

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ И
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ
Часть 1
Учебное пособие**

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2015

УДК 621.37(07)

ББК 3 841-017.я7

С 78

Авторы: **Андреева О. М., Богачев М. И., Ипатов В. П., Красичков А. С., Маркелов О. А., Маругин А. С., Пыко С. А., Соколов А. А., Соколова А. А., Ульяницкий Ю. Д., Хачатурян А. Б.**

С 78 Статистическая теория радиотехнических и телекоммуникационных систем: учеб. пособие в 3 ч. Ч. 1 /под общ. ред. проф. В. П. Ипатова и проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. 146 с.

ISBN 978-5-7629-2034-6 (ч. 1)

ISBN 978-5-7629-2032-2

Рассматриваются математические модели сигналов и помех, на основе которых решаются задачи обнаружения, различения и оценивания параметров сигналов современных РТС и ТКС.

Предназначено для бакалавров и магистров факультета радиотехники и телекоммуникаций, обучающихся по направлениям «Радиотехника», «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и «Коструктурирование и технология электронных средств», а также для инженеров по специальности «Радиоэлектронные системы и комплексы».

УДК 621.37.07

ББК 3 841-017.я7

Рецензенты: каф. РС НовГУ им. Ярослава Мудрого; профессор каф. РСиОС СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, д-р техн. наук, проф. В. Ю. Волков.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-2034-6 (ч. 1)

ISBN 978-5-7629-2032-2

©СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015

Введение

Статистическая теория радиотехнических и телекоммуникационных систем занимает важное место в системе подготовки специалистов в области радиотехники и инфокоммуникационных технологий и систем связи. Без овладения современными методами анализа и синтеза систем обработки сигналов и изучения связанных с данными проблемами задач по выбору сигнальных форматов трудно рассчитывать на глубокое освоение специальных дисциплин и успешную научно-исследовательскую работу, которая является важным звеном образовательного процесса.

Предлагаемое учебное пособие отражает многолетний опыт преподавания дисциплин «Статистическая радиотехника», «Статистическая теория радиотехнических систем», «Статистическая теория связи» для бакалавров и магистров по направлениям «Радиотехника» и «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также для инженеров по специальностям «Радиотехника» и «Радиоэлектронные системы».

Этот опыт отражен в учебниках [1], [2], монографии [3], учебных пособиях [4]–[13]. Структура учебных планов государственного образовательного стандарта третьего поколения характеризуется существенным сокращением числа часов, отводимых на лекционные занятия, в рамках которых необходимо изложить концептуальные основы дисциплины, перенеся изучение деталей и подробностей на практические занятия и самостоятельную работу. Это соображение и побудило авторов к написанию учебного пособия, отвечающего изложенной стратегии преподавания.

Материал, изучаемый на лекционных занятиях, соответствует содержанию первых двух разделов: «Сигналы и помехи в радиотехнических и телекоммуникационных системах» и «Основы теории обнаружения, различения и оценивания параметров сигналов». Углубленное и более детальное изучение указанных выше задач составляет содержание разд. 3: «Алгоритмы и устройства оптимального обнаружения и различения сигналов», 4: «Принципы реализации и расчета точности алгоритмов оценки параметров сигналов, и разрешения сигналов», включенных в содержание второй и третьей частей учебного пособия. Каждый раздел заканчивается набором вопросов, позволяющих читателю оценить степень усвоения теоретического материала, и небольшое количество задач как с решением, так и для самостоятельной работы. Естественно, что такая структура пособия неизбежно приводит к повторению ключевых понятий, но ведь «повторение – мать учения».

Очевидно, что изучение столь сложных дисциплин, как «Статистическая теория радиотехнических систем» и «Теория связи», должно опираться на серьезную математическую подготовку, особенно в области теории вероятностей и математической статистики. В СПбГЭТУ эта предварительная подготовка, помимо цикла «Высшая математика», реализуется с помощью дисциплины «Математический аппарат радиотехники», предшествующего дисциплинам, которым посвящено настоящее учебное пособие.

Поэтому полезно еще раз обратиться к учебным пособиям [14]–[19]. Критерием усвоения материала учебной дисциплины является умение решать задачи. В этой связи рекомендуем воспользоваться сборниками задач [20]–[22]. Отметим, что в [21] наряду с типовыми задачами включены задачи повышенной сложности, предлагавшиеся на региональных олимпиадах по радиотехнике, проводимых в течение многих лет СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

Учитывая опыт преподавания и знание того, как студенты работают с учебной литературой, в пособии умышленно используются повторы ключевых положений и формул. Вопросы, примеры и задачи учитывают не только результаты знакомства с содержанием пособия, но и материал, рассматриваемый на практических занятиях.

1. СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ И РАДИОТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

1.1. Информационные радиотехнические системы и их классификация

Под радиотехнической системой (РТС) понимается комплекс технических средств, использующих для решения стоящих перед ней задач электромагнитные волны. Выбор диапазона волн определяется задачами, решаемыми системой и условиями, в которых она должна работать. В настоящее время для создания радиосистем различного назначения и примыкающих к ним оптических систем используется частотный диапазон от дециметровых волн ($\lambda = 10 \dots 100$ км) до волн оптического диапазона ($\lambda = 0,01 \dots 100$ мкм). Среди возможных РТС будем рассматривать информационные РТС, включающие системы передачи и обмена информацией, РТС извлечения информации, системы радиуправления, а также системы разрушения информации (системы радиопротиводействия). Телекоммуникационные системы (ТКС), согласно данной классификации, относятся к РТС передачи и обмена информацией.

К системам извлечения информации следует отнести радиолокационные и радионавигационные системы. К ним относятся также системы радиоэлектронной разведки.

Как отмечалось, терминами «радиотехнические» или «радиоэлектронные» обычно подчеркивают специфику тех информационных систем, в которых функции переносчиков сообщений между пространственно разнесенными пунктами выполняют электромагнитные волны радиодиапазона. В общем виде структурная схема любой РТС имеет вид, показанный на рис. 1.1. Отправитель, в распоряжении которого имеется информация от первичного источника, «закодированная» в значениях конкретных физических величин (например, уровня и высоты звука в радиовещании, интенсивности и цвета элемента изображения в телевидении и др.), с помощью преобразователя «сообщение–волна» взаимно однозначно отображает сообщение первичного источника в значения параметров (интенсивности, частоты, фазы и т. п.) радиоволн, посылаемых в канал распространения (эфир). Названное преобразование может быть продуктом осознанных действий отправителя, как, например, в системах передачи информации, в частности в вещании, и тогда роль преобразователя «сообщение–волна» отводится передающему устройству, включающему в себя модулятор и передатчик. Возможен, однако, и такой вариант, когда сообщение «управляет» параметрами радиоволн независимо от воли отправителя, – так происходит, например, в радиолокации, где координаты лоцируемой цели автоматически преобразуются во время запаздывания и направление прихода отраженных от нее радиоволн. Взаимно однозначная связь параметров волны с передаваемым сообщением позволяет на приемной стороне применить обратное преобразование «волна–сообщение», придав принятой информации ту конкретную форму, которая требуется получателю. Обычный набор элементов, из которых состоит преобразователь «волна–сообщение», – антенная система, приемник, демодулятор и др.

Наряду с радиоволнами, несущими полезную информацию, на преобразователь «волна–сообщение» реальной РТС воздействуют и помехи различной природы. Существуют виды помех, искажающие передаваемые электромагнитные колебания уже в канале распространения. К числу таковых относятся *атмосферные*, обусловленные грозовыми разрядами и изменчивостью физических свойств атмосферы; *индустриальные*, связанные с эксплуатацией электроустановок различного назначения; *межсистемные*, создаваемые посторонними радиосредствами и неизбежные вследствие тесноты в эфире;

преднамеренные, умышленно излучаемые объектами, противодействующими той или иной РТС. Кроме того, помехи возникают и на самой приемной стороне, так как процессу $y(t)$ преобразования волны в сообщение всегда сопутствуют шумы антенно-фидерного тракта и внутриприемные шумы.

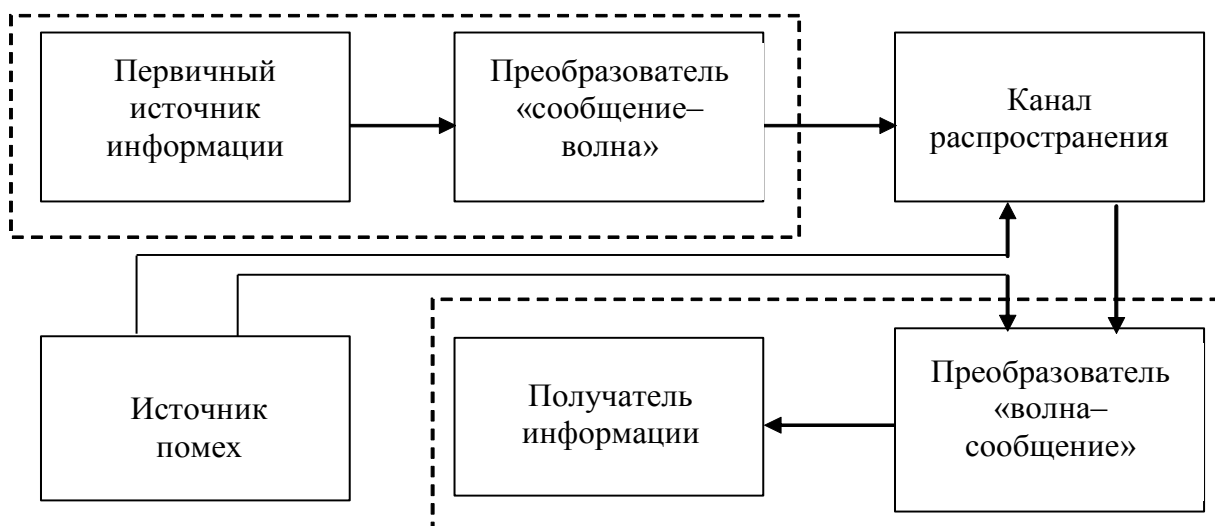


Рис. 1.1

Диалектика прогресса радиоэлектроники такова, что сколь бы внушительными ни выглядели успехи в нейтрализации помех непосредственным воздействием на их источники (разработка новых образцов малошумящей приемоусилительной техники, совершенствование мероприятий по регламентации радиосвязи и электромагнитной совместимости и пр.), требования к качеству передачи и извлечения информации в РТС растут опережающими темпами. К тому же, источники ряда помех, например атмосферных, вообще неподвластны ни создателям РТС, ни регламентирующим органам. Поэтому первоочередной заботой разработчика любой РТС становится достижение необходимой *помехоустойчивости*, т. е. достаточного иммунитета в отношении тех или иных помех. Важнейшие количественные показатели помехоустойчивости будут изучаться в последующих главах.

Предметом статистической теории РТС и ТКС является синтез оптимальных алгоритмов обработки наблюдаемых данных, обеспечивающих экстремум целевой функции (критерия качества), определяемой задачами, решаемыми системой. Сложностью этих задач определяется целесообразность разбиения общей задачи на отдельные этапы (операции), для которых синтез оптимальных алгоритмов оказывается более простым, чем для общей задачи.

Несмотря на многообразие целевых назначений, видов и принципов работы современных радиоэлектронных систем, в их функционировании мож-

но выделить целый ряд операций, поддающихся унифицированному и в достаточной мере абстрактному исследованию, не опирающемуся на специфику той или иной системы и в равной степени продуктивному для многих конкретных приложений. К числу таких операций относятся процедуры обнаружения, различения и оценивания параметров сигналов.

Под *обнаружением* сигнала в радиоэлектронике понимают анализ принятого колебания $y(t)$, завершающийся вынесением решения о наличии или отсутствии в нем некоторой полезной составляющей, которую и называют сигналом. *Различение* M сигналов определяют как анализ принятого колебания $y(t)$, заканчивающийся принятием решения о том, какой именно из M сигналов, принадлежащих указанному заранее множеству $S = \{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$, присутствует в $y(t)$. Нетрудно видеть, что обнаружение сигнала есть частный случай различения двух сигналов, один из которых равен нулю на всем интервале наблюдения. Характерными практическими примерами выполнения указанных действий служат обнаружение отраженных от целей сигналов в радио- и гидролокации, а также сигналов опорных маяков в радионавигации; различение M передаваемых посылок в системах цифровой связи, и т. д.

Вероятностный характер наблюдаемого колебания приводит к тому, что любой различитель или обнаружитель, сколь бы тщательно он ни был спроектирован, не застрахован от ошибок. Таким образом, любой различитель время от времени выносит решения, не соответствующие действительности, считая, что в наблюдаемом колебании присутствует k -й сигнал, тогда как в действительности в $y(t)$ содержится i -й сигнал. Разрабатывая тот или иной различитель, следует стремиться так выбрать стратегию его работы, чтобы вредные последствия, связанные с указанными ошибками, были минимальными. В поисках подобных стратегий инженеры обращаются к теории статистических решений (выводов), точнее – к разделу этой теории, посвященному проверке гипотез.

Процедура *оценивания* параметров сигнала состоит в том, чтобы по принятому колебанию $y(t)$, содержащему сигнал и помеху, а также доступной априорной информации оценить значения параметров сигнала, указав либо его измеренное значение (точечная оценка), либо интервал, в котором с заданной вероятностью лежит это значение (интервальная оценка). Процедура оценки параметров сигнала предполагает их неизменность в пределах интер-

вала наблюдения. В случае нарушения этого условия говорят о *фильтрации* параметров сигнала.

Если перечисленные задачи (процедуры) решаются в присутствии не только помех, но и однотипных сигналов, отличающихся от полезного значением параметра λ (в общем случае векторного), то говорят о процедуре *разрешения* сигналов по параметру λ .

Таким образом, к числу основных процедур относятся: обнаружение, различение, оценка (фильтрация) параметров и разрешение сигналов. В таком порядке они и будут рассмотрены в последующих разделах учебного пособия. В соответствии с заявленной в предисловии структурой учебного пособия в первой части будут рассмотрены концептуальные основы решения названных задач (операций), а их детализация вынесена во вторую и третью части.

Прежде чем формулировать содержание перечисленных задач обсудим вопрос о сигналах и помехах, характерных для современных РТС и ТКС.

1.2. Математические модели сигналов и помех

1.2.1. Сигналы, помехи, поля

Под сигналом понимают физический процесс, с помощью которого осуществляется перенос информации. Отметим, что информация может передаваться только с помощью случайных явлений (событий, величин, процессов, полей). Поэтому под сигналом будем понимать случайную векторную функцию $\mathbf{s}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки пространства; $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор параметров сигнала. В большинстве случаев зависимость сигнала от $t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}$, т. е. вид функции $\mathbf{s}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$, будет считаться известной. Если вектор $\boldsymbol{\gamma}$ содержит только информационные параметры, то сигнал называется полностью известным. Смысл этого определения будет объяснен в дальнейшем.

В ряде случаев (неучет поляризационных явлений) сигнальное поле описывается скалярной функцией $s(t, \mathbf{r}, \gamma)$. Помеха, представляемая в общем случае случайным полем – векторным $\mathbf{x}(t, \mathbf{r})$ или скалярным $x(t, \mathbf{r})$, – взаимодействует с сигналом (в случае его наличия) и образует наблюдаемое поле $\mathbf{y}(t, \mathbf{r}) = A[\mathbf{s}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \mathbf{x}(t, \mathbf{r})]$ или $y(t, \mathbf{r}) = A[s(t, \mathbf{r}, \gamma), x(t, \mathbf{r})]$ для векторного и скалярного случаев соответственно. В этих выражениях A – оператор, описывающий правила преобразования сигнала и помехи либо одной помехи

в наблюдаемое поле. В частности, при аддитивной помехе $y(t, \mathbf{r}) = \alpha_1 s(t, \mathbf{r}, \gamma) + \alpha_2 x(t, \mathbf{r})$, где α_1 и α_2 – скаляры.

В наиболее простом случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Тогда $y(t, \mathbf{r}) = s(t, \mathbf{r}, \gamma) + x(t, \mathbf{r})$. Такое взаимодействие сигнала и помехи называют *аддитивным*, а саму помеху – аддитивной.

Оптимальная обработка $y(t, \mathbf{r})$ или $y(t, \mathbf{r})$ реализуется пространственно-временными алгоритмами, наилучшим образом использующими как пространственные, так и временные свойства сигнала и помехи.

В принципе статистическая теория РТС позволяет ответить на вопрос о том, как наилучшим образом использовать пространственные и временные свойства сигналов и помех, т. е. наиболее эффективно скомпоновать элементы приемных и передающих антенн (например, фазированных решеток) в отведенных областях пространства и в то же время оптимально сформировать и обработать все подводимые к антеннам и снимаемые с них электрические колебания. Нередко, однако, разработчик довольствуется и менее общими решениями, игнорирующими пространственные свойства сигналов и помех и оперирующими лишь их временными характеристиками. Так происходит, например, в ситуациях, когда конфигурации антенных систем заданы заранее и не варьируются в процессе создания РТС либо когда функции формирования и обработки полей по времени и пространственным координатам удастся разделить. Это допустимо в том случае, когда выполнено условие узкополостности пространственно-временного сигнала, означающее, что минимальная длина волны модулирующего колебания значительно больше раскрыва антенны. В этой постановке в качестве сигнала, помехи и результирующего эффекта приемной стороной рассматриваются уже не поля, а электрические колебания, наведенные соответствующими полями в приемной антенне. Таким образом, пространственно-временные колебания $s(t, \mathbf{r})$, $x(t, \mathbf{r})$ и $y(t, \mathbf{r})$ заменяются временными зависимостями $s(t)$, $x(t)$ и $y(t)$, причем

$$y(t) = A[s(t), x(t)]. \quad (1.1)$$

Основные идеи статистической теории РТС можно изложить в компактной и доступной форме, если ограничиться именно временной трактовкой исследуемых процессов. Базирующиеся на таком подходе выводы для ситуаций, допускающих неучет либо раздельный учет пространственных эффектов, будут носить исчерпывающий характер. Вместе с тем, располагая физически содержательной и легко переводимой на технический язык основой,

можно (иногда почти автоматически) обобщить ее и на задачи, природа которых исключает пренебрежение взаимосвязью пространственных и временных характеристик носителя информации.

Таким образом, под сигналом далее будем понимать функцию времени, в которую тем или иным способом «вложено» передаваемое сообщение. Приемной стороне (наблюдателю) сигнал доступен лишь в смеси с помехой, т. е. в виде колебания (1.1). Важнейшая задача теории – научить наблюдателя *оптимально*, т. е. с наивысшей достоверностью, извлекать информацию, вложенную в сигнал, содержащийся в $y(t)$. Под извлечением информации понимают такие процедуры, как обнаружение, оценка параметров, фильтрация и т. п., однако все они в конечном счете сводятся к *различению сигналов*, т. е. к установлению того, какой из возможных сигналов присутствует в $y(t)$. Выполнив различение, наблюдатель, осведомленный заранее об алгоритме «вложения» сообщения в сигнал, т. е. о законе соответствия сигналов сообщениям, узнает и само сообщение.

В ряде случаев (пассивная локация, радиоразведка, радиоастрономия и т. п.) отправитель сообщения независим от создателя или пользователя РТС. При этом приложение статистической теории ограничено задачами *оптимального приема* (извлечения информации). В других случаях (полуактивная локация, передача информации, радионавигация, управление) отправитель в той или иной мере подчинен разработчику и последний обязан придерживаться системного подхода, предусматривая совместно с оптимальным приемом рациональный выбор как самих сигналов, так и способов кодирования, т. е. сопоставления сигналов сообщениям.

Проблеме оптимального выбора сигналов и способов кодирования в статистической теории РТС принадлежит исключительное место, поскольку от грамотности и обоснованности соответствующих решений при создании конкретных РТС существенно зависят и тактические, и технические, и экономические показатели последних. Вместе с тем, логика оптимизации сигналов непостижима в отрыве от теории оптимального приема, поэтому далее вопросы оптимизации сигналов изучаются в общем контексте с различением, оценкой параметров и разрешением сигналов.

1.2.2. Аналитическое описание сигналов

Наряду с описанием сигнала как функции времени и параметров $s(t, \lambda)$ широко используется спектральное представление, определяемое для абсолютно интегрируемых сигналов как

$$\tilde{s}(\omega, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \lambda) e^{-j\omega t} dt.$$

В общем случае комплексная функция $\tilde{s}(\omega, \lambda)$, вещественная для четных сигналов и называемая спектром Фурье или просто спектром сигнала $s(t, \lambda)$, может быть представлена в виде

$$\tilde{s}(\omega, \lambda) = |\tilde{s}(\omega, \lambda)| e^{j\varphi(\omega, \lambda)},$$

где четная функция $|\tilde{s}(\omega, \lambda)|$ называется амплитудным, а нечетная функция $\varphi(\omega, \lambda)$ – фазовым спектром сигнала.

