходящей через центр масс C.

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего плоское движение, равна арифметической сумме кинетической энергии поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии его вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

4.3.3. Работа и мощность силы

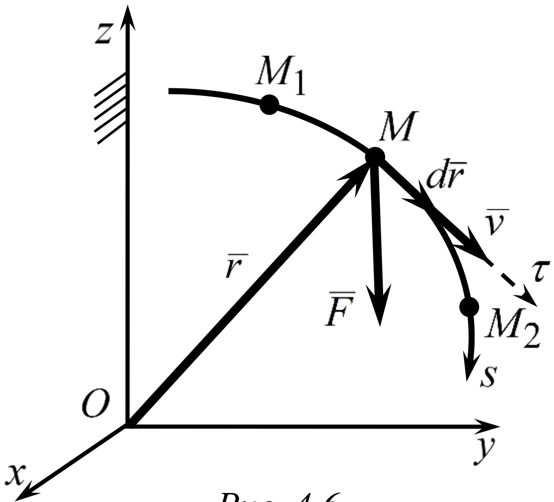


Рис. 4.6

Работой силы *называется мера действия силы на некотором перемещении точки ее приложения.*

Пусть точка M под действием приложенной к ней силы $\bar{F}$ движется по некоторой траектории и совершает при этом элементарное перемещение $d\bar{r}$ (рис. 4.6).

Тогда ***элементарной работой силы*** $\bar{F}$ называется величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения:

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r}, \qquad (4.13)$$

где $d\bar{r}$ - вектор элементарного перемещения точки M за время dt, направленного так же, как и вектор скорости точки $\bar{v}$. Это следует из соотношения $d\bar{r} = \bar{v}dt$, полученного из известной формулы $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$.

Элементарная работа здесь обозначается δA, а не dA, так как в общем случае она может не являться полным дифференциалом функции координат A.

Если отсчитывать вдоль траектории точки дуговую координату s, то формулу 4.13 можно переписать в виде:

$$\delta A = F_{\tau} ds, \tag{4.14}$$

где F_{τ}- проекция вектора силы на касательную ось $M\tau$, ds - дифференциал дуговой координаты s.

Обозначая проекции силы $\overline{F}$ на оси координат $Oxyz$ как F_x, F_y, F_z, а проекции элементарного перемещения $d\overline{r}$ как dx, dy, dz, можно записать выражение (4.13) для элементарной работы в следующем виде:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{4.15}$$

Работа силы $\overline{F}$ ***на конечном перемещении*** точки между положениями на траектории M_1 и M_2 (рис. 4.6) определяется как интегральная сумма элементарных работ, то есть как криволинейный интеграл от элементарной работы, взятый по дуге $M_1 M_2$ траектории:

$$A = \int\limits_{M_1M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right). \qquad (4.16)$$

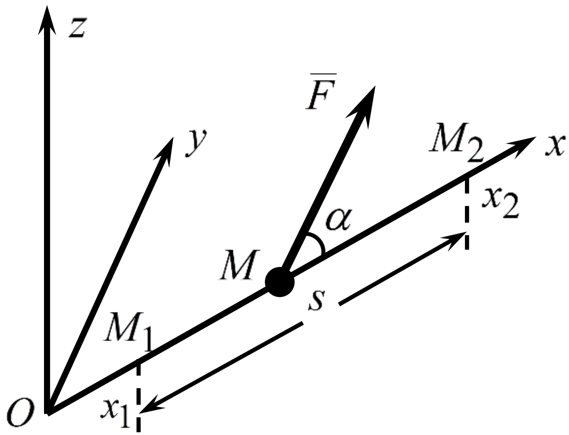


Рис. 4.7

Эта работа в общем случае может быть вычислена, если известна сила $\overline{F}$, начальная M_1 и конечная M_2 точки пути, вид траектории M_1M_2, а также известен закон движения точки по траектории.

Рассмотрим частный случай, когда точка M под действием *постоянной* силы $\overline{F}$ движется прямолинейно, например, вдоль координатной оси *Ox* (рис. 4.7).

Итак, $\overline{F} = \overline{const}$, $F_x = F\cos\alpha, F_y = F_z = 0$.

Тогда с учетом формулы 4.16 получим:

$$A = \int\limits_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int\limits_{M_1M_2} F\cos\alpha dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} F\cos\alpha dx = F\cos\alpha(x_2 - x_1) = Fs\cos\alpha$$

Таким образом: $A = Fs\cos\alpha$ (4.17)

Работа силы в этом случае равна произведению модуля силы на путь, пройденный точкой под действием силы, и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения точки.

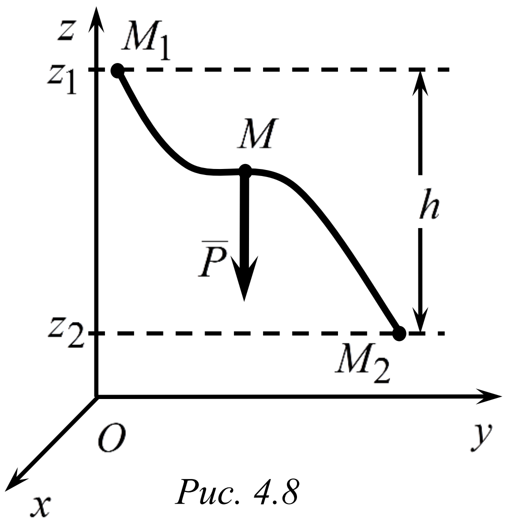


Рис. 4.8

Определим теперь работу *силы тяжести* точки M на некотором ее перемещении M_1M_2 (рис. 4.8). Считая это перемещение малым по сравнению с радиусом Земли, можно допустить, что модуль и направление силы тяжести точки $\overline{P} = m\overline{g}$ являются постоянными. Выберем систему отсчета $Oxyz$, направив ось Oz вверх по вертикали.

Используя формулу (4.15) и учитывая, что проекции силы тяжести на оси координат равны

$$P_x = P_y = 0;\ P_z = -mg\,,$$

получим выражение для элементарной работы силы тяжести: $\delta A = -mgdz$.

