ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
Практическая работа №2

Модальный синтез системы 2-го порядка

1. Краткие теоретические сведения

При управлении системой 2-го порядка при модальном синтезе удобно рассматривать в качестве желаемого процесса колебательное звено с заданными параметрами:

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

где ω_n и ξ – натуральная частота и коэффициент затухания колебательного звена.

Зная ω_n и ξ, можно оценить параметры переходного процесса по следующим формулам:

$$\eta \approx \exp\left(-\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\cdot 100\%, \qquad t_p \approx \frac{3.2}{\xi\omega_n},$$

где η и t_p – перерегулирование и время переходного процесса.

Например, пусть $\omega_n = 25$ с$^{-1}$ и и $\xi = 0.707$, тогда

$$\eta \approx 4.3\%, \qquad t_p \approx 0.18 \text{ сек.}$$

Другим способом описания характеристик желаемой системы при модальном синтезе является использование стандартных полиномов, корни которых обеспечивают заданные свойства переходного процесса. При этом обычно используются полиномы Ньютона или Баттерворта.

Полином Ньютона обеспечивает равенство всех корней характеристического уравнения, и для системы 2-го порядка имеет вид:

$$s^2 + 2\lambda_0 s + \lambda_0^2 = 0,$$

где λ_0 – модуль корня, величина которого определяется требованиями к быстродействию системы.

Так при $\lambda_0 = 1$ время переходного процесса равно 4.8 сек. Поскольку корни не имеют мнимой части, перерегулирование равно нулю

Полином Баттерворта обеспечивает слабо колебательный процесс.

$$s^2 + 1.4\lambda_0 s + \lambda_0^2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты характеристического полинома желаемой системы и коэффициенты полинома замкнутой системы, можно получить вектор коэффициентов обратных связей по состоянию.

2. Примеры

Пример 1. Объект управления задан матрицами:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 8\\ 0 & 0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.\quad .$$

Требуется синтезировать модальный регулятор для обеспечения переходного процесса с параметрами:

$$\omega_n = 25\,c^{-1};\quad \varsigma = 0.707;$$

Решение.

Проверка управляемости системы:

$$W=\begin{bmatrix}B; & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 32\\ 4 & 0\end{bmatrix};\quad \det(W)=-128.$$

Матрица замкнутой системы:

$$A^{*}=A-BK=\begin{bmatrix}-3 & 8\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 8\\ -4k_1 & -4k_2\end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\left|A^{*}-\lambda I\right|=\left|\begin{bmatrix}-3 & 8\\ -4k_1 & -4k_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 8\\ -4k_1 & -4k_2-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=\lambda^2+(3+4k_2)\lambda+32k_1+12k_2=0.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение желаемой системы:

$$\lambda^2+2\varsigma\omega_n\lambda+\omega_n^2=0.$$

Подставляем заданные параметры

$$\lambda^2+35.35\lambda+625=0.$$

Для получения k_1 и k_2 приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях характеристических полиномов:

$$\begin{cases}3+4k_2=35{,}35;\\ 32k_1+12k_2=625.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_2=8.09;\\ k_1=16.5;\end{cases}$$

Выполним проверку решения в *MatLab*.

```
>> A=[-3 8; 0 0];
>> B=[0; 4];
>> C=[1 0];
>> K=[8.09 16.5];
>> C=[1 0];
```

```
>> K=[16.5 8.09];
>> W=ss(A-B*K,B,C,0);
>> step(W,0.5)
>> grid
```

Переходный процесс приведен на рис. 1.