Сигналы, используемые в РТС, традиционно подразделяются на видео- и радиосигналы: спектры первых концентрируются в окрестности нулевой частоты, тогда как вторых – в окрестности некоторой центральной частоты ω_0 , определяемой как

$$\omega_0 = \int_0^{\infty} \omega |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega / \int_0^{\infty} |s(\omega, \lambda)|^2 d\omega. \quad (1.2)$$

Четкой границы между видеосигналами и радиосигналами нет. Проиллюстрируем это обстоятельство на примере сигнала, содержащего различное число полупериодов гармонического колебания, т. е.

$$s(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_0 t, & |t| \leq \frac{\pi k}{2\omega_0}; \\ 0, & |t| > \frac{\pi k}{2\omega_0}. \end{cases}$$

Спектр такого сигнала –

$$\tilde{s}(\omega) = U_m \int_{-\pi k/2\omega_0}^{\pi k/2\omega_0} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m k \pi}{\omega_0} \left[\frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)\pi k}{2\omega_0}}{\frac{(\omega + \omega_0)\pi k}{2\omega_0}} + \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\pi k}{2\omega_0}}{\frac{(\omega - \omega_0)\pi k}{2\omega_0}} \right].$$

Рассмотрим значения спектра на частотах $\omega = 0$ и $\omega = \omega_0$ для различных значений k , определяющих длительность рассматриваемого сигнала. При $\omega = 0$

$$\tilde{s}_k(0) = 2 \frac{U_m k \pi}{\omega_0} \frac{\sin \pi k / 2}{\pi k / 2}.$$

Для четных k сигнал содержит целое число периодов, $\tilde{s}_{2k}(0) = 0$. Напомним, что значение спектра на нулевой частоте равно площади, ограниченной функцией $s(t)$.

Для нечетных k в соответствии с данным утверждением

$$\tilde{s}_k(0) = \begin{cases} 4U_m/\omega_0, & k = 1, 5, 9, \dots; \\ -4U_m/\omega_0, & k = 3, 7, 11, \dots, \end{cases}$$

где $4U_m/\omega_0$ – площадь одного полупериода. При $\omega = \omega_0$ после раскрытия

неопределенности в выражении для $\tilde{s}(\omega)$ будем иметь $\tilde{s}_k(\omega_0) = \frac{U_m \pi k}{\omega_0}$.

Если $k \rightarrow \infty$, сигнал превращается в гармоническое колебание $s(t) = U_m \cos \omega_0 t$, и его спектр имеет вид $\tilde{s}(\omega) = \frac{U_m}{\pi} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$.

На рис. 1.2. изображен спектр рассматриваемого сигнала, представленный в виде рельефа.

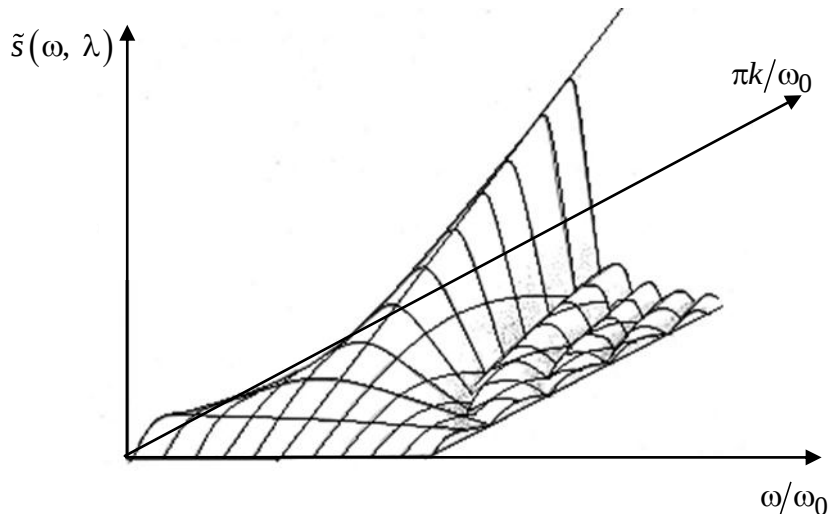


Рис. 1.2

По горизонтальной оси отложена нормированная относительно ω_0 частота ω , т. е. $x = \omega/\omega_0$. По оси, перпендикулярной плоскости чертежа, отложено число полупериодов k или длительность сигнала $\pi k/\omega_0$. По оси орди-

нат откладываются значения $|\tilde{s}(\omega, \lambda)|$. Симметричная часть, соответствующая $\omega < 0$, опущена.

Функцию $W(\omega) = |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 / \int_0^\infty |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega$ можно формально рассматривать как плотность вероятности некоторой случайной величины, ибо она неотрицательна и выполняется условие нормировки $\int_0^\infty W(\omega) d\omega = 1$. Тогда ω_0 – среднее значение, что и оправдывает ее название.

Если интеграл $\int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega$ существует, то ширину спектра радиосигнала $\Delta\omega_p$ можно определить, как

$$\Delta\omega_p = \left[\int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega / \int_0^\infty |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega \right]^{1/2}. \quad (1.3)$$

Величина $\Delta\omega_p$ имеет смысл среднеквадратического отклонения (СКО) для распределения $W(\omega)$ и называется среднеквадратической шириной спектра. Существование интеграла $\int_0^\infty (\omega - \omega_0)^2 |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega$ связано со скоростью

убывания спектра по мере отклонения от центральной частоты ω_0 и определяется «гладкостью» сигнала $s(t, \lambda)$. Более универсальной характеристикой является эффективная ширина спектра $\Delta\omega_{\text{эф}}$, определяемая как

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \frac{1}{|\tilde{s}(\omega_{\text{max}}, \lambda)|^2} \int_0^\infty |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega, \text{ где } \omega_{\text{max}} - \text{абсцисса максимума функ-}$$

ции $|\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2$ на положительной части оси частот.

Важной характеристикой спектра сигнала служит среднеквадратическая частота, определяемая как

$$\omega_{\text{ск}} = \left[\int_{-\infty}^\infty \omega^2 |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega / \int_{-\infty}^\infty |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\int_0^{\infty} \omega^2 |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega \bigg/ \int_0^{\infty} |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega \right]^{1/2}.$$

Раскрывая в интеграле с учетом четности подынтегральных выражений, стоящих в числителе выражения (1.3), скобки и учитывая определение средней частоты ω_0 (1.2), получим соотношение, связывающее среднеквадратическую ширину спектра $\Delta\omega_p$, среднеквадратическую $\omega_{ск}$ и центральную ω_0 частоты спектра

$$\omega_{ск}^2 = \Delta\omega_p^2 + \omega_0^2.$$

Это соотношение эквивалентно выражению $m_2 = M_2 + m_1^2$, связывающему между собой средний квадрат случайной величины m_2 , среднее значение m_1 и дисперсию M_2 . Аналогичные характеристики используются для оценки протяженности сигнала и его положения на оси времени. Так, среднеквадратическая длительность сигнала определяется как

$$\Delta t_{ск} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 s^2(t, \lambda) dt \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt \right]^{1/2},$$

где $t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t s^2(t, \lambda) dt \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt$ характеризует временное положение сигнала.

Для комплексных сигналов следует заменить $s^2(t, \lambda)$ на $|s(t, \lambda)|^2$. Эффективная длительность сигнала $\Delta t_{эф}$ по аналогии с $\Delta\omega_{эф}$ равна

$$\Delta t_{эф} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt \bigg/ s_{\max}^2.$$

Напомним, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega, \lambda)|^2 d\omega = E(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ – энергия сигнала.

Для комплексных сигналов следует учитывать сделанные выше замечания.

Если энергия сигнала не зависит от каких-либо параметров, то такие параметры называются неэнергетическими.

Радиосигналы, для которых выполняется условие $\frac{\Delta\omega_{\text{эф}}}{\omega_0} \ll 1$, относятся к категории узкополосных. График амплитудно-частотного спектра узкополосного сигнала и иллюстрация определения $\Delta\omega_{\text{эф}}$ приведены на рис. 1.3.

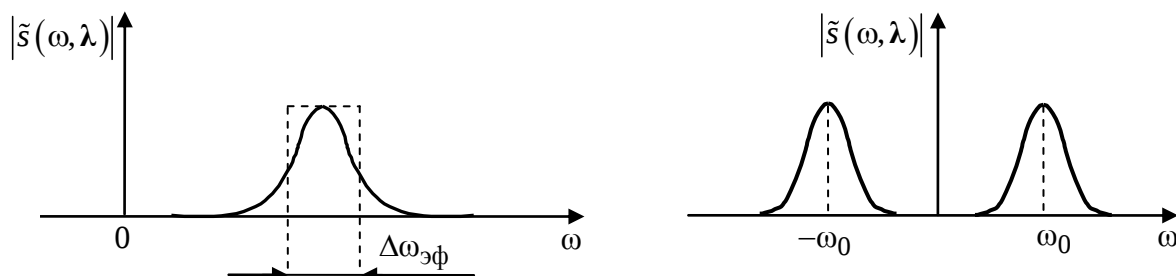


Рис. 1.3

Отношение $\frac{\Delta\omega_{\text{эф}}}{\omega_0}$ называют показателем широкополосности сигнала.

В случае $\frac{\Delta\omega_{\text{эф}}}{\omega_0} \ll 1$, как уже отмечалось, речь идет об узкополосном сигнале.

Сигналы, у которых $\frac{\Delta\omega_{\text{эф}}}{\omega_0} \geq 1$, называют сверхширокополосными.

1.2.3. Огибающая и фаза

подавляющее большинство сигналов РТС – узкополосные, несмотря на то что ширина спектра может быть весьма большой (десятки и сотни мегагерц). Условие узкополосности выполняется за счет выбора соответствующего значения центральной частоты ω_0 . Узкополосные сигналы удобно представить с помощью огибающей $S(t, \lambda_1)$ и фазы $\varphi(t, \lambda_2)$

$$s(t, \lambda) = S(t, \lambda_1) \cos [\Phi(t, \lambda_2)] = S(t, \lambda_1) \cos [\omega_0 t + \varphi(t, \lambda_2)],$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ и λ_1, λ_2 – компоненты вектора λ , от которых зависят огибающая и фаза соответственно. При этом огибающая $S(t, \lambda_1)$ и фаза $\varphi(t, \lambda_2)$ представляют собой медленно меняющиеся функции времени по сравнению с исходным сигналом, скорость изменения которого определяется множителем $\cos[\omega_0 t + \varphi(t, \lambda_2)]$. Это обстоятельство позволяет существенно упростить вычисление энергии узкополосного сигнала, так как

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \lambda) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \lambda_1) \cos^2[\omega_0 t + \varphi(t, \lambda_2)] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \lambda_1) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \lambda_1) \cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t, \lambda_2)] dt.$$

В этом выражении вторым слагаемым по сравнению с первым для узкополосного сигнала можно пренебречь (подумайте, почему) и

$$E \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t, \lambda_1) dt.$$

Таким образом, компонента λ_2 , определяющая поведение фазы $\varphi(t, \lambda_2)$, не влияет на энергию узкополосного сигнала и ее можно считать неэнергетической. Таких компонент может быть несколько (приведите примеры).

Для узкополосных сигналов эффективная длительность

$$\Delta t_{\text{эф}} = \frac{1}{S_{\text{max}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \varphi(t)] dt \cong \frac{1}{2S_{\text{max}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt,$$

т. е. в два раза меньше эффективной длительности огибающей.

Например, для прямоугольного радиоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), & t \in [0, \tau_{\text{и}}], \\ 0, & t \notin [0, \tau_{\text{и}}] \end{cases}$$

при условии $\tau_{\text{и}}/T_0 \gg 1$, где $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$; U_m и $\tau_{\text{и}}$ – энергетические параметры, а

ω_0 и φ – неэнергетические. Эффективная длительность такого сигнала

$$\Delta t_{\text{эф}} = \frac{1}{U_m^2} \int_0^{\tau_{\text{и}}} U_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt \cong \frac{\tau_{\text{и}}}{2}.$$

Условие узкополосности сигнала $s(t)$ обеспечивается выполнением неравенства $\tau_{\text{и}}/T_0 \gg 1$, т. е. радиоимпульс содержит большое число периодов высокочастотного заполнения.

Замена сигнала $s(t)$ двумя новыми функциями: огибающей $S(t)$ и фазой $\Phi(t)$, т. е. представление в форме $s(t) = S(t) \cos \Phi(t)$, может быть сделано различными способами. Однако для узкополосных сигналов наиболее продуктивно использование гильбертовых огибающей и фазы, определяемых на основе преобразования Гильберта $s_{\perp}(t)$ исходного сигнала

$$s_{\perp}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Записанный интеграл есть свертка исходного сигнала $s(t)$ и функции $\frac{1}{\pi t}$, которую можно рассматривать как импульсную характеристику фильтра, реализующего преобразование Гильберта. Коэффициент передачи такого фильтра, называемого гильбертовым, имеет вид

$$K_H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-j\omega t)}{\pi t} dt = -j \operatorname{sign}(\omega),$$

где $\operatorname{sign}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0, \\ -1, & \omega < 0, \end{cases}$ знаковая функция.

Записывая $K_H(j\omega)$ в показательной форме –

$$K_H(j\omega) = \begin{cases} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right), & \omega \geq 0, \\ \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right), & \omega < 0, \end{cases}$$

видим, что амплитудно-частотная характеристика гильбертова фильтра равна 1 на всех частотах, а фазо-частотная равна $\pi/2$ для отрицательных частот и $-\pi/2$ для неотрицательных. Поскольку импульсная характеристика фильтра $1/\pi t$ не обращается в 0 при $t < 0$, то гильбертов фильтр физически нереализуем.

Обозначение $s_{\perp}(t)$ связано с тем, что преобразование Гильберта, не меняя амплитудных значений спектральных составляющих, сдвигает фазы составляющих на $\pi/2$, делая сигнал $s_{\perp}(t)$ ортогональным относительно исходного сигнала $s(t)$. Убедиться в этом можно, используя равенство Парсевала

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s_{\perp}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\omega)[-j \operatorname{sign}(\omega)\tilde{s}(\omega)]^* d\omega = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 \operatorname{sign}(\omega) d\omega = 0$$

как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах.

Располагая $s(t)$ и $s_{\perp}(t)$, можно определить гильбертовы огибающую $S(t)$ и фазу $\Phi(t)$ следующим образом:

$$S(t) = \sqrt{s^2(t) + s_{\perp}^2(t)}; \quad \Phi(t) = \operatorname{arctg} \frac{s_{\perp}(t)}{s(t)} + \pi \frac{\operatorname{sign} s(t) - 1}{2}.$$

Из приведенной записи видна верность соотношения $S(t) \geq |s(t)|$, что обосновывает термин «огибающая». Можно показать, что в точках касания

($S(t) = s(t)$) огибающая $S(t)$ и сигнал $s(t)$ имеют одинаковые значения производных.

Для узкополосного сигнала полная фаза $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$.

Так как огибающая $S(t)$ есть медленно меняющаяся функция по сравнению с $\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$, то в соответствии с правилом вынесения «медленного» множителя за знак оператора Гильберта H , будем иметь

$$s_{\perp}(t) = HS(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = S(t)H \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = S(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Комплексная функция

$$\dot{s}(t) = s(t) + js_{\perp}(t) = S(t) \{ \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + j \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \} = S(t) e^{j\varphi(t)} e^{j\omega_0 t} \quad (1.4)$$

называется аналитическим сигналом.

Его спектр (убедитесь в этом сами) – $\tilde{\dot{s}}(\omega) = \begin{cases} 2\tilde{s}(\omega), & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$

Как видно из выражения (1.4) для аналитического сигнала $\dot{s}(t)$, функция

$$\dot{S}(t) = S(t) e^{j\varphi(t)}, \quad (1.5)$$

называемая комплексной огибающей, содержит в себе всю информацию о законах амплитудной $S(t)$ и угловой $\varphi(t)$ модуляций, т. е. по существу всю информацию о сигнале кроме характеристики положения спектра на оси частот, определяемого средней частотой ω_0 .

Из определения аналитического сигнала (1.4) и комплексной огибающей (1.5) видно, что

$$s(t) = \operatorname{Re} \dot{s}(t), \quad S(t) = |\dot{S}(t)|,$$

$$\varphi(t) = \arg \dot{S}(t).$$

Используя теоремы о спектрах [17], можно показать (попробуйте

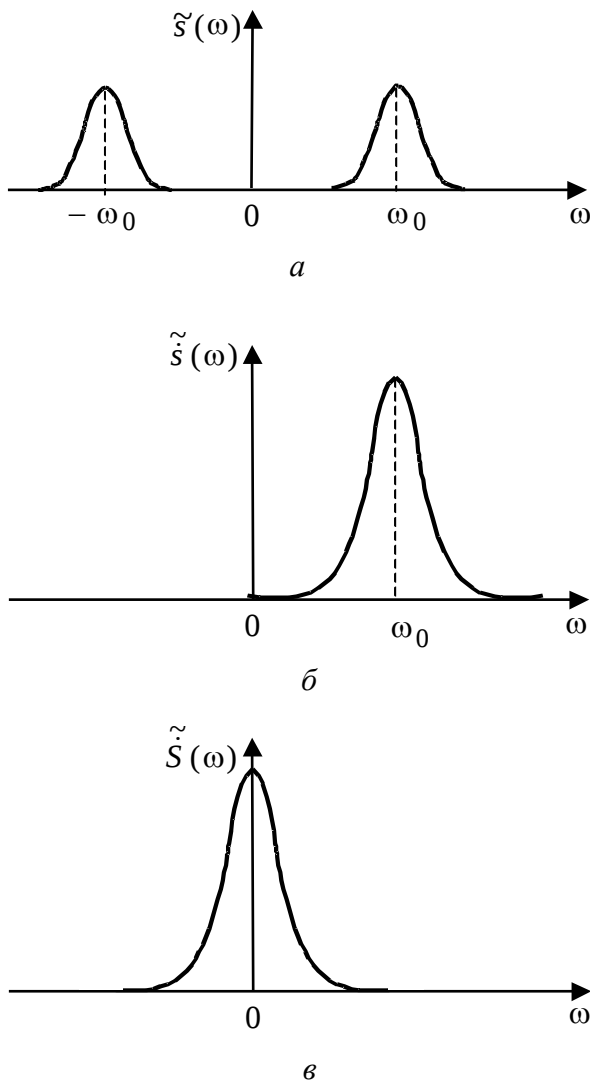


Рис. 1.4

сами), что спектр комплексной огибающей $\tilde{S}(\omega)$ равен $\tilde{S}(\omega) = \tilde{s}(\omega + \omega_0)$, т. е. получается сдвигом влево на величину ω_0 спектра аналитического сигнала и является спектром видеосигнала. Для иллюстрации на рис. 1.4 приведены амплитудно-частотные спектры исходного сигнала (1.4, а), аналитического сигнала (1.4, б) и комплексной огибающей (1.4, в).

Радиосигнал с частотно-временным произведением $B = \Delta\omega\Delta t$, называемым базой сигнала, значительно превышающей единицу, принято именовать широкополосным (сложным) в отличие от прочих, для которых это произведение имеет порядок единицы. Для сложных сигналов характерно независимое управление длительностью и шириной спектра. Более подробно с обсуждением этой проблемы можно познакомиться с помощью монографии [3, 1.1].

1.2.4. Корреляционные функции и функции неопределенности

Важнейшей характеристикой сигнала служит его корреляционная функция $K(\tau)$, определяемая как скалярное произведение сигнала $s(t)$ на его комплексно-сопряженную копию $s^*(t - \tau)$, сдвинутую на время τ , т. е.

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t - \tau)dt. \text{ Для вещественных сигналов комплексное сопряжение в этом равенстве становится избыточным.}$$

Нормированная корреляционная функция, или коэффициент корреляции

$\rho(\tau)$, определяется как $\rho(\tau) = \frac{1}{E}K(\tau)$, где $E = K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$ – энергия сигнала.

На основании равенства Парсеваля корреляционная функция может быть выражена через спектр сигнала $K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$, т. е. она представляет собой преобразование Фурье энергетического спектра сигнала.

