

ЗАДАНИЕ №1.

“ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БАЛКИ”

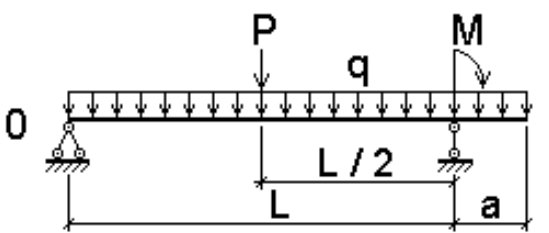
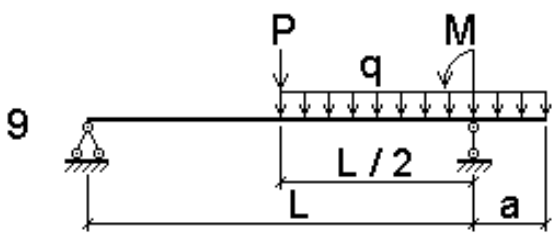
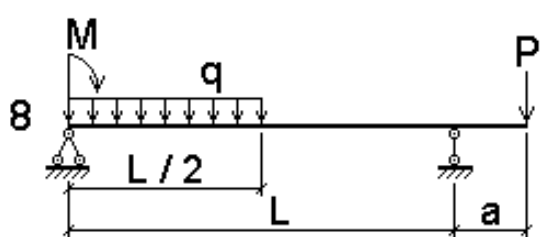
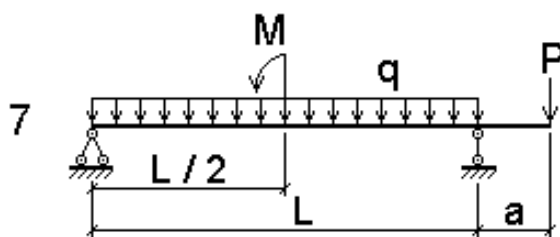
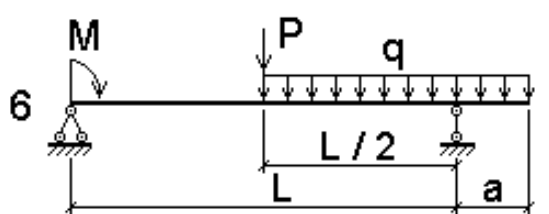
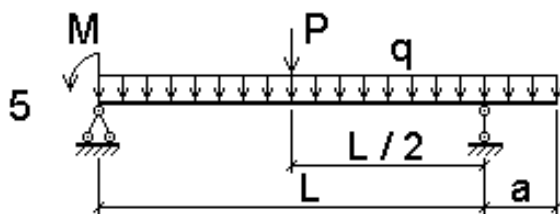
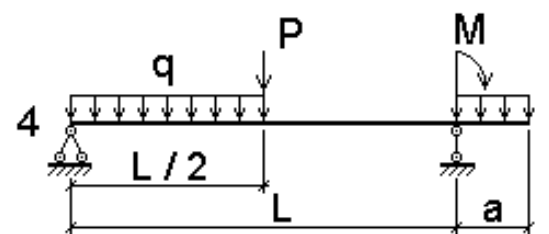
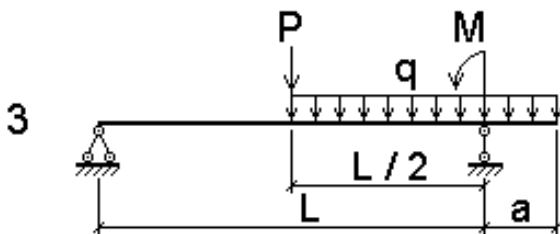
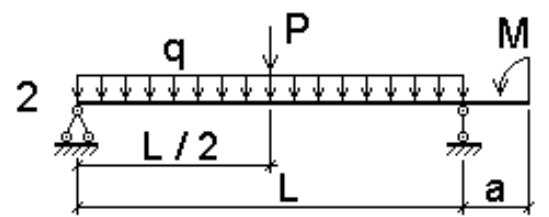
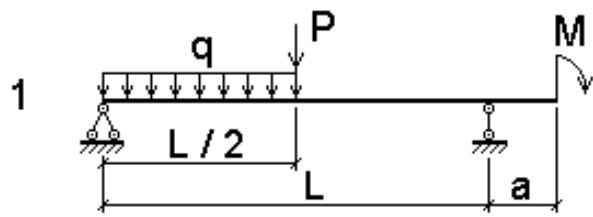
1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в балке.
2. Подобрать по сортаменту двутавровое сечение балки из условия прочности по нормальным напряжениям, приняв допусковое напряжение $[\sigma]=160$ МПа.
3. Вычислить прогиб балки f по середине пролета, приняв модуль упругости стали $E=2 \cdot 10^5$ МПа; сравнить прогиб f с допускаемым прогибом $[f]=L/500$ и при необходимости увеличить номер двутавра.
4. Вычислить углы поворота θ на опорах и прогибы f по середине пролета и на конце консоли.
5. Вычертить изогнутую ось балки, приняв масштабы: горизонтальный 1:50, вертикальный 1:1.
6. Расчеты выполнить по методу начальных параметров и по методу Мора. Полученные результаты сравнить и сделать выводы.