Работа силы тяжести точки на конечном перемещении M_1M_2 будет определяться определенным интегралом:

$$A = \int\limits_{M_1M_2} P_x dx + P_y dy + P_z dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} -mgdz = mg(z_1 - z_2) = mgh.$$

Здесь $h = z_1 - z_2$ - разность высот точки M в начальном и конечном положениях. Если $z_1 \rangle z_2$ (точка опускается), то работа силы тяжести положительна, если $z_1 \langle z_2$ (точка поднимается), то работа отрицательна.

Окончательно получим:

$$A = \pm mgh. \tag{4.18}$$

Таким образом, *работа силы тяжести материальной точки равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки (при опускании точки работа положительна, при подъеме – отрицательна)*.

Из формулы (4.18) следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории и закона движения точки по траектории. На замкнутой траектории эта работа равна нулю, так как тогда $h = 0$.

В случае *механической системы* (в частности для твердого тела) работа силы тяжести определяется по формуле:

$$A = \pm M g h_C, \quad (4.19)$$

где h_C - вертикальное перемещение центра масс, а M - масса системы (твердого тела).

Определим теперь работу *силы упругости* $\overline{F}_{упр}$, действующую на материальную точку M (рис 4.9). Эта сила всегда направлена к положению равновесия O, по модулю пропорциональна расстоянию r точки от этого положения и определяется выражением:

$$\overline{F}_{упр} = -c\overline{r}, \quad (4.20)$$

где $\overline{r}$ - радиус-вектор точки M относительно точки O, c - коэффициент жесткости упругого элемента, например, пружины.

Используя формулу (4.14), находим элементарную работу силы упругости $\overline{F}_{упр}$:

$$\delta A = \overline{F}_{упр} \cdot d\overline{r} = -c\overline{r} \cdot d\overline{r}.$$

Легко проверить, что $\bar{r}\cdot d\bar{r}=\dfrac{1}{2}d\left(r^2\right)$. (4.19)

В самом деле, имеем:

$$\frac{1}{2}d\left(r^2\right)=\frac{1}{2}d\left(\bar{r}\cdot\bar{r}\right)=\frac{1}{2}\left(d\bar{r}\cdot\bar{r}+\bar{r}\cdot d\bar{r}\right)=\bar{r}\cdot d\bar{r}\,.$$

Тогда работа силы упругости равна:

$$A=\int_{M_1}^{M_2}\delta A=-\frac{1}{2}c\int_{r_1}^{r_2}d\left(r^2\right)=-\frac{1}{2}c\left(r_2{}^2-r_1{}^2\right),$$

или окончательно

$$A=\frac{1}{2}c\left(r_1{}^2-r_2{}^2\right). \tag{4.22}$$

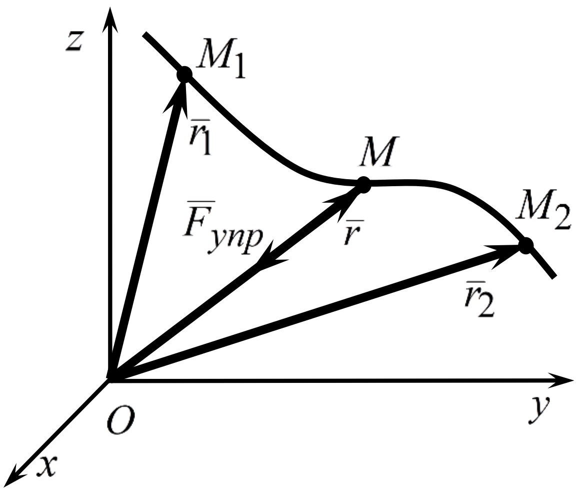


Рис. 4.9

Таким образом, *работа силы упругости* пропорциональна разности квадратов начального и конечного отклонений точки от положения равновесия. Подобно работе силы тяжести, работа силы упругости не зависит от вида траектории и закона движения точки по траектории. На замкнутой траектории эта работа равна нулю, так как тогда $r_1 = r_2$.

Если работа производится *пружиной*, то величина r в формуле (4.22) заменяется величиной Δ *деформации пружины* в начальном и конечном положениях.

***Мощностью силы** называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени*. Эта величина определяется следующим образом:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \overline{F} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \quad (4.23)$$

Приведем далее размерности работы и мощности в системе СИ и в технической системе единиц МКГСС.

Размерность работы:

$$\text{СИ: } [A] = н \cdot м = Дж; \quad \text{МКГСС: } [A] = кгс \cdot м$$

Размерность мощности:

$$\text{СИ: } [N] = \frac{н \cdot м}{с} = \frac{Дж}{с} = Вт, \quad \text{МКГСС: } [N] = \frac{кгс \cdot м}{с}$$

Внесистемная единица измерения мощности – лошадиная сила (*л.с.*):

$$1\,л.с. = 75\frac{кгс \cdot м}{с} = 736\,Вт$$

До сих пор речь шла об одной материальной точке; рассмотрим теперь ***механическую систему***, состоящую из n материальных точек и к которой приложена система внешних сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ... \overline{F}_n$. В этом случае работа и мощность такой системы сил определятся как сумма работ и мощностей всех приложенных к механической системе сил:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k)\,; \quad N = \sum_{k=1}^{n} N(\overline{F}_k)\,. \tag{4.24}$$

Рассмотрим теперь частный случай механической системы - ***твердое тело***, вращающееся с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси Oz под действием системы внешних сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ... \overline{F}_n$.

Предположим, что под действием приложенных сил тело повернулось за время $t_2 - t_1$ на угол $\varphi_2 - \varphi_1$, тогда работу системы сил на этом перемещении можно определить следующим образом:

$$A = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi \qquad (4.25)$$

где M_z - проекция главного момента $\overline{M}_O = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k)$ системы приложенных к телу сил на ось Oz, то есть главный момент системы сил относительно оси Oz.

Величина M_z носит название ***вращающего момента***.