Для комплексной огибающей $\dot{S}(t)$, в соответствии с уже сказанным, корреляционная функция $K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t - \tau)dt$, а коэффициент корреляции – нормированная автокорреляционная функция (АКФ) –

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t)\dot{S}^*(t - \tau)dt. \quad (1.6)$$

Обобщением коэффициента корреляции является функция неопределенности (ФН) сигнала $s(t, \lambda)$ по неэнергетическому параметру λ для вещественного и комплексного сигнала соответственно

$$\begin{aligned}\psi(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \lambda_1) s(t, \lambda_2) dt; \\ \dot{\psi}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \lambda_1) \dot{s}^*(t, \lambda_2) dt.\end{aligned}\tag{1.7}$$

В формулах (1.7) E – энергия сигнала, а λ_1 и λ_2 – два набора компонент вектора λ . Если ФН зависит только от разности одноименных компонент вектора λ , то такая ФН называется функцией неопределенности стационарного типа. В этом случае за λ_1 можно взять нулевой вектор $\mathbf{0}$, а λ_2 обозначить как λ .

Тогда $\psi(\lambda) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \mathbf{0}) s(t, \lambda) dt$ для вещественных сигналов и

$$\dot{\psi}(\lambda) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \mathbf{0}) \dot{s}^*(t, \lambda) dt\tag{1.8}$$

– для комплексных.

С учетом сказанного ФН комплексной огибающей $\dot{S}(t, \lambda)$ имеет вид

$$\dot{\psi}(\lambda) = \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t, \mathbf{0}) \dot{S}^*(t, \lambda) dt.$$

(Объясните, почему нормировочный множитель перед интегралом равен $1/2E$, а не $1/E$?) Часто функцией неопределенности называют абсолютное значение (1.8), обозначая его как $\Psi(\lambda)$, т. е.

$$\Psi(\lambda) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t, \mathbf{0}) \dot{S}^*(t, \lambda) dt \right|.\tag{1.9}$$

Особую роль играет частотно-временная ФН Вудворда, соответствующая случаю, когда $\lambda = (\tau, F)$, где τ и F – смещение сигнала по времени и по частоте. Так как сдвигу спектра на F Гц отвечает во временной области умножение на $e^{j2\pi Ft}$, то с учетом комплексного сопряжения в (1.9) можно записать:

$$\Psi(\tau, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{-j2\pi Ft} dt \right|.$$

При записи этого выражения введено обозначение $\dot{S}(t, \mathbf{0}) = \dot{S}(t)$. По аналогии с (1.7) может быть введена взаимная функция неопределенности

(ВФН) $\psi_{12}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t, \lambda_1) s_2(t, \lambda_2) dt$ – для вещественных сигналов, и $\dot{\psi}_{12}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t, \lambda_1) s_2^*(t, \lambda_2) dt$ – для комплексных.

Подробное знакомство с ФН и ВФН отложим до разделов, посвященных оцениванию параметров и разрешению сигналов.

Частным случаем значения ВФН является коэффициент корреляции ρ_{12} сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, определенный как

$$\rho_{12} = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt.$$

Если сигналы имеют одинаковую энергию, $E_1 = E_2 = E$, то

$$\rho_{12} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца [14], легко установить, что $|\rho_{12}| \leq 1$. Сигналы, у которых $\rho_{12} = -1$, удовлетворяют условию $s_2(t) = -s_1(t)$ и называются противоположными. При $\rho_{12} = 0$ говорят об ортогональных сигналах.

С помощью обобщенного равенства Парсеваля коэффициент корреляции сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ может быть записан с помощью их спектров

$$\rho_{12} = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_1(\omega) \tilde{s}_2^*(\omega) d\omega,$$

где $E_i, i = 1, 2$ – энергии сигналов.

В современных РТС и ТКС наиболее востребованы дискретные сигналы, что связано с удобством их формирования и обработки. Рассмотрим, следуя [3], обобщенную модель и категории дискретных сигналов.

1.2.5. Обобщенная модель и категории дискретных сигналов

Дискретный сигнал есть последовательность элементарных символов (импульсов) фиксированной формы, повторяющихся с некоторым фиксиро-

ванным временным интервалом. Упомянутый элементарный импульс, именуемый далее *чипом*, исчерпывающе характеризуется комплексной огибающей $\dot{S}_0(t)$, задающей его форму и закон внутренней угловой модуляции, если последняя присутствует. Традиционно (но не обязательно) временной интервал Δ между последовательными чипами равен или больше длительности чипа Δ_c . Модуляция всего сигнала сводится к манипулированию амплитудами, фазами и, возможно, частотами отдельных чипов. В соответствии с этим словесным описанием формальное представление комплексной огибающей дискретного сигнала дается равенством

$$\dot{S}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \dot{S}_0(t - i\Delta) \exp(j2\pi F_i t), \quad (1.10)$$

где в дополнение к уже расшифрованным обозначениям a_i и F_i — соответственно комплексная амплитуда и частота (измеряемая сдвигом относительно фиксированной центральной частоты) i -го чипа. Очевидно, что последовательность $\{|a_i|, i = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ определяет действительные амплитуды чипов, т. е. их амплитудную модуляцию. Аналогично, последовательности $\{\varphi_i = \arg a_i, i = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ и $\{F_i, i = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ задают законы модуляции чипов по фазе и частоте. Рис. 1.5 иллюстрирует смысл некоторых введенных обозначений.

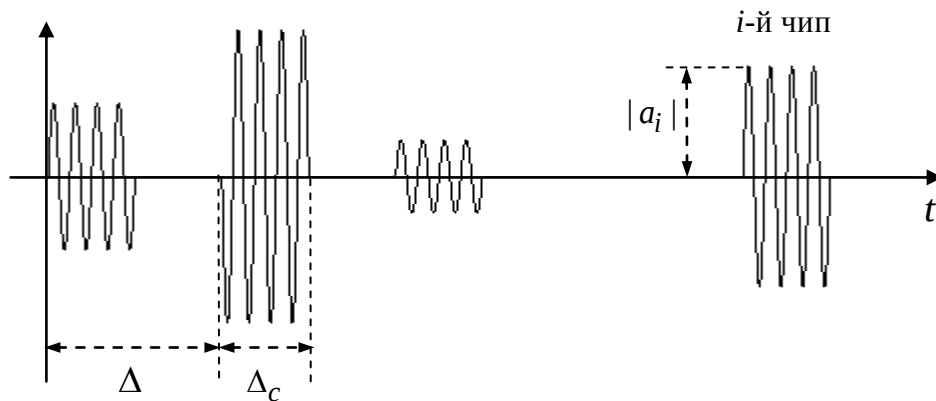


Рис. 1.5

Предположим, что в модели (1.10) действительные амплитуды $|a_i|$ могут быть ненулевыми только для $0 \leq i \leq N-1$, тогда как при $i < 0$ и $i \geq N$ $|a_i| = 0$, т. е. сигнал является пакетом конечного числа N манипулированных чипов. Назовем такой сигнал *импульсным*, или *аперiodическим*. Длительность аперiodического сигнала $T = (N-1)\Delta + \Delta_c$. Важной альтернативой импульсному

служит сигнал, у которого закон модуляции повторяется с периодом в N чипов: $a_i = a_{i+N}$, $F_i = F_{i+N}$, $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Дискретный сигнал подобного типа естественно называть *периодическим*. Период последнего в единицах реального времени $T = N\Delta$, и любой такой сигнал получается, очевидно, повторением с периодом $N\Delta$ апериодического, являющегося, в свою очередь, однопериодным сегментом периодического сигнала. В обоих случаях будем называть параметр N *длиной* дискретного сигнала.

В рамках описанной общей модели можно выделить несколько категорий дискретных сигналов в зависимости от конкретных деталей модуляции чипов.

1. Если манипулируются лишь комплексные амплитуды чипов, а их частоты одинаковы ($F_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, N-1$), сигнал называется *амплитудно-фазоманипулированным* (АФМ). Традиционное название последовательности комплексных амплитуд чипов $\{a_i, i = 0, 1, \dots, N-1\}$ – *кодовая последовательность* или просто *код*.

2. Если манипуляции подлежат только фазы чипов АФМ-сигнала, а их амплитуды неизменны ($|a_i| = 1$, $i = 0, 1, \dots, N-1$), АФМ-сигнал именуют *фазоманипулированным* (ФМ). ФМ-сигналы характерны для так называемых широкополосных систем с прямым расширением спектра.

3. Среди ФМ-сигналов возможна дальнейшая классификация в зависимости от модуляционного алфавита. В случае бинарных комплексных амплитуд с алфавитом $a_i = \pm 1$ (или эквивалентно $|a_i| = 1$, $\varphi_i \in \{0, \pi\}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$) сигнал является бинарным ФМ (БФМ), квадратурный ФМ-алфавит $a_i = \pm 1, \pm j$ (или эквивалентно $|a_i| = 1$, $\varphi_i \in \{0, \pi, \pm \pi/2\}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$) порождает сигнал с квадратурной ФМ (КФМ или ФМ-4), и т. д.

4. Если управлению подвергаются только частоты чипов, а комплексные амплитуды неизменны, то сигнал частотно-манипулированный (ЧМ). Кодовая последовательность подобного сигнала представляет собой последовательность частот $\{F_i, i = 0, 1, \dots, N-1\}$. Сигналы этого типа используются, в частности, в системах с прыгающей частотой.

1.2.6. Корреляционные функции АФМ-сигналов

Корреляционные функции, характеризующие схожесть сдвинутых во времени копий сигналов, критически важны в задачах измерения времени и разрешения. Искусство дизайна широкополосных систем во многих аспектах

подразумевает умение находить сигналы с должными корреляционными свойствами. Цель настоящего подраздела состоит в получении обобщающего выражения для корреляционных функций АФМ-сигналов. Как следует из предыдущего, комплексная огибающая АФМ-сигнала имеет вид

$$\dot{S}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \dot{S}_0(t - i\Delta). \quad (1.11)$$

Обратимся вначале к равенству для нормированной АКФ (1.6), учитывая, что в случае периодического сигнала подынтегральное выражение также периодически и, следовательно, усреднение по времени (интегрирование) может быть выполнено в пределах одного периода с нормировкой к энергии однопериодного сегмента сигнала. Тем самым, в типичном для практики предположении¹ $\Delta_c \leq \Delta$, можно воспользоваться универсальным выражением

$$\dot{\rho}(\tau) = \frac{1}{2E} \int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt, \quad (1.12)$$

пригодным для аperiodического и периодического сигналов, где $E = \|\mathbf{a}\|^2 E_0$ – полная энергия для первого и энергия за период для второго. Здесь E_0 обозначает энергию чипа, а $\|\mathbf{a}\|$ – геометрическая длина (евклидова норма) *кодирового вектора* $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$, иначе говоря, $\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |a_i|^2$ – энергия N -элементной последовательности $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$.

Подстановка (1.11) в (1.12) дает

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(\tau) &= \frac{1}{E} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_i a_k^* \int_0^T \dot{S}_0(t - i\Delta) \dot{S}_0^*(t - k\Delta - \tau) dt = \\ &= \frac{1}{E} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_k^* \int_0^T \dot{S}_0(t - i\Delta) \dot{S}_0^*(t - k\Delta - \tau) dt, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из равенства интеграла нулю для i вне множества $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

Введение АКФ одного чипа

$$\dot{\rho}_c(\tau) = \frac{1}{2E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_0(t) \dot{S}_0^*(t - \tau) dt$$

¹ Конечный результат останется справедливым и без этого допущения, позволяющего, однако, упростить вывод за счет исключения некоторых второстепенных деталей.

придает равенству форму

$$\dot{\rho}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_k^* \right) \dot{\rho}_c[\tau - (i - k)\Delta].$$

Теперь замена индекса суммирования k на $m = i - k$ представляет последний результат как

$$\dot{\rho}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho(m) \dot{\rho}_c(\tau - m\Delta), \quad (1.13)$$

где

$$\rho(m) = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i-m}^* \quad (1.14)$$

– АКФ кодовой последовательности $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$, характеризующая схожесть последней с ее копией, сдвинутой на m позиций.

Соотношение (1.13) допускает весьма красноречивую трактовку. Сравнение его с моделью (1.11) позволяет заключить, что АКФ АФМ-сигнала может сама интерпретироваться как АФМ-сигнал! При этом чипом последнего служит АКФ $\dot{\rho}_c(\tau)$ исходного чипа, тогда как кодовой последовательностью оказывается АКФ (1.14) кодовой последовательности $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$ исходного сигнала. Следовательно, при заданном чипе $\dot{S}_0(t)$ АКФ АФМ-сигнала полностью определяется АКФ $\rho(m)$ кодовой последовательности (в дальнейшем АКФ *кода*), и синтез АФМ-сигналов с хорошими корреляционными свойствами состоит в отыскании последовательностей с хорошими АКФ. Отметим также, что, как и любая нормированная АКФ, $\rho(m)$ при $m = 0$ равна единице и представляет собой четную функцию своего аргумента: $\rho(m) = \rho^*(-m)$.

Для построения многопользовательских систем требуются семейства дискретных сигналов с приемлемыми взаимными корреляционными свойствами. Повторяя проделанные выкладки для двух различных (k -го и l -го) АФМ-сигналов одной длины с идентичными чипами, приходим к следующему равенству для их нормированной ВКФ

$$\dot{\rho}_{kl}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_{kl}(m) \dot{\rho}_c(\tau - m\Delta), \quad (1.15)$$

где

$$\rho_{kl}(m) = \frac{1}{\|\mathbf{a}_k\| \|\mathbf{a}_l\|} \sum_{i=0}^{N-1} a_{k,i} a_{l,i-m}^* \quad (1.16)$$

– ВКФ кодовых последовательностей $\{a_{k,0}, a_{k,1}, \dots, a_{k,N-1}\}$ и $\{a_{l,0}, a_{l,1}, \dots, a_{l,N-1}\}$ двух сигналов, характеризующая степень сходства первой последовательности со сдвинутой на m позиций репликой второй. Очевидно, ВКФ (1.15) вновь представляет собой АФМ-сигнал, у которого роль кодовой последовательности выполняет ВКФ двух исходных кодовых последовательностей (ВКФ кодов). Тем самым синтез семейства дискретных сигналов с требуемыми взаимно корреляционными свойствами сводится к отысканию множества последовательностей, обладающих подходящими ВКФ. Соотношения (1.15) и (1.16) обладают максимальной универсальностью, так как годятся и для АКФ: АКФ k -го сигнала есть $\dot{\rho}_{kk}(\tau)$, что автоматически распространяется и на кодовые последовательности.

Полученные результаты будут широко использованы далее, иногда без нормирующих множителей в (1.15) и (1.16), т. е. в вариантах ненормированных корреляционных функций

$$R(m) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i-m}^*, \quad R_{kl}(m) = \sum_{i=0}^{N-1} a_{k,i} a_{l,i-m}^*.$$

1.2.7. Вычисление корреляционных функций кодовых последовательностей

Рассмотрим кодовую последовательность $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$. Если она используется для формирования импульсного сигнала, то в общей модели (1.14) $a_i = 0$ для всех отрицательных i и $i \geq N$ *апериодическая*, или *импульсная*, АКФ вычисляется как

$$\rho_a(m) = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=m}^{N-1} a_i a_{i-m}^*, & m \geq 0, \\ \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=0}^{N-1+m} a_i a_{i-m}^*, & m < 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

В принципе, вторая строка в (1.17) избыточна, поскольку любая АКФ обладает свойством четности и, в частности, $\rho_a(-m) = \rho_a^*(m)$. Очевидно также, что без нормирующего множителя апериодическая АКФ представляет

собой скалярное произведение вектора $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ и его копии, *нециклически* сдвинутой на m позиций. Последнее означает, что при сдвиге вектора $\mathbf{a}$ вправо ($m \geq 0$) или влево ($m < 0$) сумма в (1.17) учитывает только перекрывающиеся компоненты $\mathbf{a}$ и его сдвинутой копии, а все остальные полагаются равными нулю. Например, для вычисления $\rho_a(1)$ первоначально следует записать одну под другой исходную последовательность и ее комплексно сопряженную копию, сдвинутую вправо на одну позицию, а затем выполнить поэлементное перемножение и просуммировать полученные произведения:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} \\ a_0^* & a_1^* & a_2^* & \dots & a_{N-2}^* & \end{array} \quad \rho_a(1) = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=1}^{N-1} a_i a_{i-1}^* .$$

Обратимся теперь к периодическому сигналу, т. е. положим $a_{i+N} = a_i$, $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Тогда (1.14) окажется *периодической* АКФ $\rho_p(m)$, сумма в которой всегда содержит N слагаемых, поскольку $a_{-1} = a_{N-1}$, $a_{-2} = a_{N-2}$ и т. д.

$$\rho_p(m) = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i-m}^* . \quad (1.18)$$

В этом случае скалярное произведение вычисляется для исходной кодовой последовательности и ее *циклически* сдвинутой копии, где при $m \geq 0$ m крайних левых «пустых» позиций заполняются символами, «вытолкнутыми» вправо. Например, схема вычисления $\rho_p(1)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} \\ a_{N-1}^* & a_0^* & a_1^* & a_2^* & \dots & a_{N-2}^* \end{array} \quad \rho_p(1) = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i-1}^* .$$

Поскольку $\rho_p(m)$ вычисляется в предположении о периодичности кодовой последовательности, то она сама периодична с периодом N , т. е. $\rho_p(m) = \rho_p(m + N)$, $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$, что непосредственно следует из (1.18) и, в свою очередь, трансформирует свойство четности к виду

$$\rho_p(-m) = \rho_p(N - m) = \rho_p^*(m - N) . \quad (1.19)$$

Это равенство показывает, что $\rho_p(m)$ полностью задается своими значениями только при сдвигах $m=1, 2, \dots, [N/2]$, где $[N/2]$ означает округление в направлении нуля. Другое важное свойство периодической АКФ вытекает из (1.18) после расщепления суммы на две части:

$$\rho_p(m) = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=m}^{N-1} a_i a_{i-m}^* + \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \sum_{i=0}^{m-1} a_i a_{i-m}^*, \quad m \geq 0.$$

Первое слагаемое здесь – аperiodическая АКФ $\rho_a(m)$ (см. (1.17)), тогда как второе – $\rho_a(m-N)$, что непосредственно проверяется вычислением $\rho_a(m-N)$ из второй строки (1.17). В результате получается равенство, связывающее периодическую АКФ с аperiodической:

$$\rho_p(m) = \rho_a(m) + \rho_a(m-N), \quad m = 0, 1, \dots, N. \quad (1.20)$$

Соотношению (1.20) принадлежит важнейшая роль в синтезе импульсных сигналов с хорошими корреляционными свойствами.

Пример 1. Табл. 1.1 иллюстрирует вычисление аperiodической и периодической АКФ бинарной последовательности длины $N=8$ $\{+++-+--\}$. Здесь, как это обычно принято, символы бинарного алфавита $+1$ и -1 представлены знаками «+» и «-» соответственно. Два последних столбца таблицы содержат значения ненормированной АКФ, а затененные клетки отвечают символам, не участвующим в вычислении аperiodической АКФ. На рис. 1.6 построены нормированные АКФ БФМ-видеосигнала с прямоугольными чипами длительности $\Delta_c = \Delta$, модулированными рассматриваемой кодовой последовательностью. Сплошная, штриховая и штрих-пунктирная линии представляют периодическую АКФ $\dot{\rho}_p(\tau)$ и сдвинутые копии $\dot{\rho}_a(\tau)$ и $\dot{\rho}_a(\tau-T)$ аperiodической АКФ соответственно. Разумеется, графики подтверждают справедливость равенств (1.19) и (1.20).