Исходные данные принимаются в соответствии с шифром студента, который необходимо получить у преподавателя. Численные данные к РПР-4 определяются по 1-й цифре шифра из следующей таблицы:

| Группа | 1-я цифра шифра | P кН | q кН/м | M кНм | L м | a м |
|--------|-----------------|---------|-----------|----------|--------|--------|
| 31 | 0 | 20 | 10 | 50 | 4 | 1 |
| | 1 | 30 | 20 | 60 | 5 | 2 |
| | 2 | 40 | 30 | 40 | 6 | 2 |
| | 3 | 50 | 10 | 60 | 7 | 3 |
| 32 | 0 | 60 | 20 | 50 | 5 | 1 |
| | 1 | 40 | 30 | 60 | 6 | 2 |
| | 2 | 50 | 10 | 50 | 7 | 2 |
| | 3 | 60 | 20 | 60 | 8 | 3 |

| | | | | | | |
|----|---|----|----|----|---|---|
| 33 | 0 | 20 | 30 | 40 | 6 | 2 |
| | 1 | 30 | 10 | 60 | 7 | 2 |
| | 2 | 50 | 20 | 50 | 8 | 3 |
| | 3 | 60 | 30 | 40 | 9 | 3 |
| 34 | 0 | 40 | 10 | 60 | 4 | 1 |
| | 1 | 30 | 30 | 50 | 5 | 2 |
| | 2 | 20 | 20 | 40 | 6 | 2 |
| | 3 | 50 | 20 | 40 | 7 | 3 |

Расчетная схема балки принимается по 2-й цифре шифра:



5. Расчет перемещений в балках при плоском

поперечном изгибе

5.1. Общие пояснения

Перемещения в балках оцениваются прогибом центра тяжести поперечного сечения балки V и углом поворота сечения Θ вокруг оси перпендикулярной плоскости изгиба и проходящей через центр тяжести сечения.

Достаточно большое число способов определения перемещений в балках можно разделить на две группы. К первой группе относятся способы нахождения аналитических функций перемещений путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки

$U''(z) = \frac{M(z)}{EJ} dz$. Ко второй группе относятся энергетические способы

нахождения перемещений в заданных точках, например, путем вычисления

интеграла Максвелла-Мора $\delta_k = \int_0^{\ell} \frac{M(z)M^0(z)}{EJ} dz$, где $M^0(z)$ – изгибающий

момент от единичной обобщенной силы, приложенной к точке, где определяются соответствующие перемещения.

Далее в подразделе 5.2. даны методические указания для определения перемещений наиболее продуктивным методом первой группы – методом начальных параметров, и второй группы – способом А.К.Верещагина для вычисления интеграла Максвелла-Мора.

В подразделе 5.3. приведен пример расчета перемещений балки двумя упомянутыми методами.

5.2. Методические указания

1. При определении углов поворота и прогибов сечений балки методом начальных параметров применяются универсальные уравнения в виде:

$$EJ_{xv}' = EJ_x\Theta_0 + \sum M(z-a) + \sum P \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q \frac{(z-c)^3}{6} \quad (5.2.1)$$

$$EJ_{xv} = EJ_{xv_0} + \sum J_x\Theta_0 Z + \frac{\sum M(z-a)^2}{2} + \frac{\sum P(z-b)^3}{6} + \sum q \frac{(z-c)^4}{24} \quad (5.2.2)$$

Здесь Θ_0 и v_0 – угол поворота и прогиб сечения в начале координат;

M , P , q – соответственно сосредоточенные моменты, силы и равномерно распределенные нагрузки, приложенные к балке;

Z – расстояние от начала координат до рассматриваемого сечения, угол поворота v' и прогиб v которого определяется;

a , b , c – расстояние от начала координат до точки приложения соответственно M , P , q .