Если вращающий момент постоянен $M_z = const$, то работа равна произведению момента на угол φ поворота тела, то есть

$$A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1) = M_z\varphi . \qquad (4.26)$$

Мощность системы сил, приложенных к вращающемуся телу, определится формулой:

$$N = M_z \cdot \omega \qquad (4.27)$$

4.3.4. Формулировка теоремы об изменении кинетической энергии

Рассмотрим механическую систему, движущуюся под действием совокупности внешних и внутренних сил.

В этом случае теорема об изменении кинетической энергии системы формулируется следующим образом: ***изменение кинетической энергии механической системы на некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил на этом перемещении.***

Теорема выражается следующим уравнением:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k{}^e + \sum_{k=1}^{n} A_k{}^i \,. \tag{4.28}$$

Здесь T_0 и T - значения кинетической энергии системы в начале и конце ее перемещения.

Продифференцировав обе части уравнения (4.28) по времени и учитывая, что $T_0 = const$, а также формулу (4.23), получим:

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i \,, \tag{4.29}$$

где N^e и N^i - суммы мощностей всех внешних и внутренних сил.

Уравнение (4.29) выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в *дифференциальной форме*: ***производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех действующих на систему внешних и внутренних сил***.

Если рассматриваемая механическая система является ***неизменяемой*** (в частности, если рассматривается ***твердое тело***), то сумма внутренних сил в этом случае равна нулю и в уравнениях (4.28) и (4.29) в правых частях остаются лишь первые слагаемые

4.4. Задание 4. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Рассматривается механическая система с одной степенью свободы, состоящая из трех твердых тел, которые совершают поступательное или вращательное движения. Для определения скорости поступательно движущегося тела применяется теорема об изменении кинетической энергии.

Пример выполнения задания

Механическая система состоит из неоднородного диска 1, однородного диска 2 и груза 3 (рис. 4.10).

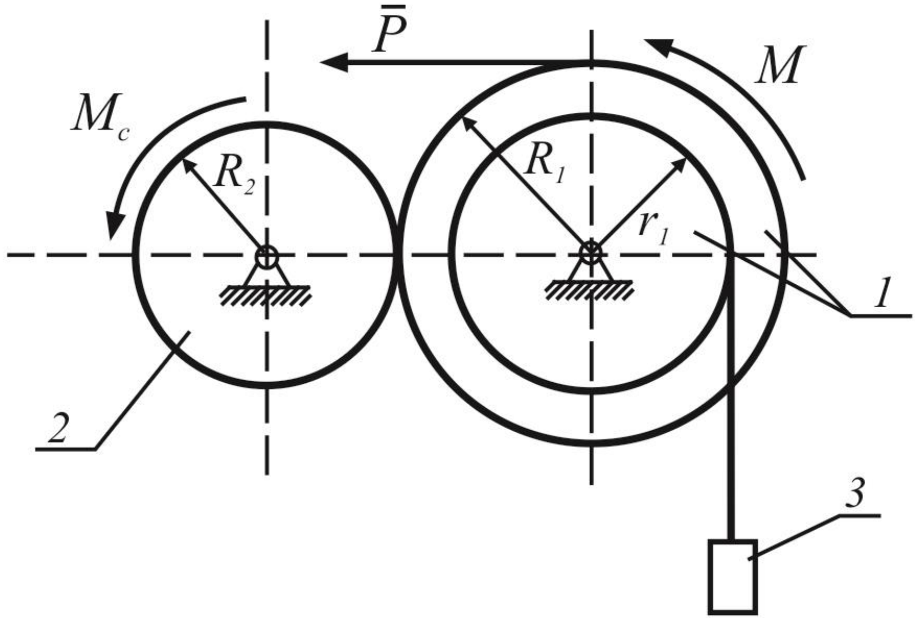


Рис 4.10. Исходная схема изучаемой механической системы

Заданы следующие параметры системы: m_1, m_2, m_3 – массы тел; R_1, r_1 – радиусы внешней и внутренней окружностей диска 1; i_1 – радиус инерции диска 1; R_2 – радиус диска 2.

Рассматриваемая механическая система начинает движение из состояния покоя под действием постоянной силы $\overline{P}$ и постоянного момента M, приложенных к диску 1. На ведомый диск 2 действует постоянный момент сил сопротивления M_c.

Определить скорость груза 3 после его перемещения на расстояние s.

Решение

Решение данной задачи основывается на применении теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k{}^e, \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия системы в конечный момент времени, когда груз 3 переместился на расстояние s; T_0 – начальная кинетическая энергия

($T_0 = 0$); $\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ - сумма работ внешних сил и моментов на заданном перемещении рассматриваемой системы.

Конечная кинетическая энергия T равна сумме кинетических энергий вращательных движений дисков 1 и 2 и поступательного движения груза 3:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 \qquad (2)$$

где I_1, I_2 - осевые моменты инерции дисков 1 и 2; ω_1, ω_2 - их угловые скорости; v_3 - скорость груза 3.

Выразим кинетическую энергию T через искомую скорость v_3 (рис.4.11). Из рис. 4.11 видно, что угловая скорость $\omega_1 = \dfrac{v_3}{r_1}$. Скорость точки E контакта дисков 1 и 2 $v_E = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$.