Таблица 1.1

m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$R_a(m)$	$R_p(m)$
0	+	+	+	-	-	+	-	-	+8	+8
1	-	+	+	+	-	-	+	-	+1	0
2	-	-	+	+	+	-	-	+	-2	-4
3	+	-	-	+	+	+	-	-	+1	0
4	-	+	-	-	+	+	+	-	0	0
5	-	-	+	-	-	+	+	+	-1	0
6	+	-	-	+	-	-	+	+	-2	-4
7	+	+	-	-	+	-	-	+	-1	0

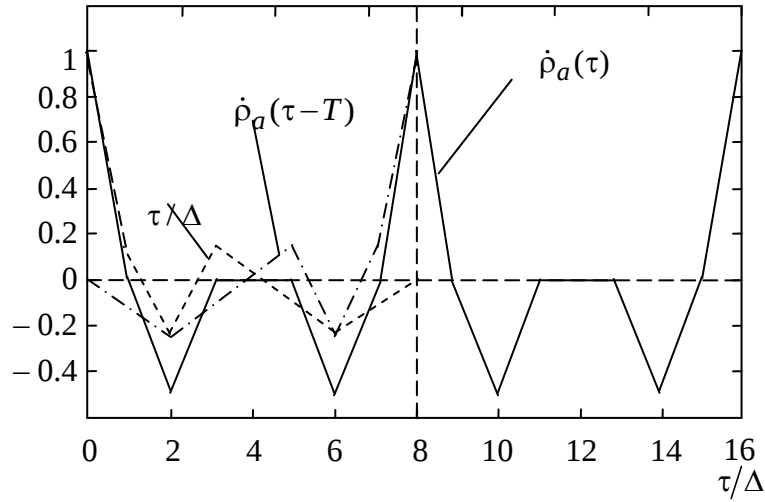


Рис. 1.6

Говоря о взаимной корреляции двух последовательностей одной длины, можно вновь различать аperiodическую $\rho_{a,kl}(m)$ и периодическую $\rho_{p,kl}(m)$ ВКФ, определяемые как

$$\rho_{a,kl}(m) = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{a}_k\| \|\mathbf{a}_l\|} \sum_{i=m}^{N-1} a_{k,i} a_{l,i-m}^*, & m \geq 0, \\ \frac{1}{\|\mathbf{a}_k\| \|\mathbf{a}_l\|} \sum_{i=0}^{N+m-1} a_{k,i} a_{l,i-m}^*, & m < 0; \end{cases}$$

$$\rho_{p,kl}(m) = \frac{1}{\|\mathbf{a}_k\| \|\mathbf{a}_l\|} \sum_{i=0}^{N-1} a_{k,i} a_{l,i-m}^* .$$

Соотношение (1.20) остается в силе и для ВКФ:

$$\rho_{p,kl}(m) = \rho_{a,kl}(m) + \rho_{a,kl}(m - N),$$

однако ни четность, ни равенство единице в нуле, присущие АКФ, не являются обязательными свойствами произвольной ВКФ.

1.2.8. Корреляционные функции ЧМ-сигналов

Решим теперь ту же задачу, что и в двух предыдущих подразделах, но в приложении к ЧМ-сигналам. Следуя определению, комплексную огибающую ЧМ-сигнала можно записать как

$$\dot{S}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \dot{S}_0(t - i\Delta) \exp(j2\pi F_i t),$$

где для периодического сигнала все a_i равны единице, тогда как для импульсного сигнала длиной N $a_i = 1, 0 \leq i < N$, и $a_i = 0$ при всех i за пределами диапа-

зона $0 \leq i < N$.

Вне зависимости от периодичности или конечности сигнала можно на прежних основаниях воспользоваться универсальным равенством для АКФ

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(\tau) &= \frac{1}{2NE_0} \int_0^T \dot{S}(t) \dot{S}^*(t-\tau) dt = \frac{1}{2NE_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_k \times \\ &\times \exp(j2\pi F_k \tau) \int_0^T \dot{S}_0(t-i\Delta) \dot{S}_0^*(t-k\Delta-\tau) \exp[j2\pi(F_i-F_k)t] dt, \end{aligned}$$

где использован тот факт, что теперь все чипы с ненулевыми амплитудами обладают одинаковыми энергиями E_0 , т. е. $\|\mathbf{a}\|^2 = N$ и $E = NE_0$.

Для ЧМ типично использование равномерного частотного алфавита, в котором $F_i \in \{0, \pm F, \pm 2F, \dots\}$, где шаг по частоте F не меньше полосы, занимаемой чипом. Таким образом, спектры двух чипов с частотами F_i и F_k , не перекрываются, а сами чипы ортогональны независимо от их временного рассогласования всякий раз, когда $F_i \neq F_k$. Учитывая это, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_k \exp(j2\pi F_i \tau) \delta(F_i - F_k) \dot{\rho}_c[\tau - (i-k)\Delta] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i-m'} \exp(j2\pi F_i \tau) \delta(F_i - F_{i-m'}) \rho_c(\tau - m'\Delta), \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $\dot{\rho}_c(\cdot)$ – как и ранее, АКФ чипа, а

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 1, & x=y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases}$$

(не путать с дельта-функцией!).

В отличие от АФМ-сигналов АКФ (1.21) в общем случае нельзя упростить до вида, подобного (1.13). Общепринятой практикой является первоочередной анализ поведения АКФ ЧМ-сигналов при задержках, кратных длительности чипа: $\tau = m\Delta$, где m – целое. Предполагая, что на длительности чипа укладывается целое число периодов l каждой из частот алфавита ($F\Delta = l$) и принимая во внимание, что $\dot{\rho}_c(0) = 1$, $\dot{\rho}_c(\tau) = 0$, $|\tau| \geq \Delta$, подстановка $\tau = m\Delta$ в (1.21) оставляет там только одно слагаемое в сумме по m' , отвечающее $m' = m$, так что

$$\dot{\rho}(m\Delta) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i-m} \delta(F_i - F_{i-m}). \quad (1.22)$$

В случае импульсного сигнала и $m \geq 0$ все слагаемые с индексами вне множества $m, m+1, \dots, N-1$, исчезают, и аperiodическая АКФ ЧМ-сигнала $\dot{\rho}(m\Delta) = \rho_a(m)$ принимает вид

$$\rho_a(m) = \frac{1}{N} \sum_{i=m}^{N-1} \delta(F_i - F_{i-m}), \quad m \geq 0, \quad \rho_a(-m) = \rho_a(m), \quad (1.23)$$

где надобности в комплексном сопряжении во втором равенстве (выражающем четность) нет в силу действительности значений $\rho_a(m)$.

Для периодического сигнала сумма в (1.22) не содержит нулевых произведений $a_i a_{i-m}$, и периодическая АКФ $\dot{\rho}(m\Delta) = \rho_p(m)$ имеет вид

$$\rho_p(m) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(F_i - F_{i-m}). \quad (1.24)$$

Суммы в (1.23), (1.24) аккумулируют число совпадений частот в ЧМ-сигнале и его копии, сдвинутой на m чипов. Поэтому для вычисления АКФ ЧМ-сигнала в точке $m\Delta$ достаточно подсчитать число пар $\{F_i, F_{i-m}\}$ с одинаковыми значениями F_i и F_{i-m} , где индекс i пробегает диапазон $\{m, m+1, \dots, N-1\}$ (аperiodическая АКФ) и $m \geq 0$ или $\{0, 1, \dots, N-1\}$ (периодическая АКФ). Понятно, что равенство (1.20), связывающее периодическую АКФ с аperiodической, остается справедливым и для ЧМ-сигналов.

Одним из широко используемых представлений ЧМ-сигнала является решетка размера $M \times N$, в которой горизонтальное и вертикальное направления закреплены соответственно за временем и частотой, причем M есть мощность частотного алфавита (т. е. число частот, используемых при манипуляции). В i -м столбце этой решетки маркируется меткой (например, точкой или затенением) единственная клетка, соответствующая частоте i -го чипа. Тогда для вычисления аperiodической АКФ при некотором m достаточно лишь просуммировать по всем строкам число пар меток, находящихся на расстоянии m , и отнормировать итог, если требуется. Если же нужна периодическая АКФ, указанные суммы находятся для значений m и $N-m$, а затем складываются.

Пример 2. На рис. 1.7 с помощью решетки представлен закон модуляции ЧМ-сигнала с параметрами $N=8, M=5$. Его ненормированная АКФ $R_a(m) = \sum_{i=m}^7 \delta(F_i - F_{i-m})$ принимает значения 8, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0

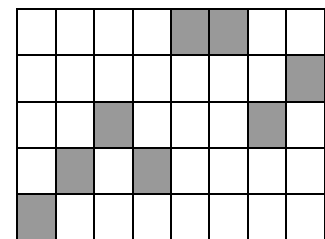


Рис. 1.7

при $m = 0, 1, \dots, 7$ соответственно, поскольку имеется единственная помеченная пара вдоль единственной линии на расстоянии 1, одна подобная пара на расстоянии 2, и т. д. Непосредственно из (1.20) могут быть найдены значения ненормированной периодической АКФ как 8, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 1.

Обобщение результатов (1.23), (1.24) на случай ВКФ не требует никаких усилий, кроме смены обозначений

$$\rho_{a,kl}(m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=m}^{N-1} \delta(F_{k,i} - F_{l,i-m}), & m \geq 0, \\ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N+m-1} \delta(F_{k,i} - F_{l,i-m}), & m < 0, \end{cases}$$

$$\rho_{p,kl}(m) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(F_{k,i} - F_{l,i-m}),$$

где $\{F_{k,i}, i = 0, 1, \dots, N-1\}$ – частотная кодовая последовательность k -го сигнала. Очевидно, вычисление ВКФ вновь сводится к подсчету числа совпадений частот в паре сигналов, сдвинутых на m чипов.

1.2.9. Аналитическое описание помех

Перейдем к описанию помех, затрудняющих работу РТС и ТКС. Классификация помех обширна и многообразна. В основе классификации лежат способ возникновения и характер помех. Отсылая читателя для более подробного знакомства к литературным источникам, отметим, что в зависимости от способа возникновения помехи делятся на естественные и искусственные, хотя последний термин вряд ли удачен. К естественным помехам относят тепловое излучение нагретых тел, хотя в ряде случаев тепловое излучение выступает как полезный сигнал (теплолокация), атмосферные помехи, связанные с электрической активностью атмосферы (грозы и пр.), искусственные помехи создаются при работе различного электрооборудования. Их источником могут быть другие РТС, работающие в том же частотном диапазоне. Это могут быть и помехи, преднамеренно создаваемые системами радиопротиводействия в ходе радиоэлектронной борьбы.

Ранее отмечалось, что помеху следует рассматривать как случайное поле, а в скалярном случае как случайный процесс $x(t)$, поэтому классификация помех тесно связана с классификацией случайных процессов (см. [15, с. 62]). Исчерпывающим описанием СП на интервале наблюдения $[0, T]$ является за-

дание совместной ПВ отсчетов $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ при любом n и любом расположении моментов $t_1, t_2, \dots, t_n$ в пределах интервала наблюдения $[0, T]$. Если считать, что помеха $x(t)$ – стационарный СП и ее спектральная плотность $S(\omega)$ тождественно равна нулю вне полосы частот $[-\Omega, \Omega]$, то, в соответствии с теоремой Котельникова, можно ограничиться отсчетами, отделенными друг от друга интервалом $\Delta t = 1/2F$, где $F = \Omega/2\pi$. Отметим, что это утверждение приблизительное, так как ограниченная во времени интервалом $[0, T]$ функция не может иметь спектр, ограниченный по частоте. Это утверждение будет тем более точным, чем больше граничная частота F , и, соответственно, меньше интервал Δt . Понятно, что для точного описания СП $x(t)$ на интервале наблюдения $[0, T]$ потребуется предельный переход в ПВ $W(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, при котором ПВ переходит в функционал плотности вероятности (ФПВ) $W[x(t)]$, показывающий, насколько одна реализация СП более или менее вероятна, чем другая.

Среди моделей СП наибольшее распространение получил нормальный, или гауссовский, процесс. Перечислим аргументы в пользу данной модели.

1. Результат прохождения СП с произвольным, но удовлетворяющим условиям центральной предельной теоремы распределением отсчетов, через линейную систему есть приближенно гауссовский СП, если ширина спектра исходного процесса много больше полосы пропускания линейной системы. Данное явление называется эффектом нормализации.

2. Для исчерпывающего описания нормального СП достаточно знать его математическое ожидание и корреляционную функцию.

3. Линейное преобразование нормального СП дает нормальный случайный процесс или нормальную СВ, если преобразование осуществляется линейным функционалом.

Напомним, как выглядит многомерное нормальное распределение $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для его записи необходимо знать вектор средних значений $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, где «т» – знак транспонирования, $a_i = M\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $M\{\cdot\}$ – символ статистического усреднения, а также корреляционную матрицу $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}$, где $K_{ij} = M\{(x_i - a_i)(x_j - a_j)\}$ – ковариация i -й и j -й СВ. Поскольку $K_{ij} = K_{ji}$, то $\mathbf{K}$ – симметрическая матрица, ее диагональные элементы $K_{ii} = M\{(x_i - a_i)^2\}$ есть дисперсии СВ $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Кроме того, матрица $\mathbf{K}$ предполагается невырожденной, т. е. ее определитель $\det \mathbf{K} = |\mathbf{K}|$ отличен от нуля. Матрица $\mathbf{K}$ имеет обратную матрицу $\mathbf{K}^{-1}$. Корреляционная матрица неотрицательно определена. Это означает, что выражение $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i) K_{ij} (x_j - a_j)$, называемое квадратичной формой, неотрицательно при любых x_i, x_j и a_i, a_j . Неотрицательно определена и матрица, обратная корреляционной, т. е. при любых x_i, x_j, a_i, a_j справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i) K_{ij}^{-1} (x_j - a_j) \geq 0.$$

Многомерное нормальное распределение после введенных обозначений примет вид

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = k \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i) K_{ij}^{-1} (x_j - a_j) \right], \quad (1.25)$$

или в векторно-матричной форме

$$W(\mathbf{x}) = k \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right],$$

где $k = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}}}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

В результате предельного перехода в показателе экспоненты выражения (1.25), записанного для моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ и описанного выше, квадратичная форма превратится в двойной интеграл

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i) K_{ij}^{-1} (x_j - a_j) \right) = \\ = \int_0^T \int_0^T (x(t_1) - a(t_1)) K^{-1}(t_1, t_2) (x(t_2) - a(t_2)) dt_1 dt_2,$$

где $\Delta t = \max_i |t_i - t_{i-1}|$. В полученном выражении $K^{-1}(t_1, t_2)$ – обратная корреляционная функция, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$\int_0^T K^{-1}(t_1, t) K(t, t_2) dt = \delta(t_1, t_2). \quad (1.26)$$

Уравнение (1.26) представляет собой результат предельного перехода в матричном тождестве $\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{E} = \sum_{l=1}^n K_{il} K_{lj}^{-1} = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

Таким образом, ФПВ нормального случайного процесса имеет вид

$$W(x(t)) = k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [x(t_1) - a(t_1)] K^{-1}(t_1, t_2) [x(t_2) - a(t_2)] dt_1 dt_2 \right\}, \quad (1.27)$$

где $a(t)$ – среднее значение процесса $x(t)$. Коэффициент $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}}}$

не зависит от реализации процесса $x(t)$, и для целей обработки наблюдаемых данных несущественен.

Рассмотрим, как выглядит ФПВ некоторых гауссовских процессов. Одной из основных моделей помехи является нормальный белый шум (НБШ), спектральная плотность которого $S(\omega) = N_0/2$ в пределах всей частотной оси, а корреляционная функция $K(t_1 - t_2) = (N_0/2)\delta(t_1 - t_2)$. Этой моделью можно пользоваться, если спектральная плотность помехи постоянна в пределах расположения основной части спектра сигнала. При этом за значение $N_0/2$ принимается значение спектральной плотности в этих пределах.

Решая уравнение (1.26) с учетом того, что $K(t_1 - t_2) = (N_0/2)\delta(t_1 - t_2)$, и принимая во внимание фильтрующее свойство δ -функции, получим:

$$K^{-1}(t_1, t_2) = (2/N_0) \delta(t_1 - t_2).$$

Подставляя найденное значение обратной корреляционной функции в (1.27) и учитывая, что среднее значение белого шума равно нулю, получим следующее выражение для ФПВ нормального белого шума:

$$W(x(t)) = k \exp \left[-(1/N_0) \int_0^T x^2(t) dt \right].$$

Полученное выражение показывает, что чем меньше энергия реализации в пределах интервала наблюдения $\int_0^T x^2(t) dt$, тем она более вероятна.

Напомним, что значение нормальной СВ с ПВ $W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$

тем более вероятно, чем оно ближе к среднему значению a .

Если к НБШ $x(t)$ добавляется сигнал $s(t)$, то для суммарного колебания $y(t) = x(t) + s(t)$ ФПВ имеет вид

$$W(y(t)) = k \exp\left\{-(1/N_0) \int_0^T [y(t) - s(t)]^2 dt\right\}.$$

При таком виде взаимодействия с сигналом НБШ обычно называют аддитивным белым гауссовским шумом и используют аббревиатуру АБГШ.

Для гауссовского процесса с корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ корреляционная матрица отсчетов имеет вид [20]

$$K = \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ r & 1 & r & \dots & r^{n-2} \\ r^2 & r & 1 & \dots & r^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где $r = e^{-\alpha\Delta t}$ – коэффициент корреляции соседних отсчетов, разделенных промежутком Δt . Определитель матрицы $\mathbf{K}$ и обратная матрица $\mathbf{K}^{-1}$ равны, соответственно, $\det \mathbf{K} = \sigma^{2n} (1-r^2)^{n-1}$:

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2 (1-r^2)} \begin{bmatrix} 1 & -r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -r & 1+r^2 & -r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r & 1+r^2 & -r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Совместную плотность вероятности отсчетов такого процесса можно представить в виде

$$W_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-r^2)}} \exp\left[-\frac{(x_{i+1} - rx_i)^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right],$$

т. е. $W_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = W(x_1) \prod_{i=1}^{n-1} W(x_{i+1}/x_i)$, где $W(x_1)$ – безусловная ПВ

первого отсчета, а $W(x_{i+1}/x_i)$ – условная ПВ (см. [9, с. 46, 47]). Такая структура $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяет марковский процесс. Приведенный результат говорит о том, что если гауссовский процесс имеет корреляционную функцию $K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, т. е. является экспоненциально коррелированным, то он одновременно является и марковским.

При иных корреляционных функциях гауссовский процесс не есть марковский.

Марковские процессы, наряду с гауссовскими, представляют собой основные математические модели помех, используемые в статистической теории РТС и ТКС. Более подробное знакомство с марковскими процессами отложим до раздела, посвященного измерению параметров сигнала. Для рассматриваемого гауссовского и одновременно с этим марковского процесса ФПВ имеет вид

$$W(x(t)) = k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha}{2\sigma^2} \left[\int_0^T x^2(t) dt + \int_0^T \left(\frac{x'(t)}{\alpha} \right)^2 dt \right] + \frac{x^2(0) + x^2(T)}{2\sigma^2} \right\} \right\}.$$

Таким образом, степень «вероятности» реализации экспоненциально коррелированного гауссовского процесса определяется энергиями реализации $x(t)$ и ее производной $x'(t)$, а также значениями, принимаемыми реализацией в начале $x(0)$ и в конце $x(T)$ промежутка $[0, T]$.

1.3. Фильтры, максимизирующие отношение сигнал/шум

При решении задач обнаружения, различения и оценивания параметров сигналов фильтры, максимизирующие отношение сигнал/шум (с/ш), играют ключевую роль, поэтому представляется целесообразным посвятить им данный подраздел.

Отношение с/ш есть один из наиболее распространенных показателей качества обработки сигнала в присутствии помех. Корректное определение понятия отношения с/ш на выходе устройства обработки возможно только для линейных систем, для которых на основе принципа суперпозиции (см. [14, с. 52]) можно раздельно рассматривать прохождение через систему (фильтр) сигнала и шума. Под отношением с/ш на выходе фильтра в момент

времени t_0 понимают отношение модуля значения выходного сигнала в момент t_0 к СКО помехи на выходе в этот же момент времени, т. е.

$$(с/ш)_{\text{ВЫХ}} = \frac{|s_{\text{ВЫХ}}(t_0)|}{\sqrt{D(x_{\text{ВЫХ}}(t_0))}}.$$

Если помеха (шум) является стационарным случайным процессом, фильтр имеет постоянные параметры и по отношению к помехе рассматривается установившийся режим (помеха действует на фильтр достаточно долго), то

$$(с/ш)_{\text{ВЫХ}} = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau \right| / \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau_1 - \tau_2) h(t_0 - \tau_1) h(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2},$$

где $s(t)$ – фильтруемый сигнал; $h(t)$ – импульсная характеристика фильтра; $K(\tau_1 - \tau_2)$ – корреляционная функция помехи.

При использовании частотного метода анализа

$$(с/ш)_{\text{ВЫХ}} = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\omega) K(j\omega) \exp(j\omega t_0) d\omega \right| / \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega},$$

где $\tilde{s}(\omega)$ – спектр сигнала; $K(j\omega)$ – коэффициент передачи фильтра; $S(\omega)$ – спектральная плотность шума. Используя неравенство Коши–Буняковского, можно показать (см. [14, с. 35–37]), что максимально достижимое отношение с/ш определяется выражением

$$\max (с/ш)_{\text{ВЫХ}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{S(\omega)} d\omega} \quad (1.28)$$

и достигается с помощью фильтра, имеющего коэффициент передачи

$$K_{\text{ОПТ}}(j\omega) = c \frac{\tilde{s}^*(\omega)}{S(\omega)} e^{-j\omega t_0}, \quad (1.29)$$

где коэффициент c , не влияющий на отношение с/ш (подумайте, почему), в дальнейшем полагается равным единице. Этот единичный коэффициент имеет размерность, обеспечивающую безразмерный характер $K(j\omega)$. (Обдумайте это замечание.)