Эти уравнения можно применять на любом участке балки, при этом в каждом частном случае в уравнение войдут те члены, которые соответствуют нагрузкам, расположенным между началом координат (в крайней левой точке балки) и заданным сечением.

Если направление действия нагрузок будет отвечать отрицательному изгибающему моменту, то знаки перед соответствующими членами меняются с плюса на минус.

Постоянные $EJ_x v_0$ и $EJ_x \Theta_0$ определяются из условий опорных закреплений балки. Если распределенная нагрузка q не доходит до заданного сечения в пределах данного участка, то необходимо эту нагрузку продолжить до конца данного участка и одновременно ввести компенсирующую нагрузку другого знака заданной интенсивности на той же части балки.

Интегрирование уравнения

$$EJ_x v'' = \sum M(z-a)^0 + \sum P(z-b) + \frac{\sum q(z-c)^2}{2} \quad (5.2.3)$$

производить без раскрытия скобок.

2. Применить формулу Верещагина при вычисления углов поворота и прогибов сечений балки интегралом Мора:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{pi} M_{ci}^0}{EJ_i} \quad (5.2.4)$$

где δ – обобщенное перемещение поперечного сечения (угол поворота или прогиб);

ω_{pi} – площади эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки.

M_{ci}^0 – ординаты эпюр изгибающих моментов от единичных сил $P_i = 1$ или от единичных моментов $M_i = 1$, приложенных в сечениях, где вычисляем прогиб или угол поворота, под центром тяжести площадей ω_{pi} .

Площади простых фигур и координаты центров тяжести этих площадей приведены в таблице 1.

Площади ω_i и ординаты M_{ci}^0 берутся со своими знаками. Знак плюс в ответе означает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной нагрузки или единичного момента, знак минус – наоборот.

3. Строить изогнутую ось балки (упругую линию) следует по вычисленным значениям прогибов и углов поворота сечений. Упругая балка обращена выпуклостью вниз там, где изгибающий момент положительный, и выпуклостью вверх там, где M – отрицательный. Нулевым точкам эпюры M соответствуют точки перегиба упругой линии.

5.3. Пример расчета

Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Подобрать по сортаменту двутавровое сечение балки из условия прочности по нормальным напряжениям, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Вычислить методом начальных параметров прогиб посередине пролета $v_{z=\ell/2}$, если $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, сравнить его с допускаемым $[v] = \ell/500$ и, если нужно, увеличить номер балки, а так же углы поворота на опорах $\Theta_{z=0}$ и $\Theta_{z=\ell}$ и прогиб на конце консоли $v_{z=\ell+a}$.

Вычислить интегралом Мора по способу Верещагина углы поворота на опорах $\Theta_{z=0}$ и $\Theta_{z=\ell}$ и прогибы посередине пролета $v_{z=\frac{\ell}{2}}$ и на конце консоли $v_{z=\ell+a}$.

Вычертить изогнутую ось балки (масштаб: длины 1:50, прогиба 1:1).

Расчетная схема балки приведена на рис.10.

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum m_A = 0; \quad -P(\ell + a) + R_B \ell - M - q \frac{\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2}{2} = 0$$

$$-20 \cdot 6 + R_B \cdot 4 - 60 - 20 \frac{\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2}{2} = 0; \quad R_B = 67,5 \text{ кН}$$

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A \cdot \ell - M - P \cdot a + q \cdot \frac{3}{4} \cdot \ell \left(\frac{\frac{3}{4}\ell}{2} + \frac{\ell}{4} \right) = 0$$

$$-R_A \cdot 4 - 60 - 20 \cdot 2 + 20 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 \left(\frac{\frac{3 \cdot 4}{4}}{2} + \frac{4}{4} \right) = 0 \quad R_A = 12,5 \text{ кН}$$

При проецировании всех сил на ось Y получим ноль. Проверьте.

2. Построение эпюры поперечных сил Q.