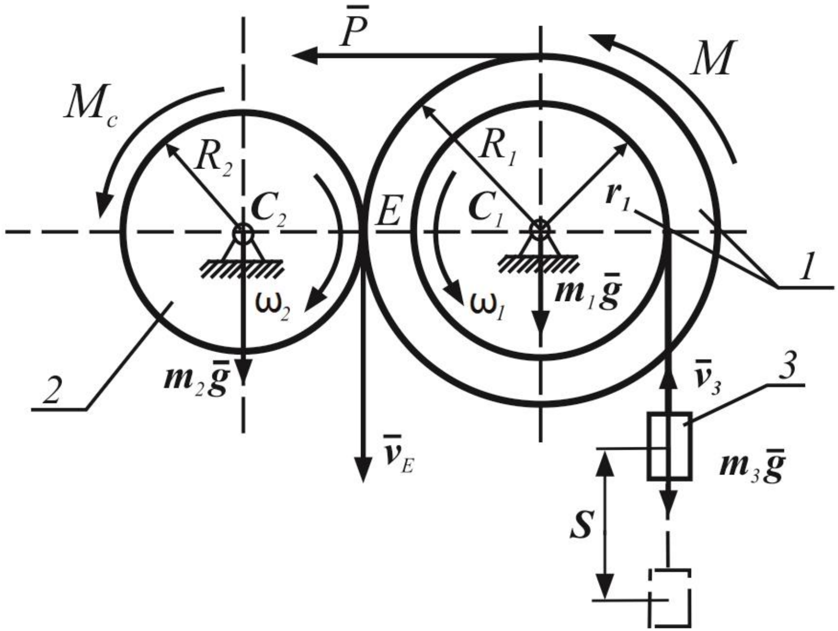


Рис. 4.11. Схема системы при решении данного примера

Следовательно, угловая скорость диска 2 равна:

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_1 = \frac{R_1 v_3}{r_1 R_2}$$

Моменты инерции дисков 1 и 2 равны соответственно:

$$I_1 = m_1 i_1^{\,2}, \quad I_2 = \frac{m_2 R_2^{\,2}}{2}$$

В результате подстановки этих формул в уравнение (2) получаем кинетическую энергию T в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} m_{np} v_3^{\,2}, \tag{3}$$

где $m_{np} = m_1\left(\frac{i_1}{r_1}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^2 + m_3$ - ***приведенная масса*** рассматриваемой системы.

Сумма работ вешних сил и моментов, действующих на рассматриваемую механическую систему, равна

$$\sum_{k=1}^{n} A_k{}^e = A(\overline{P}) + A(M) + A(M_c) + A(m_1\overline{g}) + A(m_2\overline{g}) + A(m_3\overline{g}), \quad (4)$$

где

$A(\overline{P}) = (PR_1)\varphi_1$ - работа постоянной силы $\overline{P}$, равная произведению ее момента PR_1 на угол поворота φ_1 диска 1;

$A(M) = M\varphi_1$ - работа постоянного момента M;

$A(M_c) = -M_c\varphi_2$ - работа постоянного момента M_c сил сопротивления;

$A(m_1\overline{g}) = 0$, $A(m_2\overline{g}) = 0$ - работы сил тяжести, действующих на диски 1 и 2; эти работы равны нулю, т.к. центры тяжести C_1 и C_2 этих дисков остаются постоянными;

$A(m_3\overline{g}) = -m_3gs$ - работа силы тяжести, действующей на груз 3, равная взятому со знаком «минус» произведению силы тяжести m_3g на высоту подъема s груза 3.

Кроме вышеперечисленных сил и моментов на систему действуют также ***динамические реакции***, приложенные в шарнирах C_1 и C_2. Работы этих реакций из-за неподвижности шарниров C_1 и C_2 равны нулю и на рис. 4.11 они не показаны.

Выразим углы поворота φ_1 и φ_2 дисков 1 и 2 через путь s, пройденный грузом 3. Воспользуемся для этого равенствами $\omega_1 = \dfrac{v_3}{r_1}$ и $\omega_2 = \dfrac{R_1 v_3}{r_1 R_2}$, в которых $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$, $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$, $v_3 == \dot{s}$.

Интегрируя эти равенства по времени с нулевыми начальными данными, получаем: $\varphi_1 = \dfrac{s}{r_1}$; $\varphi_2 = \dfrac{R_1 s}{R_2 r_1}$. После подстановки этих выражений для φ_1 и φ_2 в уравнение (4) сумма работ внешних сил и моментов записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_k{}^e = \left(P\frac{R_1}{r_1} + M\frac{1}{r_1} - M_c\frac{R_1}{R_2 r_1} - m_3 g \right) s = Q_s s, \qquad (5)$$

где $Q_s = P\dfrac{R_1}{r_1} + M\dfrac{1}{r_1} - M_c\dfrac{R_1}{R_2 r_1} - m_3 g$ - ***обобщенная сила***, соответствующая координате s.

С учетом полученных выражений для кинетической энергии (3) и суммы работ (5) формулу (1) для теоремы об изменении кинетической энергии получаем в следующем окончательном виде:

$$\frac{1}{2}m_{np}{v_3}^2 = Q_s s\,.$$

Отсюда получим, что скорость груза 3, начавшего движение из состояния покоя, после перемещения на расстояние s равна:

$$v_3 = \sqrt{\frac{2Q_s s}{m_{np}}}\,, \tag{6}$$

где приведенная масса системы

$$m_{np} = m_1\left(\frac{i_1}{r_1}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^2 + m_3, \tag{7}$$

а обобщенная сила

$$Q_s = P\frac{R_1}{r_1} + M\frac{1}{r_1} - M_c\frac{R_1}{R_2 r_1} - m_3 g \tag{8}$$

Исходные данные для выполнения самостоятельной работы

Механическая система, состоящая из дисков 1 и 2 и груза 3, начинает движение в вертикальной плоскости из состояния покоя под действием постоянного момента M или постоянной силы P. На диск 2 действует постоянный момент сил сопротивления M_c.

Определить скорость v_3 груза 3 после его перемещения на расстояние s.