Импульсная характеристика оптимального фильтра имеет вид

$$h_{\text{ОПТ}}(t, t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}^*(\omega)}{S(\omega)} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (1.30)$$

На основании равенства Парсеваля (1.30) можно записать как свертку преобразования Фурье функции $1/S(\omega)$, что является в соответствии с (1.26) обратной корреляционной функцией помехи $K^{-1}(\tau_1 - \tau_2)$, и сигнала $s(t_0 - t)$, т. е.

$$h_{\text{опт}}(t, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\tau - t)s(t_0 - \tau)d\tau. \quad (1.31)$$

Приведенные выражения имеют глубокий физический смысл, позволяющий лучше понять основные принципы обработки сигналов в шуме. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) оптимального фильтра в соответствии с (1.29) равна

$$|K_{\text{опт}}(j\omega)| = \frac{|\tilde{s}(\omega)|}{S(\omega)}, \quad (1.32)$$

а фазо-частотная

$$\arg K_{\text{опт}}(j\omega) = -\varphi(\omega) - \omega t_0, \quad (1.33)$$

где $|\tilde{s}(\omega)|$ – амплитудный спектр, а $\varphi(\omega)$ – фазовый спектр сигнала $s(t)$.

Как видно из (1.32), АЧХ оптимального фильтра производит весовую обработку спектра входного колебания, придавая бóльшие веса тем спектральным участкам, на которых больше отношение $\frac{|\tilde{s}(\omega)|}{S(\omega)}$, что условно можно считать отношением с/ш на частоте ω . Для того чтобы получить максимальный уровень сигнала, необходимо скомпенсировать начальные фазы спектральных компонент, т. е. ФЧХ должна быть противоположна по знаку фазовому спектру сигнала. При этом в соответствии с (1.33) фазовый спектр сигнала на выходе будет равен $\varphi(\omega) - \varphi(\omega) - \omega t_0 = -\omega t_0$, что соответствует переносу момента синфазного суммирования спектральных компонент сигнала в момент $t = t_0$. Предельно достижимое отношение $\max(\text{с/ш})$ в соответствии с (1.28) определяется интегрированием отношения энергетического спектра сигнала $|\tilde{s}(\omega)|^2$ и спектральной плотности мощности помехи $S(\omega)$ по всем частотам, на которых это отношение определено.

Сигнал на выходе оптимального фильтра равен

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{S(\omega)} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (1.34)$$

Поскольку преобразование Фурье энергетического спектра сигнала $|\tilde{s}(\omega)|^2$ есть его автокорреляционная функция, то сигнал на выходе – свертка обратной корреляционной функции помехи

$$K^{-1}(\tau) = F[1/S(\omega)],$$

где F – оператор Фурье, и автокорреляционной функции сигнала

$$K_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega,$$

смещенной на время t_0 .

Поскольку спектральная плотность помехи на выходе оптимального фильтра равна

$$s_{\text{вых}}(\omega) = S(\omega) |K_{\text{опт}}(j\omega)|^2 = S(\omega) \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{S^2(\omega)} = \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{S(\omega)},$$

то корреляционная функция помехи на выходе

$$K_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{s}(\omega)|^2}{S(\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Если помехой служит белый шум со спектральной плотностью $S(\omega) = \frac{N_0}{2}$ и корреляционной функцией $K(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$, то формула (1.28) принимает вид

$$\max(\text{с/ш})_{\text{вых}} = q = \sqrt{\frac{2}{N_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \quad (1.35)$$

так как $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega = E$.

Коэффициент передачи оптимального фильтра для помехи в виде белого шума, называемого согласованным фильтром (СФ), с учетом замечания о постоянном множителе равен

$$K_{\text{СФ}}(j\omega) = \tilde{s}^*(\omega) e^{-j\omega t_0},$$

а его импульсная характеристика

$$h_{\text{СФ}}(t, t_0) = s(t_0 - t).$$

АЧХ согласованного фильтра совпадает с амплитудным спектром сигнала, т. е.

$$|K_{\text{СФ}}(j\omega)| = |\tilde{s}(\omega)|, \quad (1.36)$$

а ФЧХ по-прежнему определяется выражением (1.33).

Сигнал на выходе согласованного фильтра в соответствии с (1.34)

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = K_s(t - t_0),$$

т. е. представляет собой АКФ сигнала, смещенную на время t_0 .

С учетом (1.36) спектральная плотность помехи на выходе согласованного фильтра равна

$$S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \frac{N_0}{2} |K_{\text{СФ}}(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |\tilde{s}(\omega)|^2$$

Дисперсия помехи на выходе

$$D\{x_{\text{ВЫХ}}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВЫХ}}(\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0 E}{2}, \quad (1.37)$$

а корреляционная функция

$$K_{\text{ВЫХ}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВЫХ}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} K_s(\tau),$$

т. е. по форме совпадает с автокорреляционной функцией сигнала. Ее значение при $\tau = 0$ дает дисперсию помехи на выходе СФ

$$K_{\text{ВЫХ}}(0) = \frac{N_0}{2} K_s(0) = D\{x_{\text{ВЫХ}}\}.$$

Поскольку $K_s(0) = E$, то $K_{\text{ВЫХ}}(0) = D\{x_{\text{ВЫХ}}\} = \frac{N_0 E}{2}$, что, естественно, совпадает с (1.37).

Максимальное значение сигнала, достигаемое в момент $t = t_0$, равно

$$K_s(0) = E, \text{ и отношение с/ш на выходе СФ будет равно } \frac{E}{\sqrt{N_0 E/2}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \text{ что}$$

совпадает с (1.35).

Совпадение форм корреляционной функции помехи на выходе СФ и автокорреляционной функции сигнала говорит о том, что помеха на выходе СФ становится «похожей» на сигнал $s(t)$ с точки зрения скорости изменения. Этот факт иллюстрирует рис. 1.8, где в части *а* приведена сумма прямоугольного видеоимпульса и белого шума $y(t)$, условно изображенного в виде быстро меняющегося случайного процесса, а части *б* – реализация процесса на выходе согласованного фильтра.

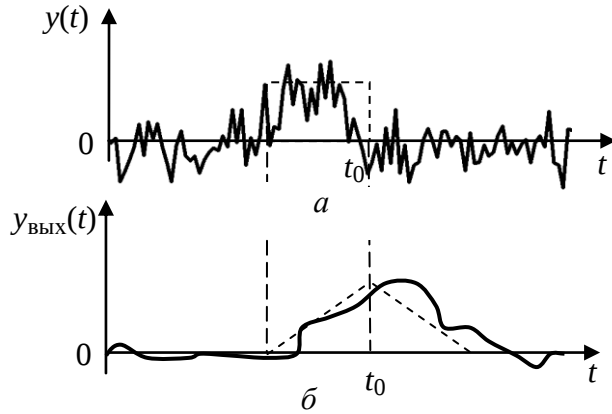


Рис. 1.8

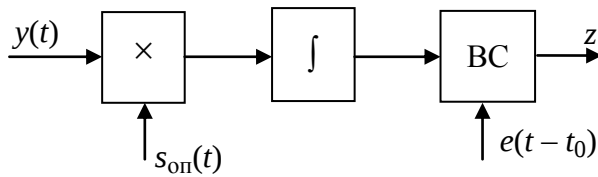


Рис. 1.9

Сравним фильтр, максимизирующий отношение с/ш, с коррелятором, вычисляющим величину

$$z = \int_{-\infty}^{t_0} y(t)s_{\text{оп}}(t)dt, \quad (1.38)$$

структурная схема которого показана на рис. 1.9.

В выражении (1.38) и на рис. 1.9 $y(t) = x(t) + s(t)$, $x(t)$ – помеха, $s(t)$ – полезный сигнал; $s_{\text{оп}}(t)$ – опорное колебание, являющееся детерминированной функцией времени. Момент времени t_0 совпадает с моментом взятия отсчета на выходе согласованного фильтра с помощью селектирующей функции $e(t - t_0)$.

Поскольку коррелятор – это линейная система с переменными параметрами, можно отдельно рассматривать прохождение через него сигнала $s(t)$ и помехи $x(t)$. Под отношением с/ш на выходе коррелятора будем понимать отношение результата преобразования сигнала

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s(t)s_{\text{оп}}(t)dt$$

и СКО случайной величины, вызванной действием помехи $x(t)$

$$\sigma_{\text{вых}}(t_0) = \left[\int_{-\infty}^{t_0} \int_{-\infty}^{t_0} K(t_1, t_2)s_{\text{оп}}(t_1)s_{\text{оп}}(t_2)dt_1 dt_2 \right]^{1/2}. \quad (1.39)$$

Максимизируя отношение $\frac{s_{\text{вых}}(t)}{\sigma_{\text{вых}}(t_0)}$ за счет выбора $s_{\text{оп}}(t)$, получим выражение для оптимального опорного сигнала $s_{\text{опт}}(t) = h_{\text{опт}}(t_0 - t)$, где $h_{\text{опт}}(t, t_0)$ определяется выражением (1.31).

Для случая белого шума

$$K(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2}\delta(t_1 - t_2), \quad h_{\text{опт}}(t, t_0) = s(t_0 - t),$$

а $s_{\text{опт}}(t) = s(t)$, $s_{\text{вых}}(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s^2(t)dt = E$, если момент времени t_0 соответствует окончанию сигнала, $\sigma_{\text{вых}}(t_0) = \sqrt{N_0 E/2}$ и для отношения с/ш получим величину $\sqrt{2E/N_0}$, совпадающую с отношением с/ш на выходе СФ.

Хотя СФ инвариантен к временному положению сигнала, для реализации его возможностей надо знать момент времени, в который достигается максимальное отношение с/ш на выходе, т. е. знать временное положение сигнала. Аналогичную информацию надо иметь для реализации возможностей коррелятора. Поэтому с точки зрения обработки сигнала СФ и коррелятор равноценны, и решение в пользу той или иной структуры следует принимать, исходя из возможностей технической реализации.

Если опорное напряжение коррелятора отличается от оптимального, то возникают потери. Например, для белого шума $s_{\text{вых}}(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s(t)s_{\text{оп}}(t)dt = \rho(t_0) \times$

$$\times \sqrt{E E_{\text{оп}}(t_0)}, \quad \sigma_{\text{вых}}(t_0) = \left(\frac{N_0 E_{\text{оп}}(t_0)}{2} \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad (\text{с/ш})_{\text{вых}} = \rho(t_0) \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \quad \text{где } \rho(t_0) -$$

коэффициент корреляции сигнала $s(t)$ и опорного колебания, определенного на интервале $(-\infty, t_0]$, $E_{\text{оп}}(t_0)$ – соответствующая энергия.

Меняя момент времени t_0 , можно максимизировать величину $\rho(t_0)$ и отношение $(\text{с/ш})_{\text{вых}}$, при этом $\rho(t_{\text{опт}}) < 1$. Единичного значения коэффициент корреляции достигает при $s_{\text{опт}}(t) = s(t)$. На рис. 1.10 приведены временные диаграммы, иллюстрирующие работу коррелятора для случая прямоугольного видеоимпульса и белого шума: часть *а* соответствует входу коррелятора, *б* – опорному колебанию, *в* – выходу перемножителя, а *г* – выходу интегратора.

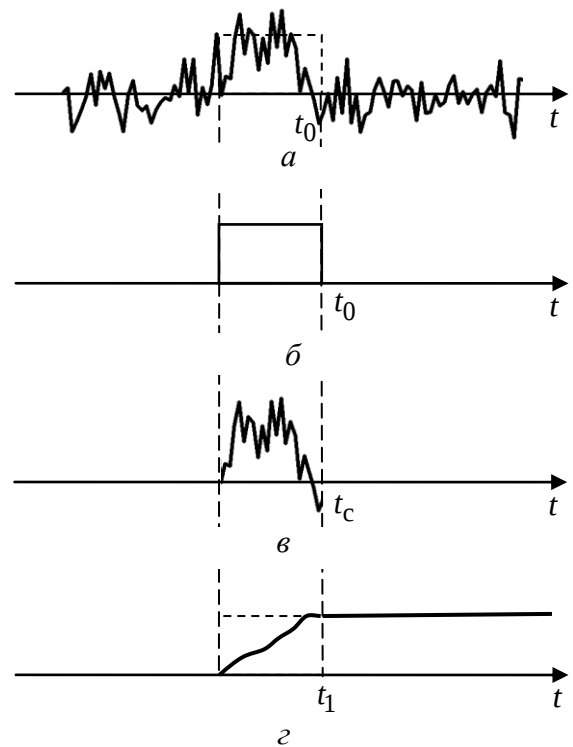


Рис. 1.10

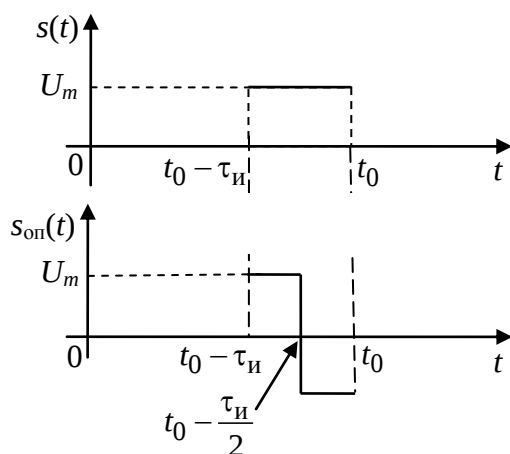


Рис. 1.11

Рис. 1.11 иллюстрирует случай отклонения опорного колебания от оптимального. Опорное колебание ортогонально сигналу. Для момента времени t_0 отношение $(с/ш)_{\text{вых}}$ будет равно нулю (убедитесь в этом). Для его максимизации момент взятия отсчета надо переместить в точку $t = t_0 - \tau_{и}/2$. При этом $\max_{t_0}(с/ш)$

будет равно $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$, где $E = U_m^2 \tau_{и}$.

Рассмотрим случай, когда мешающее воздействие представляет собой сумму белого шума и дополнительной помехи. Данный тип помех наиболее характерен для ситуаций, когда некоторая соседствующая система или системы не имеют враждебных намерений по отношению к рассматриваемой и создают помехи только как результат штатного функционирования. На рис. 1.12 представлены амплитудный спектр $|\tilde{s}(f)|$ полезного сигнала и спектральная плотность мощности помехи $\tilde{J}(f)$, аппроксимированные прямоугольниками, на фоне равномерной спектральной плотности мощности $N_0/2$ АБГШ. Назовем помеху узкополосной только по той причине, что занимаемая ею полоса W_j уже полосы W , занимаемой сигналом, и имеются области, где спектр сигнала не подвержен искажению помехой.

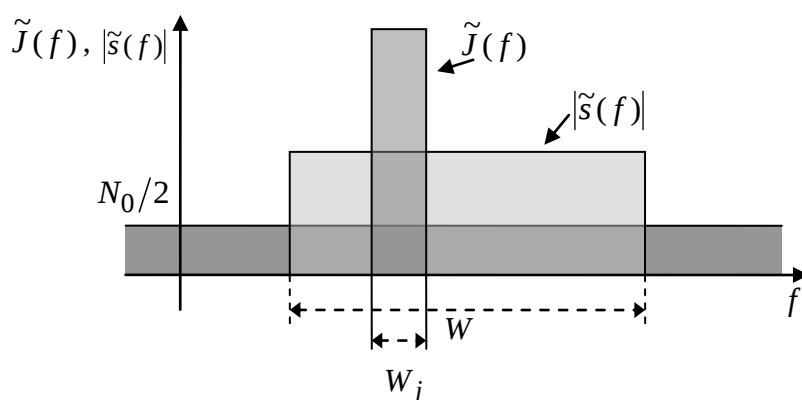


Рис. 1.12

Предположим вначале, что рассматриваемая система не предпринимает никаких специальных мер для противодействия помехе за исключением, возможно, выбора подходящего сигнала. Подобного рода сценарий означает,

что при проектировании возможность присутствия помехи принята в расчет на этапе выбора сигнала, однако система не адаптивная, и не подстраивает каждый раз закон модуляции сигнала и алгоритмы обработки под текущую помеховую обстановку. Другими словами, приемник системы всегда использует только СФ, невзирая на наличие или отсутствие помехи на входе.

При отыскании отношения q_I^2 мощностей сигнала и результирующего мешающего воздействия (сигнал/(шум + помеха)) на выходе СФ отметим, что для прямоугольного спектра сигнала ($|\tilde{s}(f)|$ равен константе $\tilde{s}$ в пределах полосы сигнала W и нулю вне ее) амплитудная передаточная функция СФ также равномерна в полосе сигнала W и равна нулю вне ее. Примем без потери общности ее ненулевое значение равным единице. При этом помеха, трактуемая как случайный процесс, проходит на выход фильтра без изменения мощности J , тогда как мощность шума на выходе фильтра составит N_0W . С другой стороны, фильтр, согласованный с сигналом, когерентно суммирует все его гармоники, максимизируя выходную амплитуду до

$s_{\text{вых. max}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(f)| df = 2W\tilde{s}$, где учтена равномерность спектра в полосе сигнала W , а удвоение обусловлено вкладом «отрицательных» частот.

$$q_I^2 = \frac{s_{\text{вых. max}}^2}{J + N_0W} = \frac{4W^2\tilde{s}^2}{J + N_0W} = \frac{2E}{N_0 + J/W}. \quad (1.40)$$

Из последнего равенства можно видеть, что, независимо от конкретной полосы помехи W_j , отношение сигнал/(шум + помеха) на выходе согласованного фильтра ведет себя, как если бы мощность помехи была равномерно распределена в полосе W сигнала (не помехи!), добавляя к естественному шуму дополнительный «аддитивный белый гауссовский шум» (АБГШ) со спектральной плотностью J/W .

Рассмотрим теперь иной сценарий, в котором система способна адаптировать приемник к текущей помеховой обстановке. Оптимальной процедурой обработки при этом следовало бы считать фильтрацию, согласованную с полным мешающим воздействием, включающим узкополосную помеху. С точки зрения физики очевидно, что при помехе, многократно превышающей естественный АБГШ, подобная обработка эквивалентна простой режекции частотного интервала, в котором сосредоточена помеха. На рис. 1.13 показан спектр на выходе режекторного фильтра: помеха полностью устраняется, од-

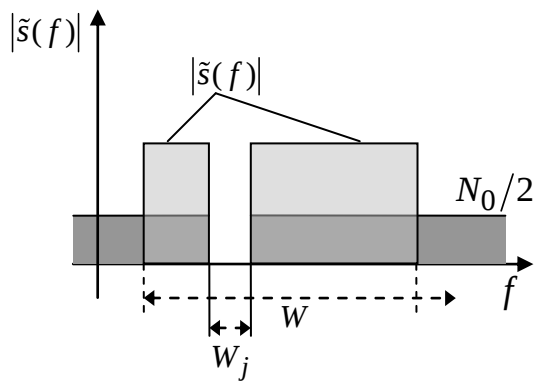


Рис. 1.13

нако вырезаются и гармоники сигнала в пределах полосы помехи вместе с шумовыми компонентами. Подобный спектральный рисунок может трактоваться, как если бы исходный сигнал занимал лишь часть полосы W , свободную от помех, и имел энергию $E(1 - W_j/W)$. Тогда согласованный фильтр, очищая этот «остаточный» сигнал от АБГШ, обеспе-

чивал бы выходное отношение мощностей сигнала и шума (индекс « J » отвечает помехе)

$$q_J^2 = \frac{2E(1 - W_j/W)}{N_0} = q^2(1 - W_j/W), \quad (1.41)$$

где $q^2 = 2E/N_0$ – «истинное» отношение мощностей сигнала и шума на выходе согласованного фильтра в отсутствие помехи.

Глядя на соотношения (1.40), (1.41), можно видеть, что оба они явным образом свидетельствуют о выгодах сигналов с широким спектром с точки зрения иммунитета к узкополосным помехам: чем шире полоса сигнала W в сравнении с полосой помехи W_j , тем меньше дополнительная «шумовая» спектральная плотность в первом случае и энергетические потери – во втором (при постоянстве мощности помехи J), а следовательно, больше q_I^2 и q_J^2 . Однако если пиковая мощность сигнала P ограничена и не может быть увеличена, то расширение полосы сигнала не реализуется тривиальным укорочением сигнала, поскольку в этом случае энергия сигнала, а с ней и отношение сигнал/(шум + помеха) упадут. Итогом является следующий вывод: достижение высокой помехоустойчивости к узкополосной помехе без обращения к «грубой силе» (увеличению энергии и пиковой мощности) возможно только при расширении спектра сигнала независимо от его длительности, т. е. использовании широкополосной технологии (сложных сигналов).