1-й и 2-й участок: $0 \leq Z \leq 3\frac{\ell}{4}$

| | | | |
|----------------|---|------|------|
| $Q = R_A - qZ$ | Z | 0 | 3 |
| | Q | 12,5 | 47,5 |

Определим координату Z, при которой изгибающий момент на участке 1 будет экстремальным:

$$Q = R_A - qZ = 0; \quad Z = \frac{R_A}{q} = \frac{12,5}{20} = 0,625 \text{ м.}$$

4-й участок. Консоль: $0 \leq Z \leq a$

$$Q = P = 20 \text{ кН.}$$

3-й участок: $a \leq Z \leq a + \frac{\ell}{4}$

$$Q = P - R_B = 20 - 67,5 = -47,5 \text{ кН.}$$

3. Построить эпюры изгибающих моментов М.

| | | | | | |
|-----------|--|---|----|-------|-----|
| 1 участок | $M = R_A \cdot Z - \frac{qZ^2}{2}$ | Z | 0 | 0,625 | 2 |
| | | M | 0 | 3,90 | -15 |
| 2 участок | $M = R_A \cdot Z + M - \frac{qZ^2}{2}$ | Z | 2 | 3 | |
| | | M | 45 | 7,5 | |
| Консоль | $M = -PZ$ | Z | 0 | 2 | |
| | | M | 0 | -40 | |
| 3 участок | $M = -PZ + R_B(Z - a)$ | Z | 2 | 3 | |
| | | M | 0 | -40 | |

Эпюры Q и M показаны на рис. 10б и в.

4. Подбор сечения двутавровой балки из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Тогда требуемый момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,282 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 282 \text{ см}^3$$

Принимаем двутавр № 24, у которого $W_x = 289 \text{ см}^3$, $J_x = 3460 \text{ см}^4$.

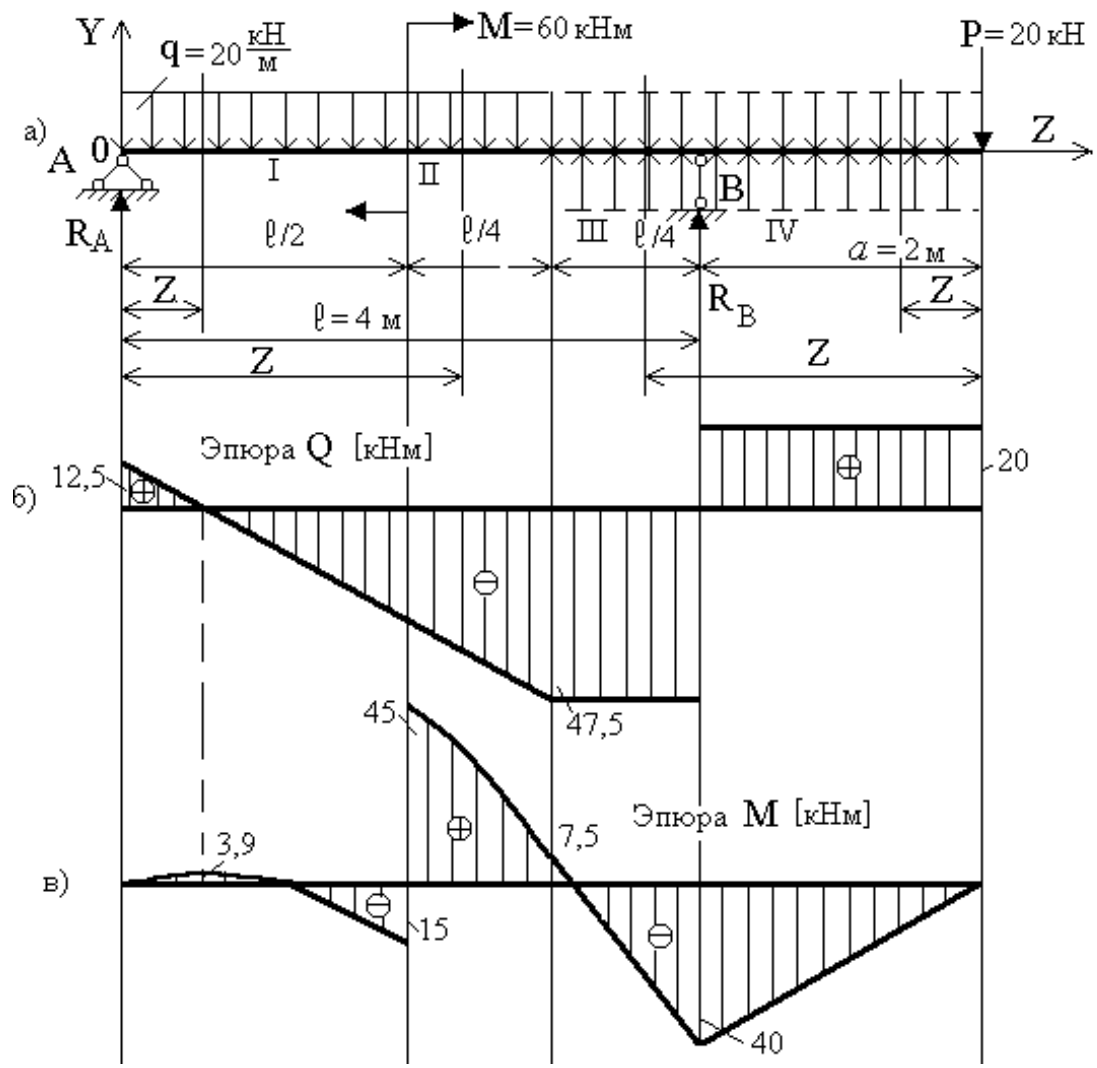
Действительное нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{45 \cdot 10^3}{0,289 \cdot 10^{-3}} = 155,5 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 155,5 \text{ МПа}$$