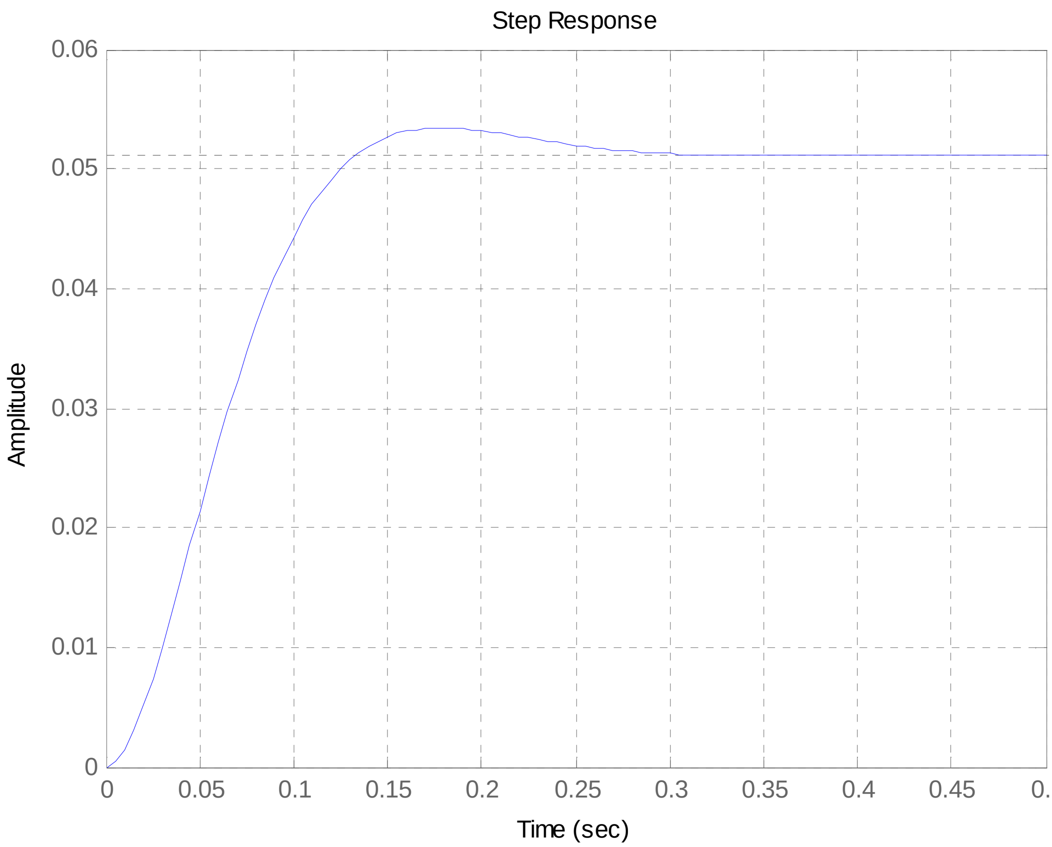

Рис. 1. Переходный процесс в системе с модальным регулятором

Расчет масштабирующего коэффициента:

```
>> km=inv(-C*inv(A-B*K)*B)
km =
   19.5338
```

Пример 2. Объект управления задан матрицами:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Требуется синтезировать модальный регулятор для обеспечения положения полюсов замкнутой системы в точке (-1, j0).

Решение. Поскольку полюса одинаковые и не имеют мнимой части, то здесь можно использовать стандартный полином Ньютона:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$\left|(A - BK) - \lambda I\right| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-k_1 & 3-k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2-k_1 & 3-k_2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2 + (k_2 - 3)\lambda + k_1 + 2 = 0.$$

Для получения k_1 и k_2 приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях характеристических полиномов:

$$\begin{cases} k_2 - 3 = 2; \\ k_1 + 2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 5; \\ k_1 = -1; \end{cases}$$

Выполним проверку решения в *MatLab*.

```
>> A=[0 1; -2 3];
>> B=[0; 1];
>> C=[1 0];
>> K=[-1 5];
>> W=ss(A-B*K,B,C,0);
>> step(W,10)
```

Рассмотрим использование полинома Баттерворта при модальном синтезе для этой же системы:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Тогда:

$$\begin{cases} k_2 - 3 = 1.4; \\ k_1 + 2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 4.4; \\ k_1 = -1; \end{cases}$$

На рис.2 показаны варианты переходных процессов в системе.