Заградительная помеха. Во многих военных сценариях или приложениях, характерных для спецслужб, встречается ситуация, когда помеха создается преднамеренно как средство радиоэлектронного противодействия. В подобных случаях для постановщика естественна стратегия, предполагающая наличие у подавляемой системы достаточного «интеллекта», чтобы зарегистри-

стрировать присутствие помехи и должным образом на него отреагировать. В частности, если помеха узкополосна, система может прибегнуть к режекторной фильтрации или даже изменить сигнал переносом его спектра в зону, свободную от помехи. Для устранения подобного шанса применяют так называемую заградительную шумовую помеху, спектр мощности которой покрывает спектр сигнала без пропусков (рис. 1.14). Ясно, что заградительная помеха воздействует на сигнал как дополнительный АБГШ со спектральной плотностью мощности, равной $N_J = J/W$. Поэтому отношение сигнал/(шум + помеха) по мощности после согласованного фильтра полезной системы

$$q_J^2 = \frac{2E}{N_0 + N_J} = \frac{2E}{N_0 + J/W},$$

что совпадает с (1.40). В этом случае, однако, для нанесения большего вреда постановщик постарается обеспечить значительное превышение спектром помехи спектра естественного шума, т. е. $J/W \gg N_0$, откуда следует, что

$$q_J^2 \approx \frac{2EW}{J} = \frac{2P(WT)}{J} = \frac{2PB}{J}. \quad (1.42)$$

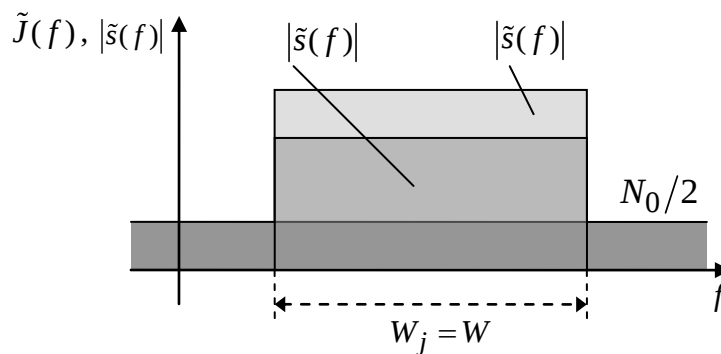


Рис. 1.14

Снова можно констатировать, что при лимите пиковой мощности полезного сигнала и мощностного ресурса постановщика помех единственным способом повышения иммунитета системы к заградительной помехе служит привлечение сигналов с большим значением частотно-временного произведения $B = WT$ (базы сигнала), т. е. широкополосных сигналов.

Формула (1.42) объясняет другое популярное название частотно-временного произведения WT . Видно, что отношение мощностей сигнала и шума с равномерным спектром в полосе сигнала увеличивается согласованным фильтром в $2WT$ раз по сравнению со входным значением P/J . Таким образом, можно назвать WT выигрышем от обработки.

Как визуализация вышеприведенного обсуждения поучительны осциллограммы, смоделированные в среде MatLab. Рис. 1.15 иллюстрирует согласованную фильтрацию простого сигнала с прямоугольной огибающей (колонка *а*) и широкополосного сигнала (ЛЧМ, $WT \approx 50$) (колонка *б*) одинаковой длительности и энергии. Одна и та же помеха в виде немодулированной гармоники добавляется к обоим сигналам (второй ряд по горизонтали). В то время как простой сигнал полностью замаскирован помехой и незаметен на выходе согласованного фильтра (третий ряд), широкополосный сигнал, сжатый фильтром, наблюдается весьма отчетливо.

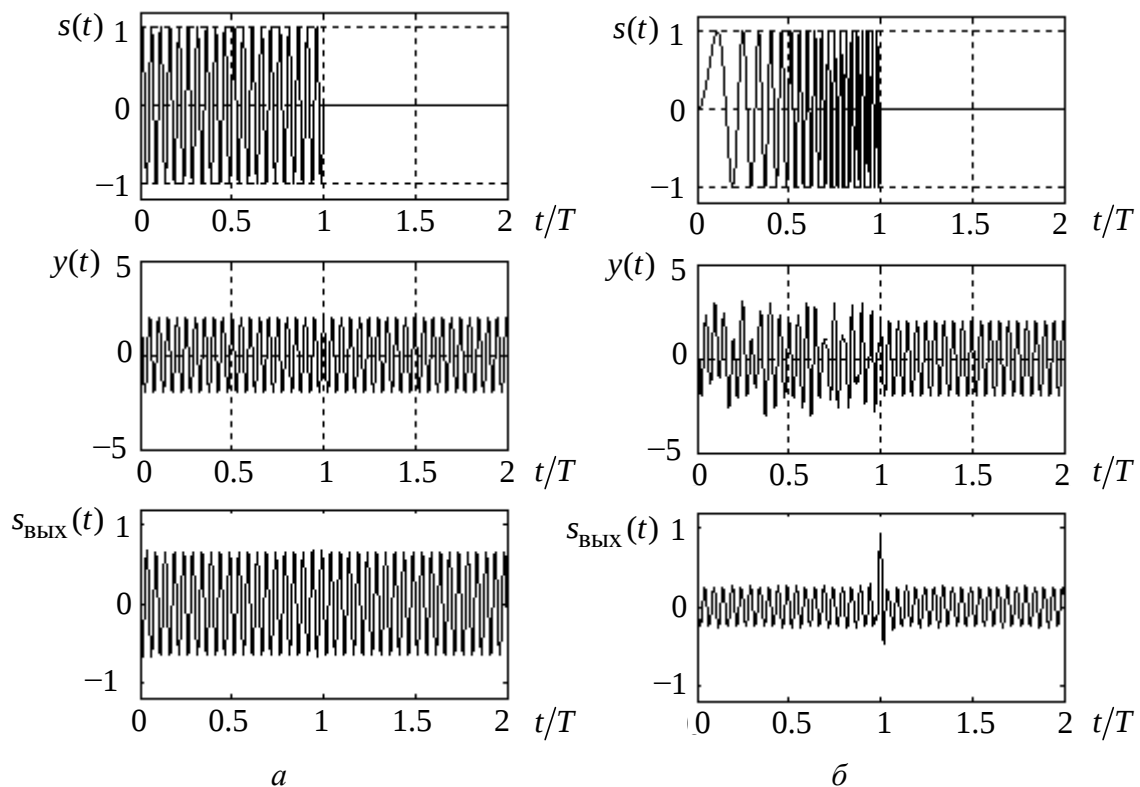


Рис. 1.15

На рис. 1.16, где колонки соответствуют прежним сигналам, верхний ряд показывает их спектры. Осциллограммы второго ряда демонстрируют спектры мощности двух случайных реализаций различных заградительных помех с одинаковой средней мощностью в пределах полосы сигнала. Вследствие этого средний уровень спектра помехи в колонке *б* примерно в 50 раз ниже уровня в колонке *а*. Третий ряд показывает реализации наблюдаемого колебания, причем интенсивность помехи примерно одинакова для обоих сигналов, полностью замаскированных помехой. Нижние осциллограммы, воспроизводящие отклики согласованных фильтров, вновь убедительно подтверждают превосходство широкополосного сигнала в противодействии заградительной помехе.

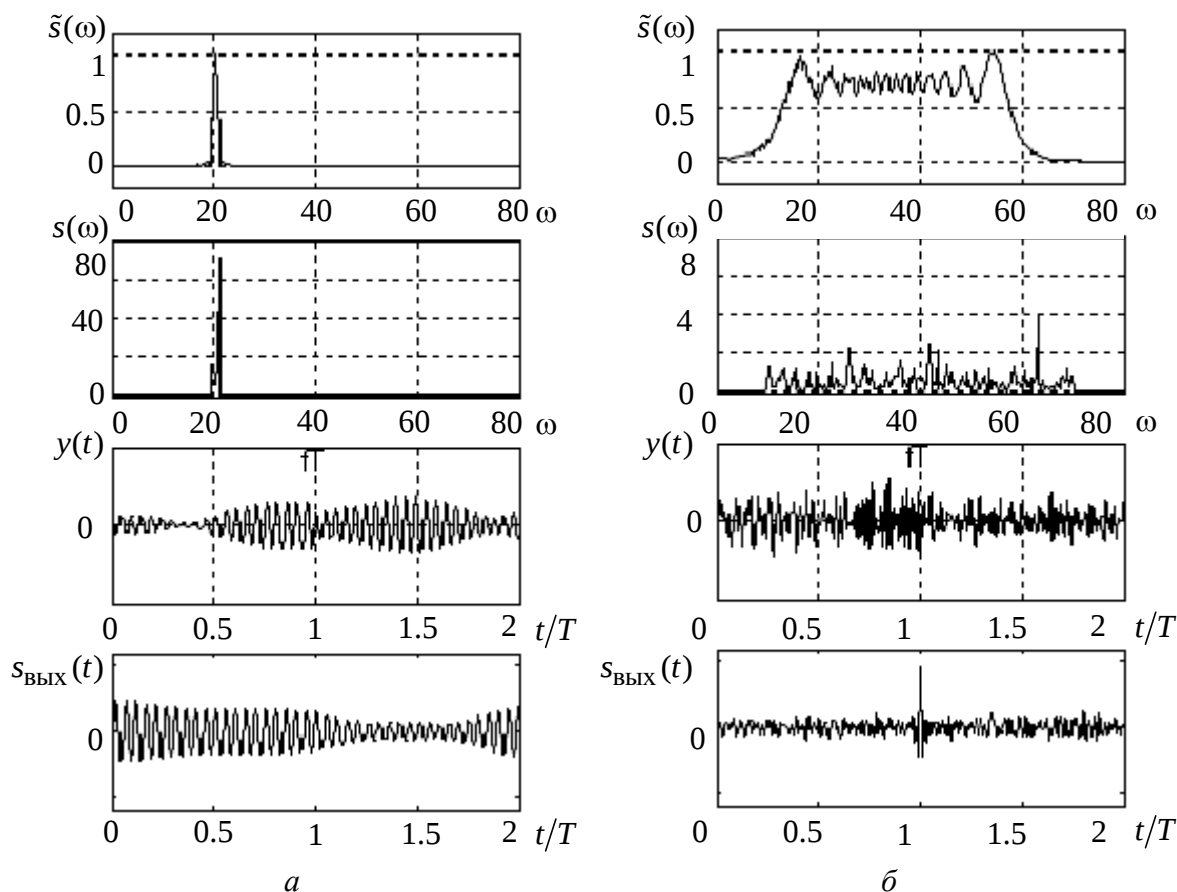


Рис. 1.16

Завершая рассуждения, еще раз отметим, что анализ ни в коей мере не претендовал на освещение вопроса о том, какого рода помехи наиболее опасны в конкретных ситуациях и что должна предпринимать система для оптимизации характеристик в более сложных условиях, чем оговоренные.

Идея сводилась лишь к простейшей демонстрации потенциала технологии распределенного спектра в борьбе с помехами. Заинтересованный читатель может обратиться к многочисленным более детализированным публикациям и убедиться, что какими бы сложными ни были исследуемые системы и стратегии, основная тенденция останется прежней: философия расширенного спектра способствует повышению иммунитета к воздействию помех.

1.4. Контрольные вопросы, примеры и задачи

Освоение материала данного пособия немыслимо без знания основ спектрального анализа и теории вероятностей. Приводимые далее вопросы, примеры и задачи позволяют проверить знания этих основ. Для справки рекомендуем пользоваться учебными пособиями [14]–[18], а также учебником [23].

1.4.1. Контрольные вопросы

Спектральный анализ

1. Как связаны между собой сигнал $s(t)$ и его Фурье-спектр $\tilde{s}(\omega)$? Каким требованиям должен удовлетворять сигнал?
2. Сигнал $s(t)$ имеет спектр $\tilde{s}(\omega)$. Каков спектр у сигнала $s(t \pm \tau)$?
3. Какие сигналы называются видеосигналами $s_B(t)$, а какие – радиосигналами $s_P(t)$?
4. Видеосигнал $s_B(t)$ имеет спектр $\tilde{s}_B(\omega)$. Какой сигнал соответствует спектру $\frac{1}{2}[\tilde{s}_B(\omega - \omega_0) + \tilde{s}_B(\omega + \omega_0)]$?
5. Какой спектр имеет сигнал $s_B(t) \cos \omega_0 t$?
6. Какой спектр имеет сигнал $s(at)$, где a – вещественное число?
7. Запишите обобщенное равенство Парсеваля и покажите, как с его помощью определить энергию сигнала E , зная его временное описание $s(t)$ или его спектр $\tilde{s}(\omega)$.
8. Запишите выражение для автокорреляционной функции сигнала $s(t)$ для взаимной корреляционной функции сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Как будут выглядеть выражения для коэффициентов корреляции? Как связаны эти характеристики со спектрами сигналов $s(t)$, $s_1(t)$ и $s_2(t)$?
9. Какой спектр имеет сигнал $s(t) = s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$, где $\otimes$ – знак свертки?
10. Какому сигналу соответствует спектр $\tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_1(\gamma) \tilde{s}_2(\omega - \gamma) d\gamma$?
11. Запишите выражение для спектра сигнала $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k s_0(t - kT)$.
12. Какие числовые характеристики сигнала и его спектра вам известны? Как с их помощью определяются понятия «узкополосный сигнал», «сложный сигнал»?
13. Дайте определение аналитического сигнала, комплексной огибающей. Как их спектры связаны со спектром исходного сигнала?

14. Как определяется функция неопределенности (ФН) сигнала $s(t, \lambda)$ по параметру λ ? Как записывается ФН стационарного типа?
15. Запишите выражение для частотно-временной ФН.
16. Чем являются сечения частотно-временной ФН плоскостями $F = 0$ и $\tau = 0$?

Случайные события, случайные величины и случайные процессы

17. Дайте определения случайного события (СС), вероятностного пространства.
18. Что такое совместные и несовместные, достоверные и невозможные события?
19. Как определяется зависимость и независимость СС?
20. Какие события называются объединением (суммой) и пересечением (произведением) СС? Как определяется их вероятность?
21. Что такое полная группа СС? Какими свойствами она обладает?
22. Приведите формулу полной вероятности и объясните ее смысл.
23. Как формулируется теорема гипотез (формула Байеса)?
24. Как определяется схема последовательных независимых испытаний?
25. Что такое случайная величина? Какие случайные величины называются дискретными, а какие – непрерывными?
26. Что такое функция распределения СВ? Какие свойства функции распределения вам известны?
27. Что такое плотность вероятности СВ? Как связаны между собой функция распределения и плотность вероятности случайной величины? Какие свойства плотности вероятности вам известны?
28. Какой вид имеют в общем случае ПВ и ФР непрерывной случайной величины?
29. Какой вид имеют в общем случае ПВ и ФР дискретной случайной величины?
30. Какой вид имеют в общем случае ПВ и ФР случайной величины смешанного типа (дискретно-непрерывной)?
31. Что такое характеристическая функция СВ? Как она связана с плотностью вероятности?
32. Перечислите основные свойства характеристической функции.
33. Как определяются начальные моменты распределения дискретных и непрерывных СВ?

34. Какие начальные моменты чаще всего используются на практике? Что они характеризуют?

35. Как определяются центральные моменты распределения дискретных и непрерывных СВ?

36. Какие центральные моменты чаще всего используются на практике? Что они характеризуют?

37. Что такое коэффициент асимметрии? Что он показывает?

38. Что такое коэффициент эксцесса? Что он показывает?

39. Каковы размерности плотности вероятности, функции распределения, математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения, k -го начального момента распределения, k -го центрального момента распределения случайной величины?

40. Доказать, что первый центральный момент распределения случайной величины всегда равен нулю.

41. Доказать утверждение $M_2 = m_2 - m_1^2$.

42. Доказать утверждение $M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$.

43. К случайной величине добавили детерминированную константу a . Как изменились плотность вероятности; функция распределения; характеристическая функция; среднее; дисперсия; среднеквадратичное отклонение?

44. Случайную величину умножили на детерминированную константу a . Как изменились плотность вероятности; функция распределения; характеристическая функция; среднее; дисперсия; среднеквадратичное отклонение?

45. Как, зная ФР, определить вероятность попадания СВ в промежуток $[a, b)$? Как это сделать, если известна ПВ случайной величины?

46. Что такое p -квантиль? Что такое медиана?

47. Что называется модой распределения случайной величины? Какие распределения называются унимодальными, какие – полимодальными? Приведите примеры.

48. Как определить плотность вероятности случайной величины Y , связанной со случайной величиной X соотношением $Y = f(X)$, если плотность вероятности величины X известна и существует обратная функция $X = \varphi(Y)$? Как выглядит результат, если обратная функция многозначна, например $Y = X^2$?

49. Как определяется совместная функция распределения совокупности случайных величин? Какие ее свойства вам известны?

50. Как определяется совместная плотность вероятности совокупности случайных величин? Какие ее свойства вам известны?
51. Как определяется ХФ совокупности случайных величин?
52. В чем состоит условие согласованности высших и низших ФР и ПВ?
53. Что такое условная ПВ для совокупности СВ X и Y ?
54. В каком случае СВ независимы? Как записываются совместные ФР и ПВ для совокупности независимых СВ? Как записываются ХФ для совокупности двух независимых СВ?
55. Чему равно математическое ожидание суммы СВ?
56. Чему равно математическое ожидание произведения независимых СВ?
57. Чему равно математическое ожидание линейной комбинации СВ?
58. Как определяются дисперсии суммы и разности двух некоррелированных СВ?
59. Как определяются дисперсии суммы и разности двух зависимых СВ?
60. Чему равна дисперсия линейной комбинации попарно независимых СВ?
61. Как определяются смешанные центральные моменты распределения для совокупности дискретных и непрерывных СВ?
62. Что такое ковариация случайных величин X и Y ? Что она показывает?
63. Что такое коэффициент корреляции? Какие значения он может принимать? Что означает $r = -1; 0; 1$?
64. Докажите, что независимые СВ некоррелированы.
65. Всегда ли некоррелированные случайные величины независимы?
66. Как в общем случае решается задача отыскания ПВ совокупности функционально преобразованных СВ?
67. Дайте определения случайной функции, случайного процесса.
68. По каким признакам осуществляется классификация СП?
69. Что является полным статистическим описанием СП?
70. Запишите выражения для математического ожидания $m_1(t)$ и корреляционной функции $K_\xi(t_1, t_2)$ СП.
71. Как определяется взаимная корреляционная функция СП $\xi(t)$ и $\eta(t)$?
72. Дайте определения СП с независимыми отсчетами, СП с независимыми приращениями, марковского СП.
73. Дайте определение СП, стационарного в широком и узком смыслах.
74. Как определяется операция усреднения по времени для стационарного случайного процесса?

75. Запишите корреляционную функцию стационарного СП на основе усреднения по времени.
76. Дайте определение эргодического СП.
77. Что называется квазидетерминированным СП? Приведите примеры.
78. Как связаны между собой корреляционная функция и спектральная плотность стационарного СП?
79. Перечислите свойства корреляционной функции и спектральной плотности стационарного СП.
80. Перечислите числовые характеристики корреляционной функции и спектральной плотности.
81. Сформулируйте соотношение неопределенности для стационарного СП.
82. Какой процесс называют белым шумом, финитным белым шумом? Какой вид имеют $K(\tau)$ и $S(\omega)$ для названных процессов?
83. Приведите графики (качественно) $K(\tau)$ и $S(\omega)$ для СП с гауссовским (колокольным) энергетическим спектром.
84. Дайте определение узкополосного процесса.
85. Какой вид в общем случае имеет КФ узкополосного СП?
86. Дайте определение комплексного СП.
87. При каких условиях КФ узкополосного СП имеет вид $K(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$, где σ^2 – дисперсия случайного процесса; $\rho(\tau)$ – огибающая коэффициента корреляции; f_0 – центральная частота спектральной плотности случайного процесса?
88. Какой вид имеет $K(\tau)$ стационарного СП с дискретным энергетическим спектром?
89. Чему равна корреляционная функция линейной комбинации независимых центрированных случайных процессов?
90. Чему равна спектральная плотность суммы независимых центрированных стационарных случайных процессов?
91. Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости СП.
92. Чему равно математическое ожидание производной СП?
93. Чему равна корреляционная функция производной случайного процесса? Какой вид она имеет для стационарного случайного процесса?
94. Какой вид имеют взаимная корреляционная функция и взаимный энергетический спектр процесса и его производной?

95. Как связаны между собой корреляционная функция стационарного СП и его производной? Какова связь между энергетическими спектрами СП $x(t)$ и $x'(t)$?

96. Дайте определение нормального СП.

97. Дайте определение винеровского процесса.

98. Дайте определение узкополосного нормального СП.