Расхождение в процентах

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{155,5 - 160}{160} \cdot 100 = 2,82\% \text{ (недогрузка)}$$

5. Вычисление методом начальных параметров прогибов и углов поворота сечений балки.



Изогнутая ось балки

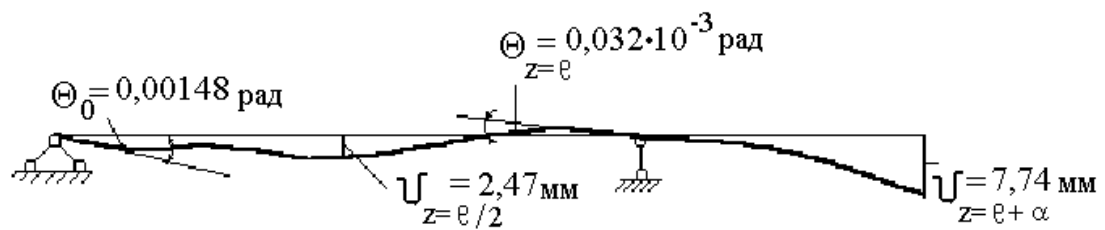


Рис. 10

Изгибающий момент $M(z)$, угол поворота $\Theta(z)$ и прогиб $v(z)$ будут

$$M(z) = R_A \cdot z - q \frac{z^2}{2} + M \left(z - \frac{\ell}{2} \right)^0 + q \frac{\left(z - \frac{3}{4} \ell \right)^2}{2} + R_B (z - \ell)$$

$$v'(z) = \Theta_0 + \frac{1}{EJ_x} 2 \left(R_A \frac{z^2}{2} - \frac{qz^3}{6} + M \left(z - \frac{\ell}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{q \left(z^2 - \frac{3}{4} \ell \right)^3}{6} + R_B (z - \ell)^2 \right)$$

$$v(z) = v_0 + \Theta_0 z + \frac{1}{EJ} \left(\frac{R_A z^3}{6} - \frac{qz^4}{24} + \frac{M \left(z - \frac{\ell}{2} \right)^2}{2} + \frac{q \left(z - \frac{3}{4} \ell \right)^4}{24} + \frac{R_B (z - \ell)^3}{6} \right)$$

При составлении уравнения для $M(z)$, считается, что равномерно распределенная нагрузка q действует до конца балки, а на участке, где она отсутствовала, приложена нагрузка q противоположного знака, как это показано пунктиром на рис. 10а.

В нашем примере $v_0 = 0$, так как начало координат совпадает с опорой А, где прогиб равен нулю.

Θ_0 определим из опорного условия, что прогиб на опоре В равен нулю:

$$v_{z=\ell} = \Theta_0 \ell + \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{M \left(\ell - \frac{\ell}{2} \right)^2}{2} + \frac{R_A \ell^3}{6} - \frac{q \ell^4}{24} + \frac{q \left(\ell - \frac{3}{4} \ell \right)^4}{24} \right) = 0$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{M\ell}{8} - \frac{R_A \ell^2}{6} + \frac{255q\ell^3}{6144} \right) = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left(-\frac{60 \cdot 4}{8} - \frac{12,5 \cdot 4^2}{6} + \frac{255 \cdot 20 \cdot 4^3}{6144} \right) = \\ &= -\frac{10,20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = -0,00148 \text{ рад}\end{aligned}$$