Схемы и параметры механических систем приведены в табл. 4.1, где используются следующие обозначения:

m_1 – масса диска 1;

m_2 – масса диска 2;

m_3 – масса груза 3;

R_1, r_1 – радиусы большой и малой окружностей диска 1;

i_1 – радиус инерции диска 1 (если i_1 не задан, то диск 1 считается однородным диском);

R_2, r_2 – радиусы большой и малой окружностей диска 2;

i_2 – радиус инерции диска 2 (если i_2 не задан, то диск 2 считается однородным диском);

M – постоянный движущий момент;

P – постоянная движущая сила;

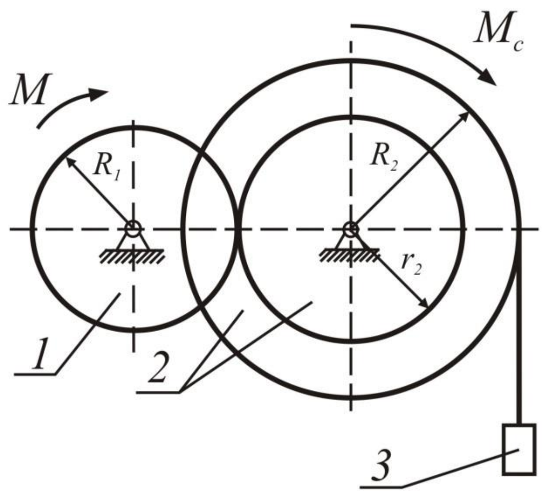
M_c – постоянный момент сил сопротивления;

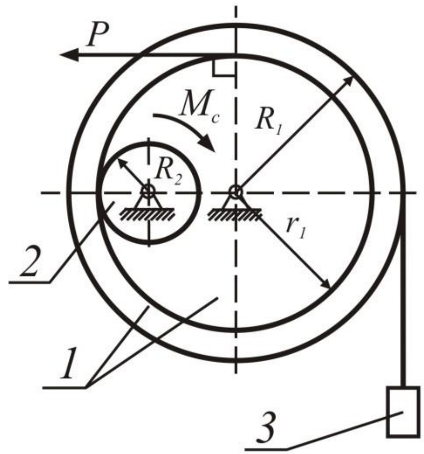
T_0 - начальная кинетическая энергия данной системы ($T_0 = 0$);

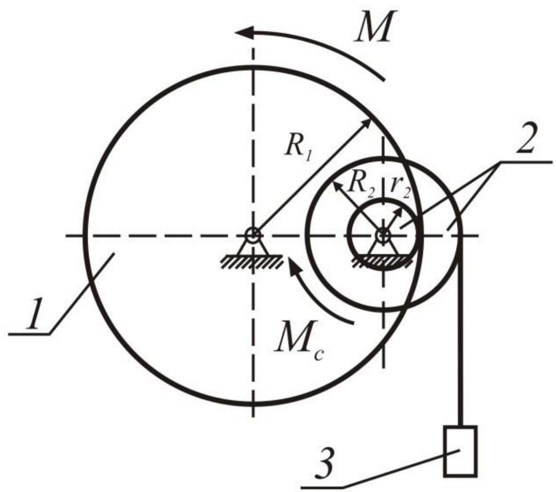
s – расстояние, пройденное грузом 3;

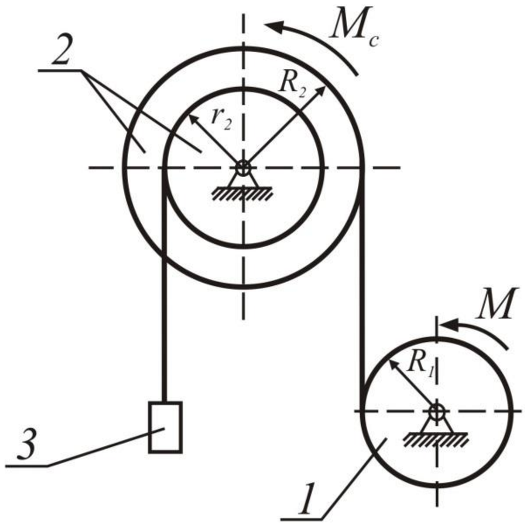
v_3 – искомая скорость груза 3 в конечном положении механической системы.

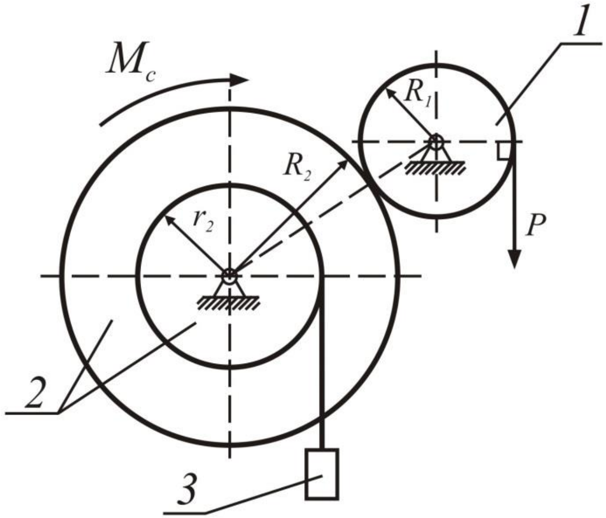
Таблица 4.1

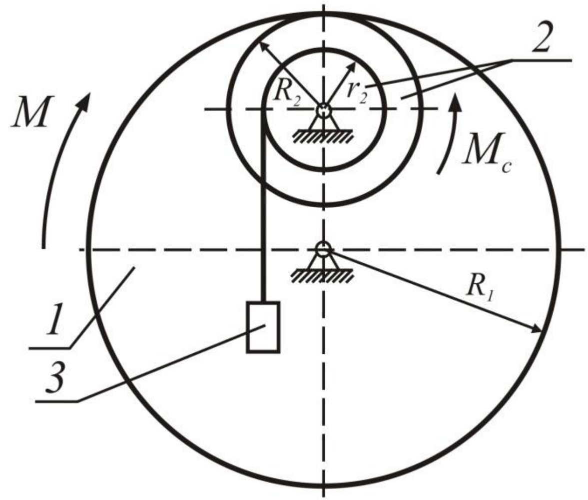
№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
1		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, R_2, r_2, i_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

2		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1, R_2; P = const; $M_с$ = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>
</td>
<td>Дано: m_1, m_2, m_3;
R_1, i_1;
R_2, r_2, i_2;
M = const;
M_c = const;
$T_0 = 0$, s.
<hr>Найти: v_3.</td>
</tr>
</table>