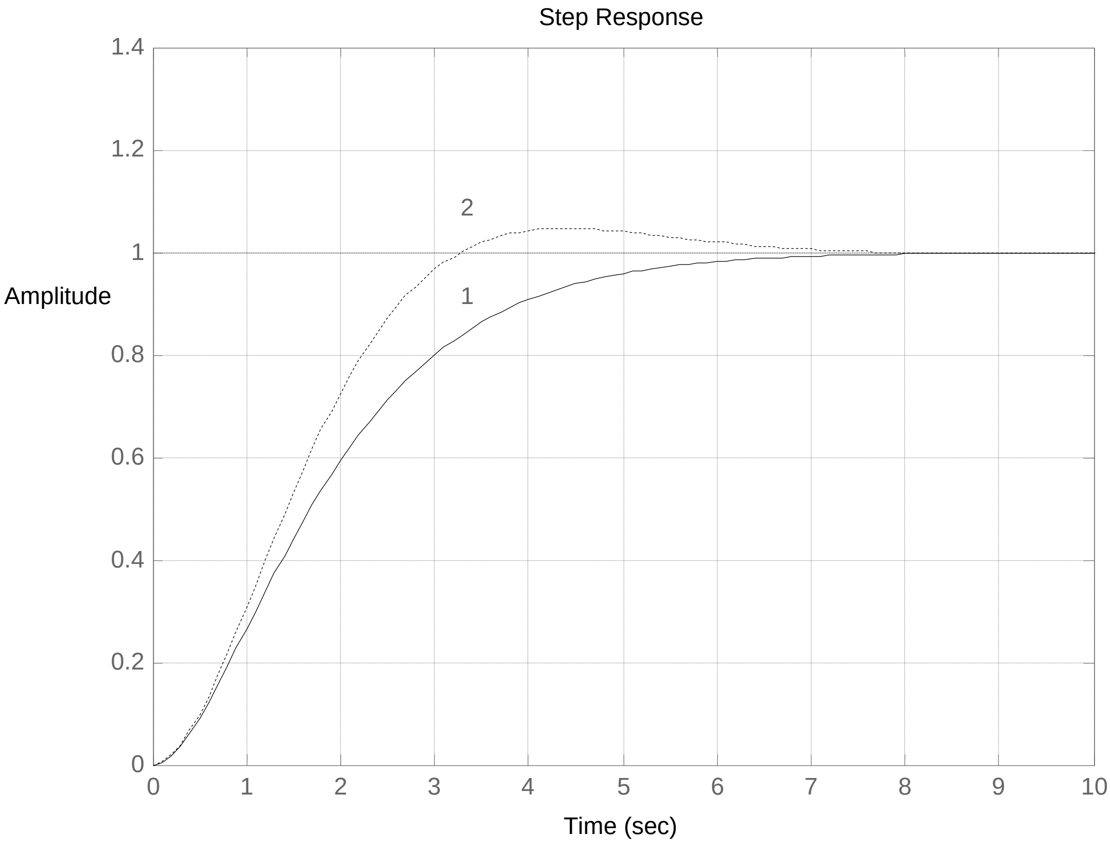

Рис. 2. Переходный процесс при расположении полюсов системы по Ньютону (сплошная) и по Баттерворту (пунктир).

Полученные переходные процессы являются нормированными, т. е. они получены при $\lambda_0 = 1$. Время переходного процесса равно $t_{\text{Н}} = 4{,}8$ сек.

Если время переходного процесса должно быть равно t^*, то используется формула:

$$\lambda_0 = \frac{t_H}{t^*}.$$

Так, для уменьшения времени переходного процесса в два раза требуется выбрать $\lambda_0 = 2$, тогда полиномы Ньютона и Баттерворта приобретают вид:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0; \qquad \text{и} \qquad \lambda^2 + 2.8\lambda + 4 = 0.$$

Повторяя проделанные расчеты, получаем два набора коэффициентов обратной связи: [1; 7] и [1; 5.8].