б. Прогиб посередине пролета

$$\begin{aligned}v_{z=\ell/2} &= \Theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{R_A z}{6} - \frac{qz^4}{24} \right) = -0,00148 \cdot 2 + \\ &+ \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{12,5 \cdot 2^3}{6} - \frac{20 \cdot 2^4}{24} \right) = -0,00296 + \frac{3,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -0,00248 \text{ м} = -0,248 \text{ см} = -2,48 \text{ мм}\end{aligned}$$

$$\langle [v] \rangle = \frac{\ell}{500} = \frac{400}{500} = 0,8 \text{ см} = 8 \text{ мм} \quad - \text{условие жесткости}$$

выполняется

7. Прогиб на конце консоли

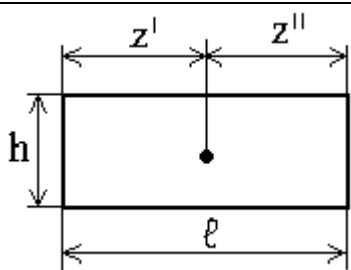
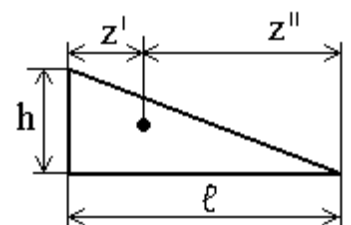
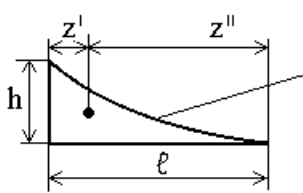
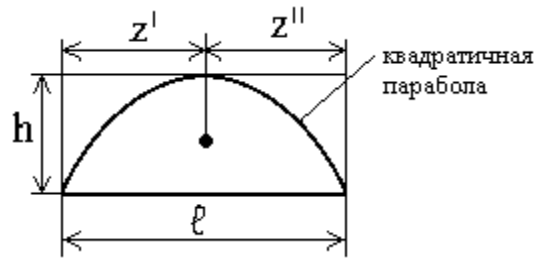
$$\begin{aligned}
 v_{z=\ell+a} &= \Theta_0 z + \frac{1}{EJ_x} \cdot \\
 &\cdot \left[\frac{R_A z^3}{6} + \frac{M(z - \ell/2)^2}{2} - \frac{qz^4}{24} + \frac{q(z - 3/4\ell)^4}{24} + \frac{R_B(z - \ell)^3}{6} \right] = \\
 &= \Theta_0(\ell + a) + \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{R_A(\ell + a)^3}{6} + \frac{M(\ell/2 + a)^2}{2} - \frac{q(\ell + a)^4}{24} + \frac{q(\ell/4 + a)^4}{24} + \frac{R_B \cdot a^3}{6} \right] = \\
 &= -0,00148 \cdot 6 + \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{12,5 \cdot 6^3}{6} + \frac{60 \cdot 4^2}{2} - \frac{20 \cdot 6^4}{24} + \frac{20 \cdot 3^4}{24} + \frac{67,5 \cdot 2^3}{6} \right) = \\
 &= -0,00888 + \frac{7,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = \\
 &= -0,00774 \text{ м} = -0,774 \text{ см} = -7,74 \text{ мм}
 \end{aligned}$$

8. Угол поворота на опоре В

$$\begin{aligned}
 v'_{z=\ell} &= \Theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{R_A \cdot z^2}{2} + M(z - \ell/2) - \frac{qz^3}{6} + \frac{q(z - 3/4\ell)^3}{6} \right) = \\
 &= \Theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{R_A \cdot \ell^2}{2} + M \cdot \ell/2 - \frac{q\ell^3}{6} + \frac{q(\ell/4)^3}{6} \right) = \\
 &= -0,000035 \text{ рад.}
 \end{aligned}$$

9. Вычисление перемещений интегралом Мора по способу Верещагина.

Таблица 1

| Геометрическая фигура | Площадь ω | Координаты центра тяжести | |
|---|------------------|---------------------------|--------|
| | | Z' | Z'' |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | $h \cdot l$ | $l/2$ | $l/2$ |
|  | $hl/2$ | $l/3$ | $2l/3$ |
|  | $hl/3$ | $l/4$ | $3l/4$ |
|  | $*2hl/3$ | $l/2$ | $l/2$ |

| | | | |
|------------------------------|---|---|---|
| <p>квадратичная парабола</p> | $2h\ell/3$ | $5\ell/8$ | $3\ell/8$ |
| <p>квадратичная парабола</p> | $\omega_1 = h_1 \ell / 2$ $\omega_2 = h_2 \ell / 2$ $*\omega_3 = 2h_3 \ell / 3$ | $\ell / 3$ $2\ell / 3$ $\ell / 2$ | $2\ell / 3$ $\ell / 3$ $\ell / 2$ |

Примечание: в отмеченных (*) случаях $h_3 = h$, если равномерно распределенная нагрузка на участке длиной ℓ у балки одинакова.