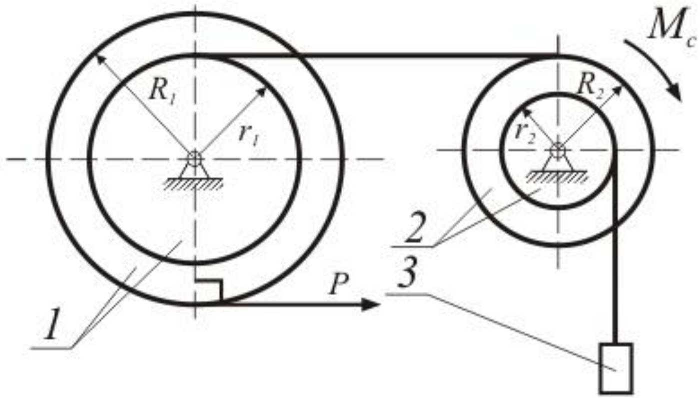
№ вар.	Исходная схема	Параметры системы
4		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, R_2, r_2, i_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

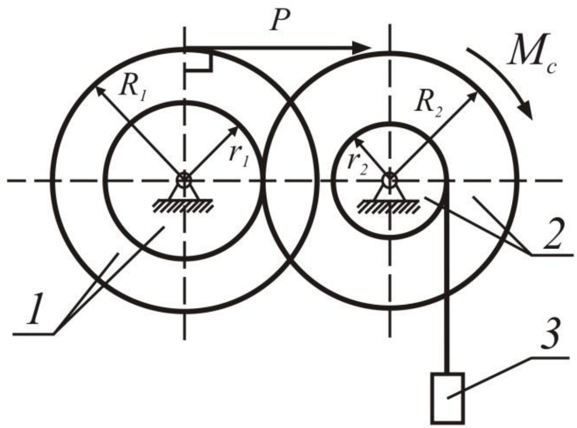
5		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, R_2, r_2, i_2; P = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

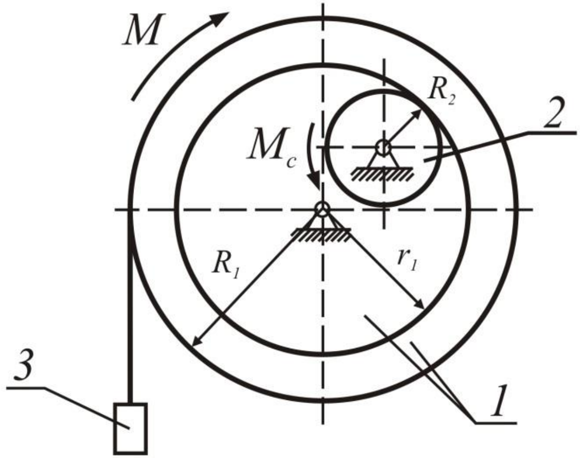
6		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, i_1; R_2, r_2, i_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

Продолжение таблицы 4.1

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы

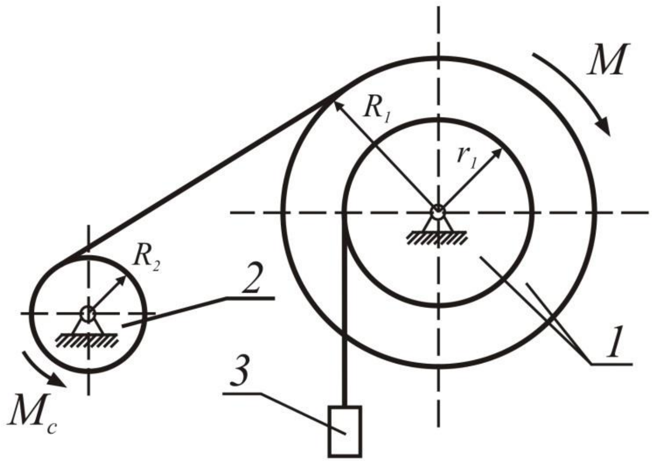
7		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; P = const; $M_\text{с}$ = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

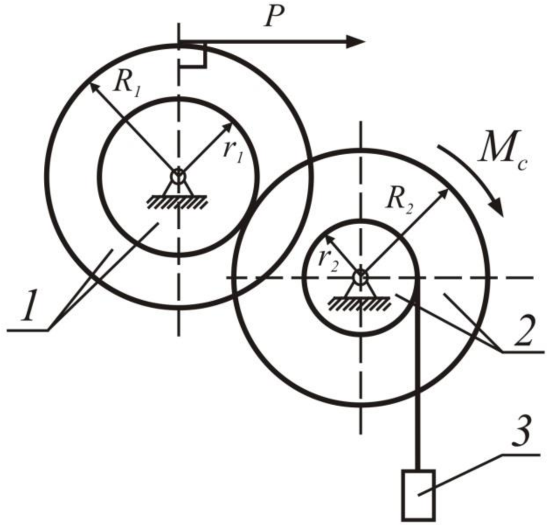
8		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; P = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

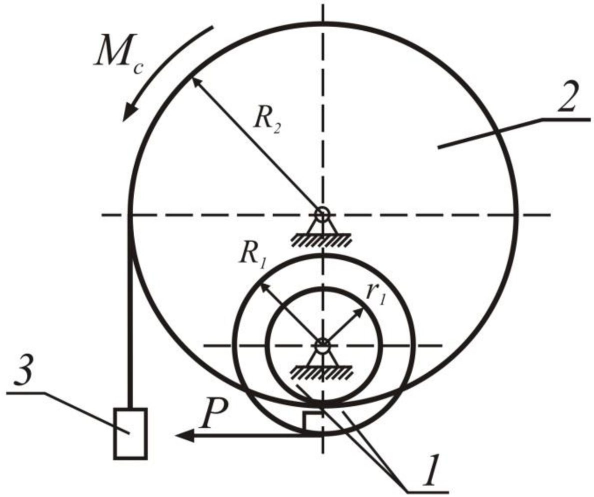
9		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1, R_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