Графики переходных процессов приведены на рис. 3

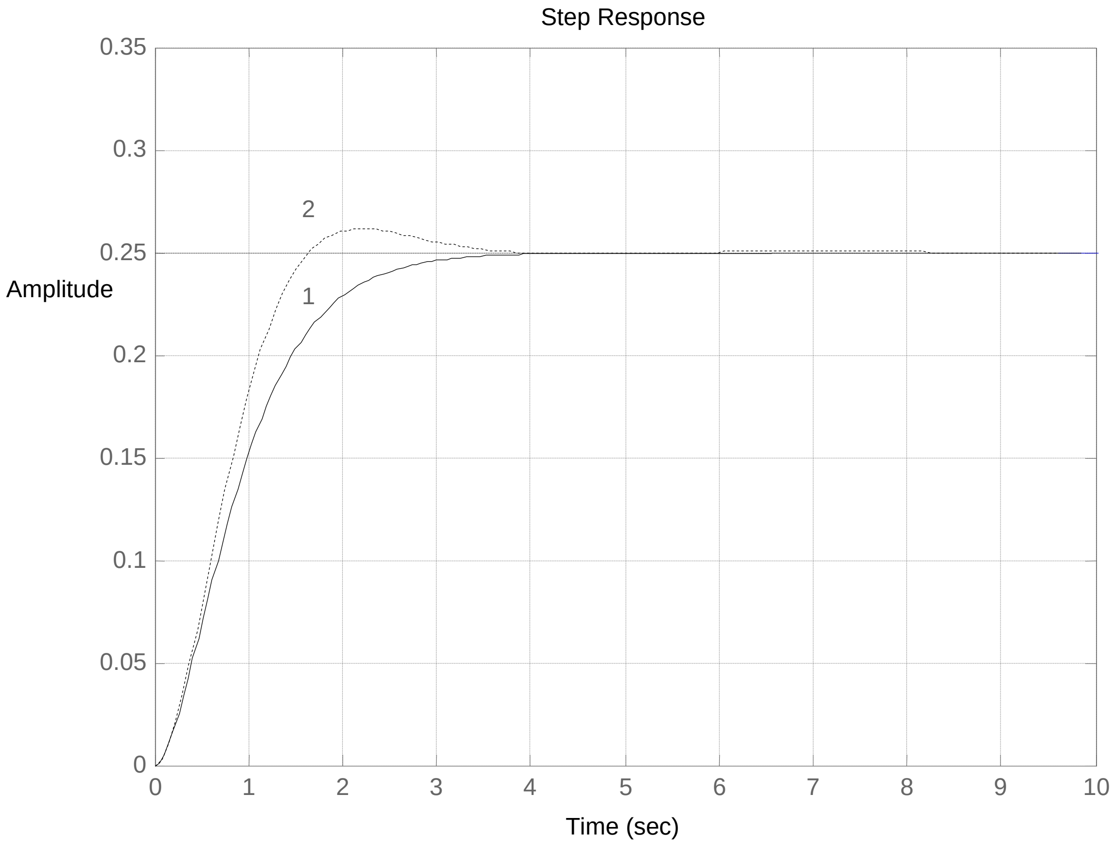

Рис. 3. Переходный процесс с удвоенным быстродействием при расположении полюсов системы по Ньютону (сплошная) и по Баттерворту (пунктир).

Как показывает рис. 7, в системе требуется использовать масштабирующий коэффициент:

```
>> km=inv(-C*inv(A-B*K)*B)
km =
    4
```

3. Задания для практической работы

Для заданного варианта объекта управления из табл. 1 синтезировать модальный регулятор для нормированных переходных процессов по Ньютону и Баттерворту. Повторить расчет для заданного значения λ_0. Проверить результаты моделированием в *MatLab*.

Таблица 1.

Варианты описания объектов управления

№	Вариант	№	Вариант
1	$W(s)=\frac{s+1}{(s+1)(s+1)};$ $\lambda_0 = 2$	11	$W(s)=\frac{s+1}{(2s+1)(2s+1)};$ $\lambda_0 = 0.5$
2	$W(s)=\frac{s+1}{(s+1)(0.2s+1)};$ $\lambda_0 = 3$	12	$W(s)=\frac{s+1}{(s+1)(5s+1)};$ $\lambda_0 = 4$
3	$W(s)=\frac{s+1}{(s+1)(6s+1)};$ $\lambda_0 = 5$	13	$W(s)=\frac{0.2s+1}{(0.1s+1)(0.5s+1)};$ $\lambda_0 = 0.75$
4	$W(s)=\frac{s+1}{(2s+1)(3s+1)};$ $\lambda_0 = 2$	14	$W(s)=\frac{s+1}{(0.01s+1)(0.1s+1)};$ $\lambda_0 = 3$
5	$W(s)=\frac{s+1}{(0.4s+1)(s+1)};$ $\lambda_0 = 4$	15	$W(s)=\frac{s+1}{(0.1s+1)(0.1s+1)};$ $\lambda_0 = 5$
6	$W(s)=\frac{s+1}{(2s+1)(s+1)};$ $\lambda_0 = 0.5$	16	$W(s)=\frac{s+1}{(0.5s+1)(s+1)};$ $\lambda_0 = 2$
7	$W(s)=\frac{s+1}{(0.8s+1)(0.9s+1)};$ $\lambda_0 = 3$	17	$W(s)=\frac{s+1}{(3s+1)(0.1s+1)};$ $\lambda_0 = 4$
8	$W(s)=\frac{s+1}{(0.3s+1)(0.2s+1)};$ $\lambda_0 = 5$	18	$W(s)=\frac{s+1}{(5s+1)(0.5s+1)};$ $\lambda_0 = 0.5$
9	$W(s)=\frac{s+1}{(0.1s+1)(7s+1)};$ $\lambda_0 = 2$	19	$W(s)=\frac{s+1}{(0.3s+1)(0.25s+1)};$ $\lambda_0 = 3$
10	$W(s)=\frac{s+1}{(0.7s+1)(0.35s+1)};$ $\lambda_0 = 4$	20	$W(s)=\frac{s+1}{(0.1s+1)(0.25s+1)};$ $\lambda_0 = 5$