Для вычисления перемещений предварительно выполняется разбивка площади грузовой эпюры изгибающих моментов на простые составляющие и строятся эпюры изгибающих моментов от единичной обобщенной силы, приложенной в сечении, где определяется соответствующее перемещение. На этих эпюрах указываются значения изгибающих моментов от единичной обобщенной силы под центром тяжести каждой составляющей площади грузовой эпюры изгибающих моментов. Перечисленные эпюры представлены на рис. 11.

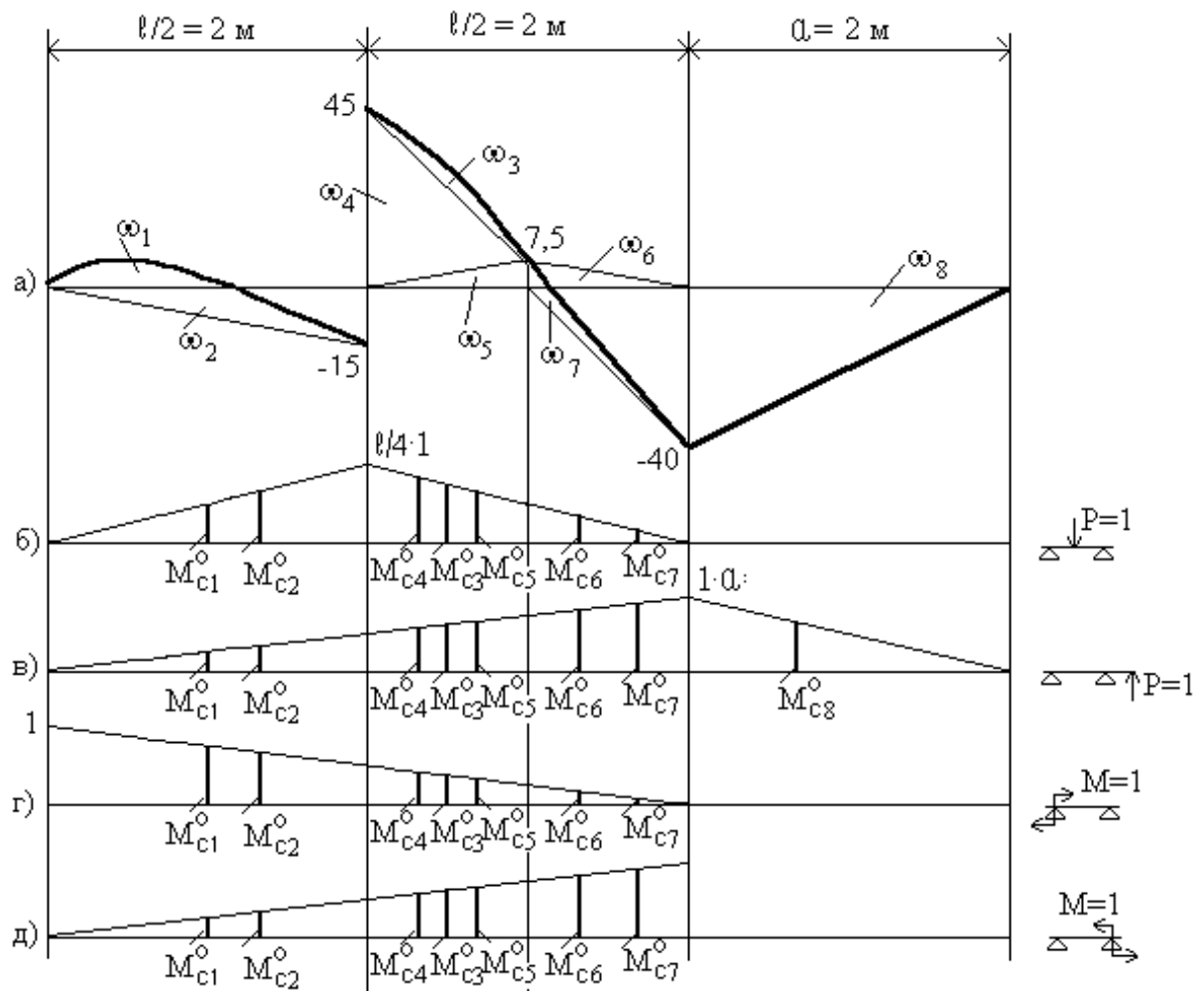


Рис. 11

Составляющие площади грузовой эпюры, представленные на рис. 11а

$$\text{будут: } \omega_1 = \frac{2}{3} \frac{q \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{8} \frac{\ell}{2} = \frac{2}{3} \frac{20 \cdot 2^3}{8} = 13,3 \text{ кНм}^2 \quad \omega_5 = \frac{1}{2} 7,5 \frac{\ell}{4} = 3,75 \text{ кНм}^2$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} (-15) \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} (-15) \cdot 2 = -15 \text{ кНм}^2 \quad \omega_6 = \frac{1}{2} 7,5 \frac{\ell}{4} = 3,75 \text{ кНм}^2$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \frac{q \left(\frac{\ell}{4}\right)^2}{8} \frac{\ell}{4} = 1,67 \text{ кНм}^2 \quad \omega_7 = \frac{1}{2} (-40) \frac{\ell}{4} = 20 \text{ кНм}^2$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2} 45 \frac{\ell}{4} = 22,5 \text{ кНм}^2 \quad \omega_8 = \frac{1}{2} (-40) a = \frac{1}{2} (-40) \cdot 2 = -40 \text{ кНм}^2$$

Прогиб $v(\ell/2)$ с учетом ординат на рис. 11б будет:

$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,46 \cdot 10^7} \cdot \left(13,3 \cdot \frac{1}{2} \frac{\ell}{4} - 15 \frac{2}{3} \frac{\ell}{4} + 1,67 \frac{3}{4} \frac{\ell}{4} + 22,5 \frac{5}{6} \frac{\ell}{4} + 3,75 \frac{2}{3} \frac{\ell}{4} + 3,75 \frac{1}{3} \frac{\ell}{4} - 20 \frac{1}{6} \frac{\ell}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3,46} (6,71 - 10 + 1,25 + 18,75 + 2,5 + 1,25 - 3,35) = \frac{17,1}{2 \cdot 3,46} = 2,47 \text{ мм}$$