Продолжение таблицы 4.1

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы

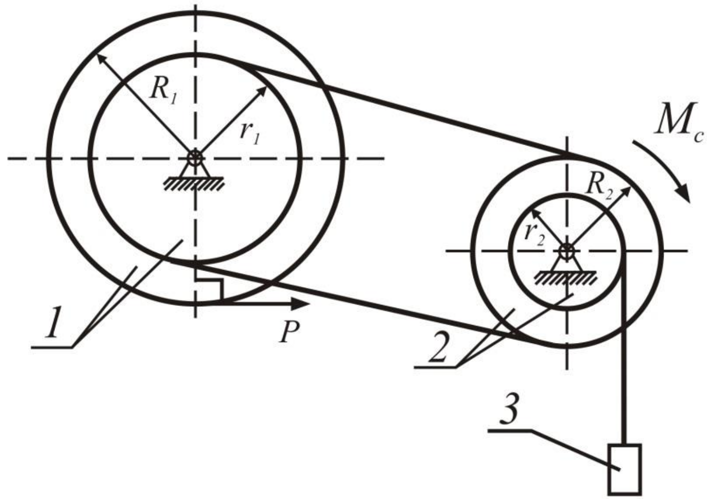
10		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1, R_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

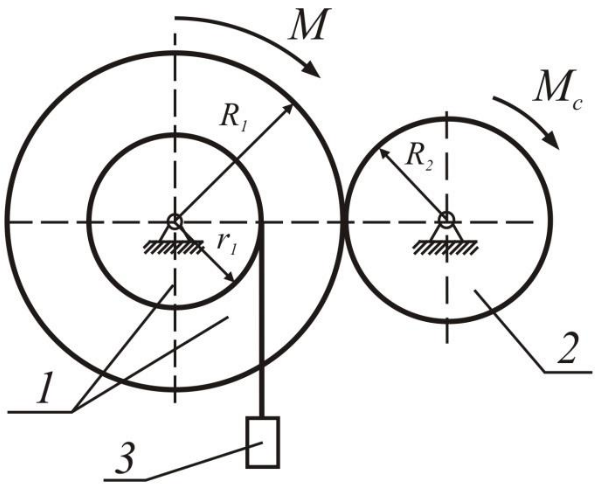
11		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; P = const; $M_с$ = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

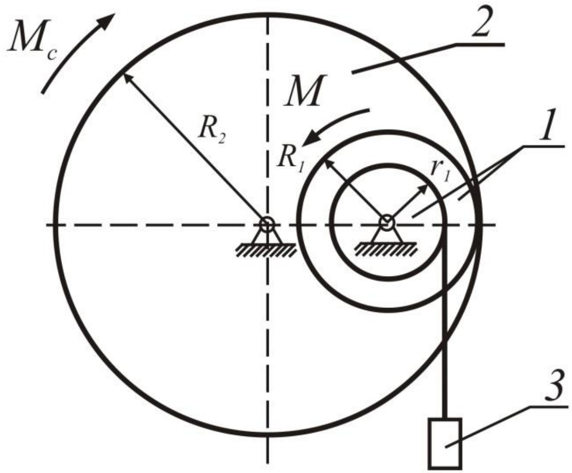
12		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, i_2; P = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

Продолжение таблицы 4.1

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы

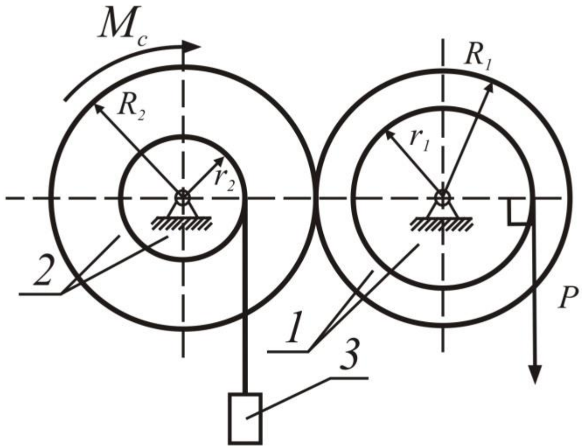
13		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; P = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

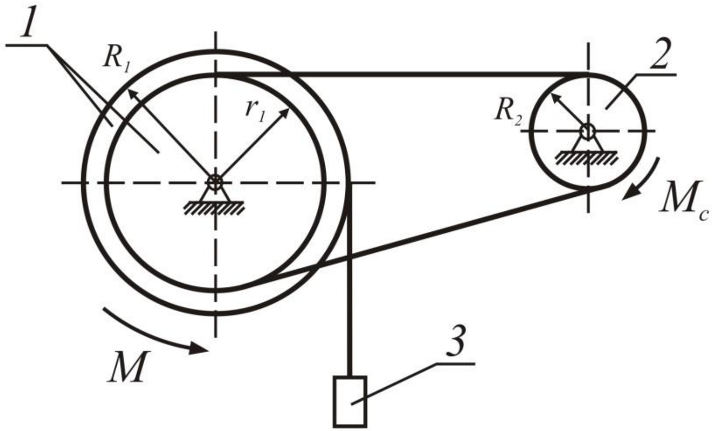
14		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

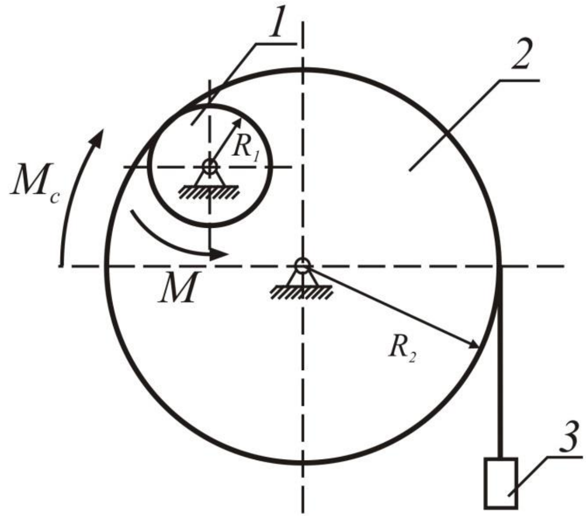
15		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, i_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