99. Как определяется комплексная огибающая СП? Какие свойства имеет огибающая (комплексная огибающая) СП?

100. Запишите квадратурное представление узкополосного СП.

101. Какие статистические характеристики имеют квадратурные составляющие $a(t)$ и $b(t)$ для узкополосного нормального СП?

102. В чем состоит методика определения совместных ПВ огибающей и фазы для отсчетов, разделенных промежутком τ ?

103. Как выглядит функционал плотности вероятности (ФПВ) нормального СП? Какой вид имеет ФПВ суммы нормального СП и сигнала $s(t)$? Каким будет результат для нормального белого шума со спектральной плотностью $N_0/2$?

Оптимальная линейная фильтрация

104. Какой коэффициент передачи имеет линейный фильтр, обеспечивающий в момент времени t_0 максимум отношения сигнал/шум на выходе для сигнала $s(t)$, наблюдаемого на фоне стационарной помехи со спектральной плотностью $S(\omega)$? Какая у него импульсная характеристика? Какой вид принимают $K(j\omega)$ и $h(t)$, если помехой служит белый шум со спектральной плотностью $N_0/2$?

105. Чему равно максимально достижимое $(с/ш)_{\text{вых}}$ для окрашенного и для белого шумов?

106. Какую форму имеет полезный сигнал на выходе согласованного фильтра?

107. Какую корреляционную функцию имеет помеха на выходе согласованного фильтра?

108. Как реализовать максимально достижимое отношение сигнал/шум с помощью коррелятора?

109. Что произойдет, если опорный сигнал в корреляторе будет отличаться от оптимального? Как оптимизировать эту ситуацию?

1.4.2. Примеры

1. Найти спектр, корреляционную функцию и числовые характеристики сигнала и спектра для сигналов

$$s_B(t) = \begin{cases} U_m, & t \in [0, \tau_{\text{и}}], \\ 0, & t \notin [0, \tau_{\text{и}}], \end{cases} \quad s_p(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_0 t, & t \in [0, \tau_{\text{и}}], \\ 0, & t \notin [0, \tau_{\text{и}}], \end{cases} \quad \omega_0 \tau_{\text{и}} \gg 1.$$

Решение. Спектр сигнала $s_B(t)$ равен

$$\tilde{s}_B(\omega) = \int_0^{\tau_{\text{и}}} U_m e^{-j\omega t} dt = U_m \frac{1 - e^{-j\omega \tau_{\text{и}}}}{j\omega}.$$

Его можно представить в виде

$$\tilde{s}_B(\omega) = \frac{2U_m}{\omega} e^{-j\omega \tau_{\text{и}}/2} \frac{e^{j\omega \tau_{\text{и}}/2} - e^{-j\omega \tau_{\text{и}}/2}}{2j} = U_m \tau_{\text{и}} \frac{\sin(\omega \tau_{\text{и}}/2)}{\omega \tau_{\text{и}}/2} e^{-j\omega \tau_{\text{и}}/2},$$

где $U_m \tau_{\text{и}} \frac{\sin(\omega \tau_{\text{и}}/2)}{\omega \tau_{\text{и}}/2}$ – спектр исходного сигнала, расположенного симметрично относительно начала координат. Экспоненциальный множитель $e^{-j\omega \tau_{\text{и}}/2}$ отражает смещение этого сигнала на величину $t_3 = \tau_{\text{и}}/2$.

Спектр сигнала $s_p(t)$ с использованием формулы Эйлера определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{s}_p(\omega) &= \int_0^{\tau_{\text{и}}} U_m \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m}{2} \left[\int_0^{\tau_{\text{и}}} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_0^{\tau_{\text{и}}} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right] = \\ &= \frac{U_m}{2} \left[\frac{1 - e^{-j(\omega - \omega_0)\tau_{\text{и}}}}{j(\omega - \omega_0)} + \frac{1 - e^{-j(\omega + \omega_0)\tau_{\text{и}}}}{j(\omega + \omega_0)} \right] = \frac{1}{2} [\tilde{s}_B(\omega - \omega_0) + \tilde{s}_B(\omega + \omega_0)], \end{aligned}$$

что соответствует связи между спектрами сигналов $s_B(t)$ и $s_p(t) = s_B(t) \cos \omega_0 t$.

Корреляционная функция сигнала $s_B(t)$ имеет вид

$$K_B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_B(t) s_B(t - \tau) dt = \begin{cases} U_m^2 \tau_{\text{и}} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_{\text{и}}} \right), & |\tau| \leq \tau_{\text{и}}, \\ 0, & |\tau| > \tau_{\text{и}}, \end{cases}$$

а для сигнала $s_p(t)$ с учетом условия $\omega_0 \tau_{\text{и}} \gg 1$

$$K_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_p(t) s_p(t - \tau) dt \cong \begin{cases} \frac{U_m^2 \tau_{\text{и}}}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_{\text{и}}} \right) \cos \omega_0 \tau, & |\tau| \leq \tau_{\text{и}}, \\ 0, & |\tau| > \tau_{\text{и}}. \end{cases}$$

Энергии сигналов E_B и E_p равны соответственно

$$E_B = \int_{-\infty}^{\infty} s_B^2(t) dt = U_m^2 \tau_{\text{и}}; \quad E_p = \int_{-\infty}^{\infty} s_p^2(t) dt \cong U_m^2 \tau_{\text{и}} / 2$$

с учетом условия $\omega_0 \tau_{\text{и}} \gg 1$.

Числовые характеристики сигнала $s_B(t)$ определяются следующим образом:

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t s_B^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_B^2(t) dt} = \frac{U_m^2 \int_{-\infty}^{\tau_{\text{и}}} t dt}{U_m^2 \tau_{\text{и}}} = \frac{\tau_{\text{и}}}{2},$$

$$\Delta t_{\text{СК}_B} = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 s_B^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_B^2(t) dt} \right]^{1/2} = \left[\frac{U_m^2 \int_{-\infty}^{\tau_{\text{и}}} (t - \tau_{\text{и}}/2)^2 dt}{U_m^2 \tau_{\text{и}}} \right]^{1/2} = \frac{\tau_{\text{и}}}{2\sqrt{3}},$$

$$\Delta t_{\text{ЭФ}_B} = \frac{\int_{-\infty}^{\tau_{\text{и}}} U_m^2 dt}{U_m^2} = \tau_{\text{и}}.$$

Для сигнала $s_p(t)$ с учетом условия $\omega_0 \tau_{\text{и}} \gg 1$ $t_0 \cong \tau_{\text{и}}/2$, $\Delta t_{\text{СК}_p} \cong \tau_{\text{и}}/2\sqrt{3}$, $\Delta t_{\text{ЭФ}_p} \cong \tau_{\text{и}}/2$.

Для средней частоты ω_0 и эффективной ширины спектра $\Delta\omega_{\text{ЭФ}}$ сигнала $s_B(t)$ будем иметь $\omega_{0B} = 0$, а

$$\Delta\omega_{\text{ЭФ}_B} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}_B(\omega)|^2 d\omega}{|\tilde{s}_B(\omega_{\text{max}})|^2}.$$

Так как стоящий в числителе интеграл в соответствии с равенством Парсеваля равен πE , а $|\tilde{s}_B(\omega_{\text{max}})|^2 = |\tilde{s}_B(0)|^2 = (U_m \tau_{\text{и}})^2$, то $\Delta\omega_{\text{ЭФ}_B} = \pi/\tau_{\text{и}}$, а $\Delta f_{\text{ЭФ}_B} = 1/2\tau_{\text{и}}$. Для сигнала $s_p(t)$ средняя частота спектра равна ω_0 , а $\Delta f_{\text{ЭФ}_p} = 1/\tau_{\text{и}}$.

Среднеквадратическая ширина $\Delta\omega$ для рассматриваемых сигналов $s_B(t)$ и $s_P(t)$ в силу медленного убывания спектра из-за разрывного характера сигнала равна бесконечности. Убедитесь в этом сами.

Для принятых определений $\Delta t_{\text{эф}}$ и $\Delta f_{\text{эф}}$ для $s_B(t)$ и $s_P(t)$ базы, соответствующие этим сигналам, будут равны $B_B = \Delta t_{\text{эф}} \cdot \Delta f_{\text{эф}} = 1/2$ и $B_P = 1/2$. Таким образом, рассматриваемые сигналы относятся к категории простых.

2. Найти частотно-временную ФН прямоугольного радиоимпульса

$$s_P(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_0 t), & |t| \leq \tau_{\text{и}}/2, \\ 0, & |t| > \tau_{\text{и}}/2 \end{cases} \quad \text{при условии } \omega_0 \tau_{\text{и}} \gg 1.$$

Решение. В этом случае из-за отсутствия угловой модуляции комплексная огибающая $\dot{S}(t)$ совпадает с огибающей

$$S(t) = \begin{cases} U_m, & |t| \leq \tau_{\text{и}}/2, \\ 0, & |t| > \tau_{\text{и}}/2 \end{cases}$$

и частотно-временная ФН $\Psi(\tau, F)$ будет равна

$$\Psi(\tau, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t-\tau)e^{-j2\pi Ft} dt \right|$$

и при $0 \leq \tau \leq \tau_{\text{и}}$

$$\Psi(\tau, F) = \left| \frac{U_m^2}{U_m^2 \tau_{\text{и}} - \tau_{\text{и}}/2 + \tau} \int_{-\tau_{\text{и}}/2 + \tau}^{\tau_{\text{и}}/2} e^{-j2\pi Ft} dt \right| = \left| \frac{\sin[\pi F(\tau_{\text{и}} - \tau)]}{\pi F \tau_{\text{и}}} \right|.$$

Вычислив аналогичный интеграл для $-\tau_{\text{и}} \leq \tau < 0$ и учитывая, что при сдвиге τ , большем по модулю длительности сигнала $\tau_{\text{и}}$, множители $S(t)$ и $S(t)$ под интегралом не перекрываются, окончательно будем иметь

$$\Psi(\tau, F) = \begin{cases} \left| \frac{\sin[\pi F(\tau_{\text{и}} - |\tau|)]}{\pi F \tau_{\text{и}}} \right|, & |\tau| \leq \tau_{\text{и}}, \\ 0, & |\tau| > \tau_{\text{и}}. \end{cases}$$

3. Провести исследование в соответствии с заданием примера 1 для гауссовских видео- и радиосигналов $s_B(t) = U_m e^{-\alpha t^2}$ и $s_P(t) = U_m e^{-\alpha t^2} \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0/\sqrt{\alpha} \gg 1$, $\alpha > 0$,

Решение. Спектры рассматриваемых сигналов равны соответственно

$$\begin{aligned}\tilde{s}_B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_m e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt = 2U_m \int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} \cos(\omega t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} U_m e^{-\omega^2/4\alpha}, \\ \tilde{s}_p(\omega) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} U_m \left[e^{-(\omega+\omega_0)^2/4\alpha} + e^{-(\omega-\omega_0)^2/4\alpha} \right].\end{aligned}\quad (1.43)$$

Корреляционные функции

$$\begin{aligned}K_B(\tau) &= U_m^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-\alpha(t-\tau)^2} dt = U_m^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha\tau^2/2}, \\ K_p(\tau) &\cong \frac{U_m^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha\tau^2/2} \cos(\omega_0\tau).\end{aligned}$$

Энергии сигналов $E_B = U_m^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$ и $E_p \cong \frac{E_B}{2} = \frac{U_m^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$.

Средние значения t_0 для $s_B(t)$ и $s_p(t)$ совпадают и равны нулю. С учетом узкополосности среднеквадратические длительности также равны $\Delta t_{\text{СК}_B} = \Delta t_{\text{СК}_p} = 1/(2\sqrt{\alpha})$.

Эффективная длительность $s_B(t)$ равна $\Delta t_{\text{эф}_B} = \int_{-\infty}^{\infty} U_m^2 e^{-2\alpha t^2} dt / U_m^2 = \sqrt{\pi/2\alpha}$, а для $s_p(t)$ определяется выражением

$$\Delta t_{\text{эф}_p} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U_m^2 e^{-2\alpha t^2} \cos^2(\omega_0 t) dt}{U_m^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}.$$

Найдем числовые характеристики спектра. Средние частоты для $s_B(t)$ и $s_p(t)$ равны соответственно нулю и ω_0 . А эффективная ширина спектра

$$\Delta f_{\text{эф}_B} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}, \quad \Delta f_{\text{эф}_p} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}.$$

База гауссовских видео- и радиоимпульсов $B=1/4$ в два раза меньше, чем прямоугольных. Отметим, что гауссовские сигналы обладают максимальной концентрацией энергии на плоскости время–частота.

В отличие от прямоугольных импульсов для гауссовских сигналов среднеквадратическая частота конечна и равна $\omega_{\text{СК}_B} = \sqrt{\alpha}$ для видеоимпульса и

$\omega_{\text{скр}} \cong \sqrt{\alpha + \omega_0^2}$ для радиоимпульса. При выполнении условия узкополосности $\sqrt{\alpha}/\omega_0 \gg 1$ $\omega_{\text{скр}} \cong \omega_0$.

4. Найти частотно-временную ФН гауссовского радиоимпульса

$$s(t) = U_m e^{-\alpha t^2} \cos(\omega_0 t). \quad (1.44)$$

Решение. В нашем случае, как и в примере 2, комплексная огибающая $\dot{S}(t)$ совпадает с огибающей $S(t) = U_m e^{-\alpha t^2}$, и частотно-временная ФН

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, F) &= \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{-j2\pi Ft} dt \right| = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-\alpha(t-\tau)^2} e^{-j2\pi Ft} dt \right| = \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-\alpha \tau^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha t^2 + 2\alpha \tau t} \cos(2\pi Ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha t^2 + 2\alpha \tau t} \sin(2\pi Ft) dt \right|. \end{aligned}$$

Вычисляя входящие в это выражение интегралы, получим окончательно

$$\Psi(\tau, F) = \exp \left[\frac{-\alpha \tau^2}{2} - \frac{(\pi F)^2}{2\alpha} \right].$$

5. Найти спектр, его числовые характеристики, а также частотно-временную ФН сигнала

$$s(t) = U_m e^{-\alpha t^2} \cos\left(\omega_0 t + \mu t^2/2\right), \quad (1.45)$$

представляющего собой радиоимпульс с гауссовской огибающей и внутриимпульсной частотной модуляцией (ЧМ) по линейному закону $\omega(t) = \omega_0 t + \mu t^2/2$, где ω_0 – центральная частота; μ – крутизна модуляционной характеристики.

Решение. Сигнал будем считать узкополосным, т. е. $\Delta\omega_{\text{эф}}/\omega_0 \ll 1$.

Спектр сигнала $s(t)$ равен

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_m e^{-\alpha t^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right) e^{-j\omega t} dt = U_m \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha a}}} \times \\ &\times \left\{ e \left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{a} - j \frac{(\omega + \omega_0)^2}{b} \right] + e \left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{a} + j \frac{(\omega + \omega_0)^2}{b} \right] \right\}, \quad (1.46) \end{aligned}$$

где $a = 4\alpha + \mu^2/\alpha$, $b = \frac{\mu}{2\alpha a}$.

Сравнение выражений (1.43) и (1.46) показывает, что введение внутриимпульсной частотной модуляции приводит к расширению спектра, так как $a > 4\alpha$, и дает возможность управлять шириной спектра независимо от его длительности, определяемой параметром α , за счет крутизны модуляционной характеристики μ . Отметим, что фазовый спектр сигнала (1.46) подчиняется квадратичному закону.

Эффективная ширина спектра равна

$$\Delta f_{\text{эф}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{4\alpha}}.$$

Поскольку эффективная длительность рассматриваемого сигнала такая же, как и у сигнала (1.44), то база сигнала (1.45)

$$B = \Delta f_{\text{эф}} \Delta t_{\text{эф}} = \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{4\alpha^2}}.$$

При $\mu = 0$ сигнал (1.45) превращается в сигнал (1.44) и $B = 1/4$. Если $\mu/2\alpha \gg 1$, то $B \cong \frac{\mu}{8\alpha}$ также много больше единицы, и сигнал (1.45) относится к категории сложных.

Поскольку комплексная огибающая рассматриваемого сигнала равна $\dot{S}(t) = U_m e^{-\alpha t^2 + j\mu t^2/2}$, то частотно-временная ФН

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, F) &= \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) e^{-j2\pi F t} dt \right| = \\ &= \left| \frac{U_m^2}{U_m^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\alpha t^2 + j \frac{\mu t^2}{2} - \alpha(t - \tau)^2 - \frac{j\mu(t - \tau)^2}{2} - j2\pi F t \right] dt \right| = \\ &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha t^2 + 2\alpha \tau t} \cos[(\mu\tau - 2\pi F)t] dt + j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha t^2 + 2\alpha \tau t} \sin[(\mu\tau - 2\pi F)t] dt \right|. \end{aligned}$$

Учитывая значения стоящих под знаком модуля интегралов (см. [24, с. 499, формулы 3.923]), получим окончательно

$$\Psi(\tau, F) = \exp \left[- \left(1 - \frac{\mu^2}{4\alpha} \right) \frac{\alpha \tau^2}{2} + \frac{\pi \mu \tau F}{4\alpha} - \frac{\pi^2 F^2}{2\alpha} \right]. \quad (1.47)$$

6. Найти комплексную огибающую и сечения частотно-временной ФН плоскостями $F = 0$, $\tau = 0$ для сигнала

$$s(t) = \sum_{i=0}^6 a_i s_0(t - iT_{\Pi}) \cos[\omega_0(t - iT_{\Pi})], \quad (1.48)$$

где $a_0 = a_1 = a_2 = a_5 = 1$, $a_3 = a_4 = a_6 = -1$ (7-элементный код Баркера),

$$s_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T_{\Pi}], \\ 0, & t \notin [0, T_{\Pi}], \end{cases} \quad T_{\Pi} = \frac{2\pi M}{\omega_0}, \quad M \gg 1, \text{ что позволяет считать рассматриваемый сигнал узкополосным.}$$

Таблица. 1.2

m	Код	$a_m a_0 + \dots + a_{6-m}$
0	+ + + - - + -	7
1	+ + + - - +	0
2	+ + + - -	-1
3	+ + + -	0
4	+ + +	-1
5	+ +	0
6	+	-1

Решение. Для вычисления АКФ кодовой последовательности составим табл. 1.2, аналогичную табл. 1.1, после чего с учетом формы АКФ одного чипа (треугольник) нормированная корреляционная функция комплексной огибающей примет вид, изображенный на рис. 1.17. Сечения частотно-временной ФН плоскостями $F = 0$, $\tau = 0$ определяются выражениями

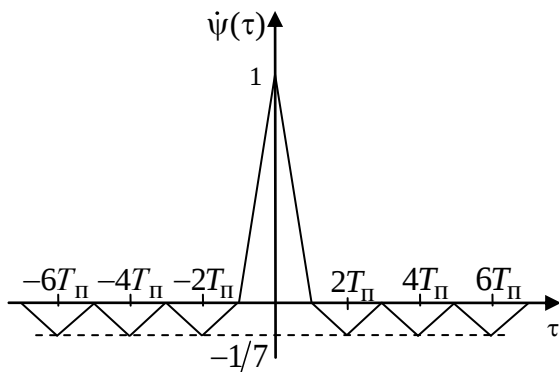


Рис. 1.17

$$\Psi(\tau, 0) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right| = |\dot{\psi}(\tau)|;$$

$$\Psi(0, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 e^{-j2\pi Ft} dt \right|$$

соответственно. Графики этих функций приведены на рис. 1.18, а и б.

7. Для сигналов, рассмотренных в примерах 1–6, найти структуры СФ и определить отношение с/ш на их выходах.

Решение. Для сигнала $s(t) = \begin{cases} U_m, & t \in [0, \tau_{\Pi}], \\ 0, & t \notin [0, \tau_{\Pi}] \end{cases}$ и момента времени $t_0 = \tau_{\Pi}$ импульсная характеристика $h_{\text{СФ}}(t) = s(t)$, а коэффициент передачи

$$K_{\text{СФ}}(j\omega) = \tilde{s}^*(\omega) e^{-j\omega\tau_{\Pi}} = U_m \left(\frac{1 - e^{-j\omega\tau_{\Pi}}}{j\omega} \right)^* e^{-j\omega\tau_{\Pi}} = U_m \frac{1 - e^{-j\omega\tau_{\Pi}}}{j\omega}.$$

Опуская не влияющий на отношение с/ш множитель U_m , приходим к структурной схеме СФ, приведенной на рис. 1.19.

Напомним, что коэффициент передачи $1/j\omega$ имеет идеальный интегратор, а $e^{-j\omega\tau_{\text{и}}}$ – линия задержки на время $\tau_{\text{и}}$.