Прогиб $v(\ell+a)$ с учетом ординат на рис. 11в будет

$$v(\ell+a) = \frac{1}{2 \cdot 3,46} \cdot \left(13,3 \cdot \frac{1}{4} a - 15 \frac{1}{3} a + 1,67 \frac{5}{8} a + 22,5 \frac{17}{12} a + 3,75 \frac{2}{3} a + 3,75 \frac{5}{6} a - 20 \frac{11}{12} a - 40 \frac{2}{3} a\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3,46} (6,7 - 10 + 2,1 + 26,25 + 5,0 + 6,25 - 36,7 - 53,3) = -\frac{53,7}{2 \cdot 3,46} = 7,76 \text{ мм}$$

Угол поворота на опоре А, $\Theta_{(0)}$, с учетом ординат на рис. 11 г будет:

$$\Theta_{(0)} = \frac{10^{-3}}{2 \cdot 3,46} \cdot \left(13,3 \cdot \frac{3}{4} - 15 \frac{2}{3} + 1,67 \frac{3}{8} + 22,5 \frac{5}{12} + 3,75 \frac{1}{3} + 3,75 \frac{1}{6} - 20 \frac{1}{12}\right) =$$

$$= \frac{10^{-3}}{2 \cdot 3,46} (10 - 10 + 0,6 + 9,4 + 1,25 + 0,6 - 1,7) = \frac{10,15 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3,46} = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

Угол поворота на опоре В, $\Theta(\ell)$, с учетом ординат на рис. 11д будет:

$$\Theta_B = \Theta_{(\ell)} = \frac{10^{-3}}{2 \cdot 3,46} \cdot \left(13,3 \cdot \frac{1}{4} - 15 \frac{1}{3} + 1,67 \frac{5}{8} + 22,5 \frac{7}{12} + 3,75 \frac{2}{3} + 3,75 \frac{5}{6} - 20 \frac{11}{12} \right) =$$

$$= -\frac{0,22 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3,46} = -0,032 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$$

Результаты расчетов перемещений (углов поворота и прогибов) практически совпадают при расчете метода начальных параметров и с использованием правила Верещагина для вычисления интеграла Максвелла-Мора.

Изогнутая ось балки представлена на рис. 10. Как видно из рисунка, она хорошо согласуется с эпюрой изгибающих моментов, представленной на рис. 10в.