Продолжение таблицы 4.1

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы

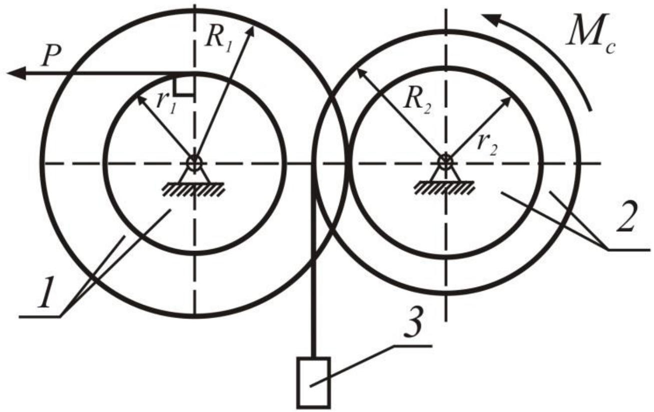
16		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; P = const; $M_с$ = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

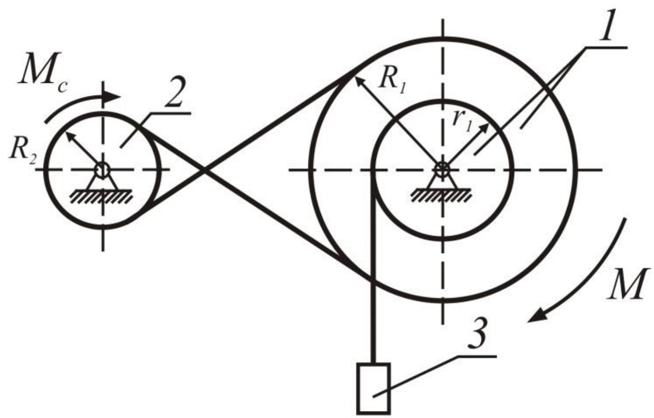
17		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2; M = const; $M_с$ = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

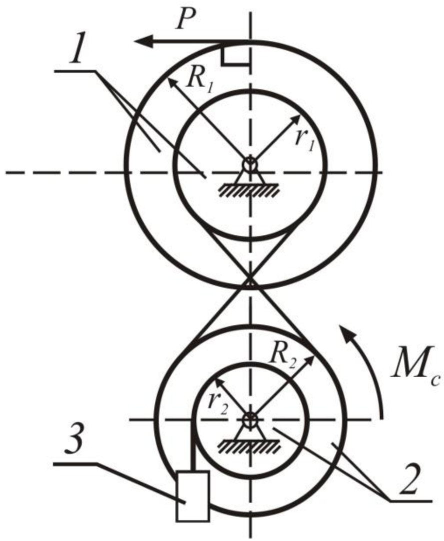
18		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1; R_2, i_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

Продолжение таблицы 4.1

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы

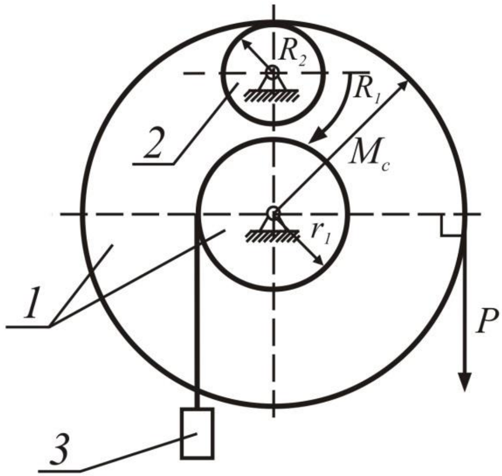
19		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; P = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

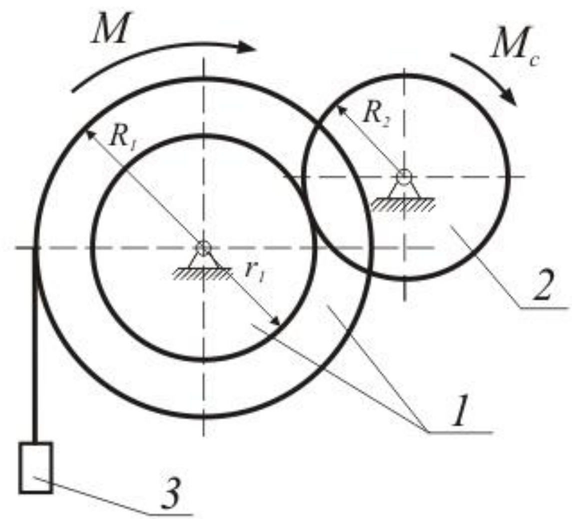
20		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2; M = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

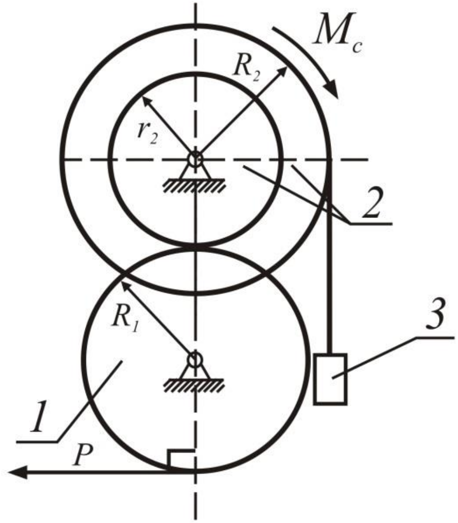
21		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2, r_2, i_2; P = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

Окончание таблицы 4.1

№ вар.	Исходная схема	Параметры системы

22		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2; P = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

23		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1, r_1, i_1; R_2; M = const; $M_с$ = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.

24		Дано: m_1, m_2, m_3; R_1; R_2, r_2, i_2; P = const; M_c = const; $T_0 = 0$, s. Найти: v_3.