Отношение с/ш на выходе СФ будет равно $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = U_m \sqrt{\frac{2\tau_{\text{и}}}{N_0}}$.

Для сигнала

$$s(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_0 t), & t \in [0, \tau_{\text{и}}], \\ 0, & t \in [0, \tau_{\text{и}}], \tau_{\text{и}} = \frac{2M\pi}{\omega_0}, M \gg 1 \end{cases}$$

импульсная характеристика СФ также равна $s(t)$ (подумайте, почему), а коэффициент передачи

$$K_{\text{СФ}}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau_{\text{и}}}}{j(\omega - \omega_0)}.$$

Структурная схема СФ совпадает с изображенной на рис. 1.19 с той лишь разницей, что первый блок (интегратор) должен быть заменен на интегратор по огибающей, импульсная характеристика которого

$$h(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Физическая реализация интегратора и интегратора по огибающей может быть получена с помощью интегрирующей RC-цепи с постоянной времени $T \gg \tau_{\text{и}}$ в первом случае и высокодобротного контура, $Q \gg 1$, во втором случае, где Q – добротность контура.

Отношение с/ш на выходе СФ для прямоугольного радиоимпульса длительностью $\tau_{\text{и}}$ с амплитудой U_m с учетом введенного условия узкополосности равно $U_m \sqrt{\tau_{\text{и}}/N_0}$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем у аналогичного видеоимпульса.

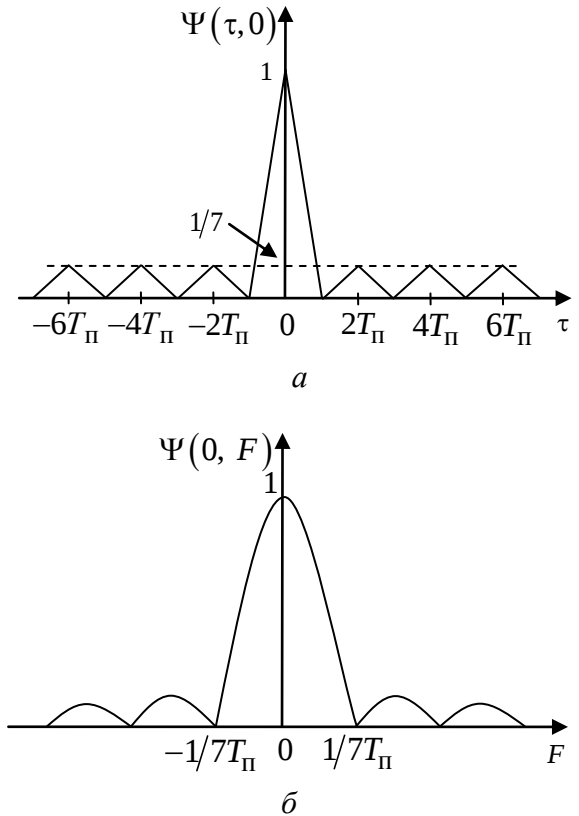


Рис. 1.18

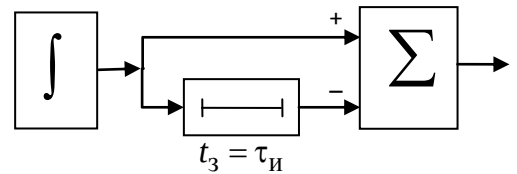


Рис. 1.19

Для гауссовских видео- ($U_m e^{-\alpha t^2}$) и радио- ($U_m e^{-\alpha t^2} \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0/\sqrt{\alpha} \gg 1$) импульсов импульсные характеристики СФ также совпадают с сигналами, но в силу их временной неограниченности физически нереализуемы. Физически реализуемым приближением к СФ для сигнала $U_m e^{-\alpha t^2}$ станет система, состоящая из последовательного и независимого включения $N \gg 1$ интегрирующих RC-цепей с постоянной времени T . Как показано в [19, с. 12–13], импульсная характеристика такой системы имеет вид

$$h(t) \approx \frac{1}{T\sqrt{2\pi N}} e^{-(t-NT)^2/2NT^2}.$$

При выполнении условия $\alpha = 1/(2NT^2)$ рассматриваемая система в момент времени $t_0 = NT = \sqrt{N/2\alpha}$ обеспечит достаточно близкое к максимально достижимому отношение с/ш, которое для рассматриваемого сигнала равно

$$q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = \frac{U_m}{\sqrt{N_0}} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}.$$

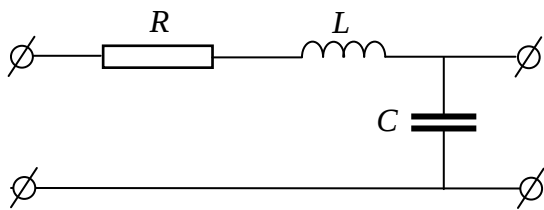


Рис. 1.20

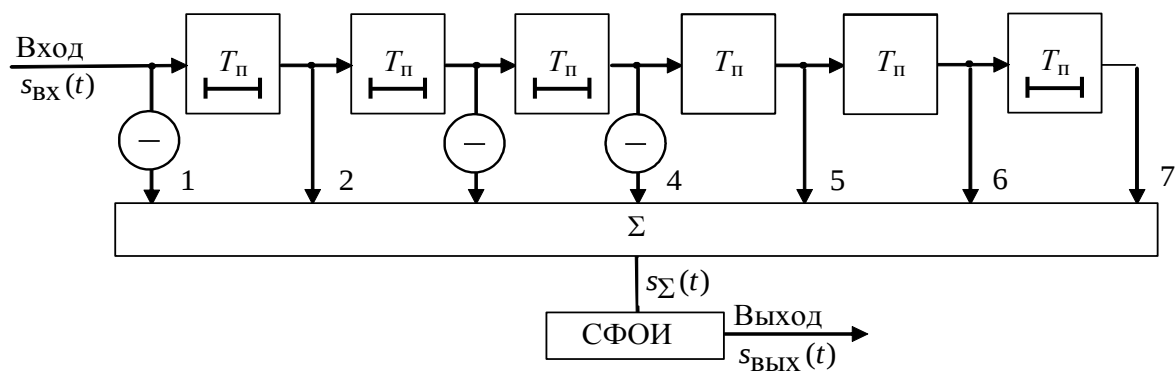
Для гауссовского радиоимпульса приближение к СФ может быть реализовано последовательным включением большого числа звеньев на основе последовательного колебательного контура (рис. 1.20) при выполнении условия

$$\alpha = \frac{\omega_0^2}{8NQ^2}, \text{ где } Q - \text{ добротность колебательного контура.}$$

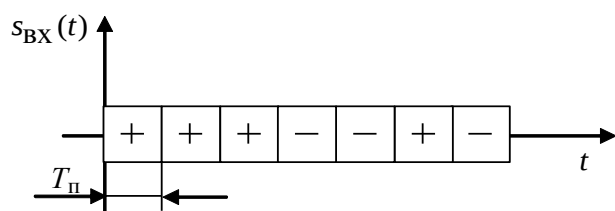
Максимально достижимое отношение с/ш для гауссовского радиоимпульса будет в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем у соответствующего видеосигнала. Для сигнала с гауссовской огибающей и внутриимпульсной ЧМ, рассмотренного в примере 5, СФ в соответствии с (1.45) будет иметь коэффициент передачи

$$K_{\text{СФ}}(j\omega) = \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{a} + j\frac{(\omega - \omega_0)^2}{b}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{a} - j\frac{(\omega + \omega_0)^2}{b}\right],$$

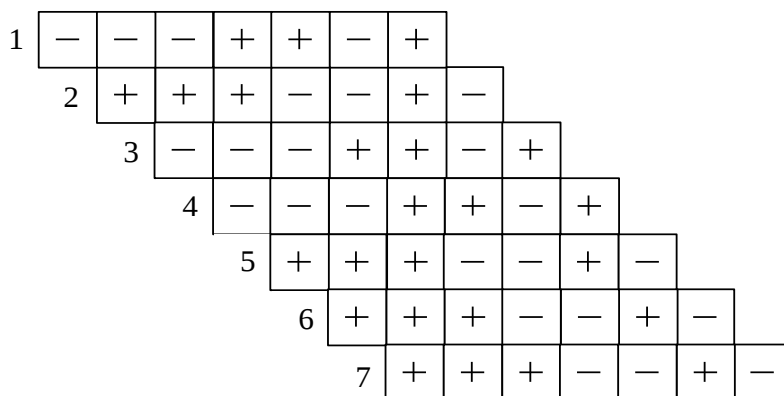
который может быть реализован с помощью последовательного включения системы, рассмотренной ранее, для не модулированного по частоте гауссовского радиоимпульса и системы, имеющей единичную АЧХ и квадратичную ФЧХ.



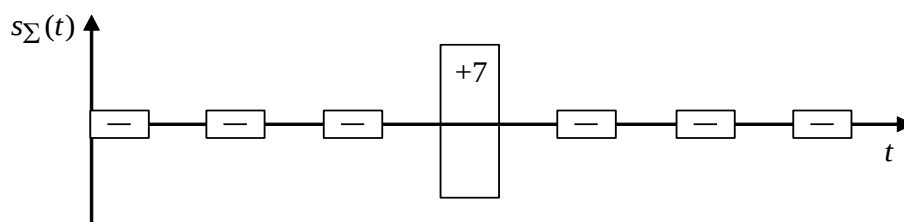
a



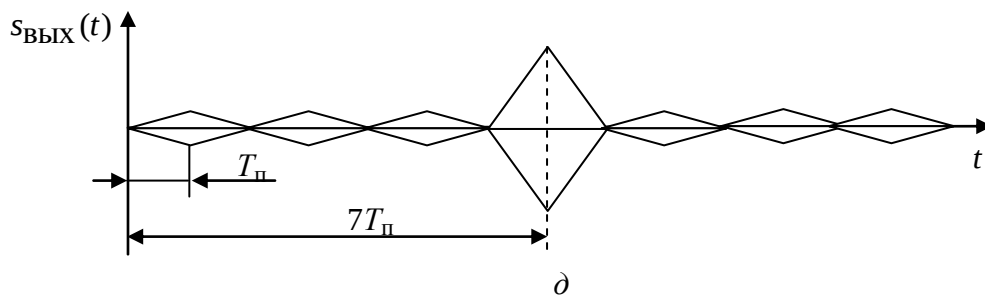
b



в



г



д

Рис. 1.21

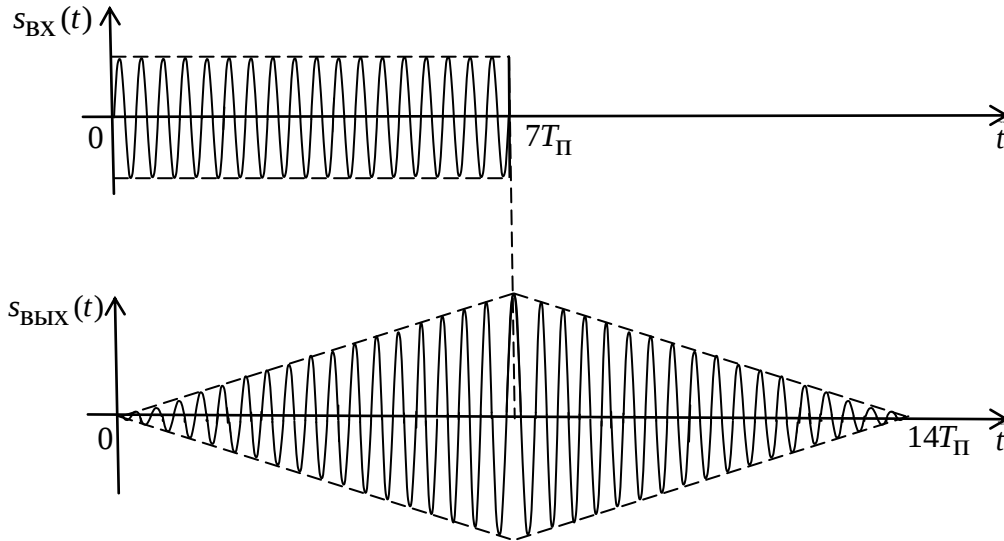


Рис. 1.22

Квадратичной ФЧХ соответствует линейная зависимость задержки от частоты, что и используется при реализации СФ для такого сигнала.

Посмотрим, как будет выглядеть данный сигнал на выходе своего СФ. С учетом записанного выражения для $K_{СФ}(j\omega)$ спектр сигнала на выходе СФ

$$\tilde{s}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \tilde{s}(\omega)K_{СФ}(j\omega) = U_m \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha a}}} \left\{ \exp\left[-\frac{2(\omega - \omega_0)^2}{a}\right] + \exp\left[-\frac{2(\omega + \omega_0)^2}{a}\right] \right\},$$

а сам сигнал $s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{U_m^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-at^2/8} \cos \omega_0 t$. Учитывая, что сигнал на выходе

СФ имеет форму своей АКФ, этот результат можно получить из выражения для частотно-временной ФН (1.47), так как ее сечение плоскостью $F = 0$ дает модуль нормированной АКФ сигнала. Сравним длительности исходного сигнала и сигнала на выходе СФ. Длительность гауссовского импульса

$U_m e^{-bt^2/8}$ на уровне $\frac{1}{2}U_m$, как нетрудно показать, равна $\sqrt{\frac{\ln 2}{b}}$. Таким обра-

зом, отношение $\frac{\Delta t_{\text{ВХ}}}{\Delta_{\text{ВЫХ}}} = \sqrt{\frac{a}{8\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^2}$ и при $\mu/\alpha \gg 1$ сигнал на выходе

СФ оказывается значительно уже, чем на входе. Этот эффект называется сжатием сложного сигнала с помощью СФ.

Обратите внимание, что при $\mu = 0$ (отсутствие ЧМ) $\frac{\Delta t_{\text{ВХ}}}{\Delta_{\text{ВЫХ}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и длительность простого сигнала на выходе СФ больше, чем на входе.

Для сигнала (1.48) импульсная характеристика СФ при $t_0 = 7T_{\Pi}$ имеет вид $\sum_{i=0}^6 a_{6-i} s_0(t - iT_{\Pi}) \cos \omega_0(t - iT_{\Pi})$, т. е. отличается от исходного сигнала порядком следования элементов кодовой последовательности.

В соответствии со сказанным СФ имеет структурную схему, приведенную на рис. 1.21, а. Части рис. 1.21 б, в, д поясняют механизм формирования выходного сигнала.

Для сравнения на рис. 1.22 приведен результат согласованной фильтрации прямоугольного радиоимпульса длительностью $7T_{\Pi}$. Сравнение рис. 1.21, д и 1.22 иллюстрирует эффект сжатия фазоманипулированного сигнала на выходе СФ.

1.4.3. Задачи

1. Для сигналов, комплексная огибающая которых приведена на рис. 1.23, а–з, а центральная частота равна ω_0 , найти частотно-временную ФН, ее сечения плоскостями $\tau = 0$, $F = 0$; определить структуру СФ, отношение с/ш на выходе в момент окончания сигнала и форму сигнала на выходе.

Считать, что $\tau_{\Pi} = \frac{4\pi M}{\omega_0}$, $M \gg 1$.

2. Сигнал представляет собой группу из N прямоугольных радиоимпульсов с амплитудой U_m и длительностью τ_{Π} , частоты заполнения которых меняются по закону $f_k = f_0 + kF$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ и которые следуют с периодом $T = 3\tau_{\Pi}$. Шаг перестройки по частоте F и длительность импульса τ_{Π} выбраны так, что спектры импульсов, входящих в группу, практически не перекрываются. Определить структуру СФ. Найти форму полезного сигнала на выходе согласованного фильтра и, считая сигнал узкополосным, рассчитать отношение с/ш на выходе СФ в момент окончания сигнала (группы). Помеха – белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0/2$.

3. Для каких сигналов линейные фильтры, структура которых приведена на рис. 1.24, являются согласованными фильтрами?

4. Аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и белого шума со спектральной плотностью мощности $N_{01}/2$ подается на линейный фильтр с коэффициен-

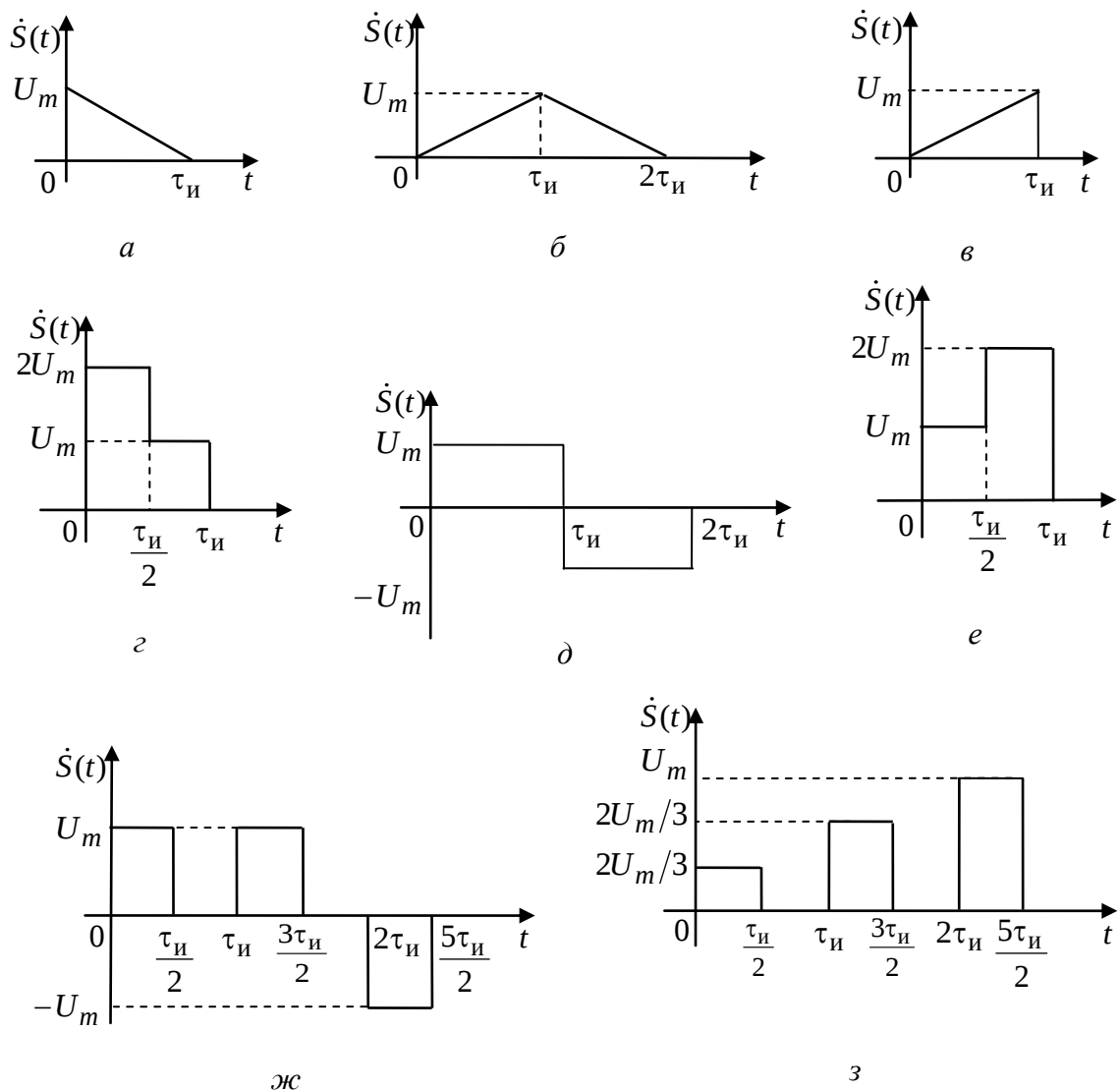


Рис. 1.23

том передачи $K_1(j\omega)$. К выходному сигналу фильтра добавляется второй белый шум, независимый от первого и имеющий спектральную плотность мощности $N_{02}/2$. Какой фильтр необходимо применить, чтобы на выходе в момент времени t_0 получить максимум отношения с/ш? Каким оно будет,

если сигнал $s(t) = U \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}$, а $K_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$? Рассмотреть два случая:

а) $N_{01}/2 \gg N_{02}/2$; б) $N_{01}/2 \ll N_{02}/2$. Объяснить результат.

5. Аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и белого шума со спектральной плотностью мощности $N_{01}/2$ подается на линейный фильтр с коэффициентом передачи $K_1(j\omega)$. К выходному сигналу фильтра добавляется второй белый шум, независимый от первого и имеющий спектральную плотность мощности $N_{02}/2$. Какой фильтр необходимо применить, чтобы на выходе в

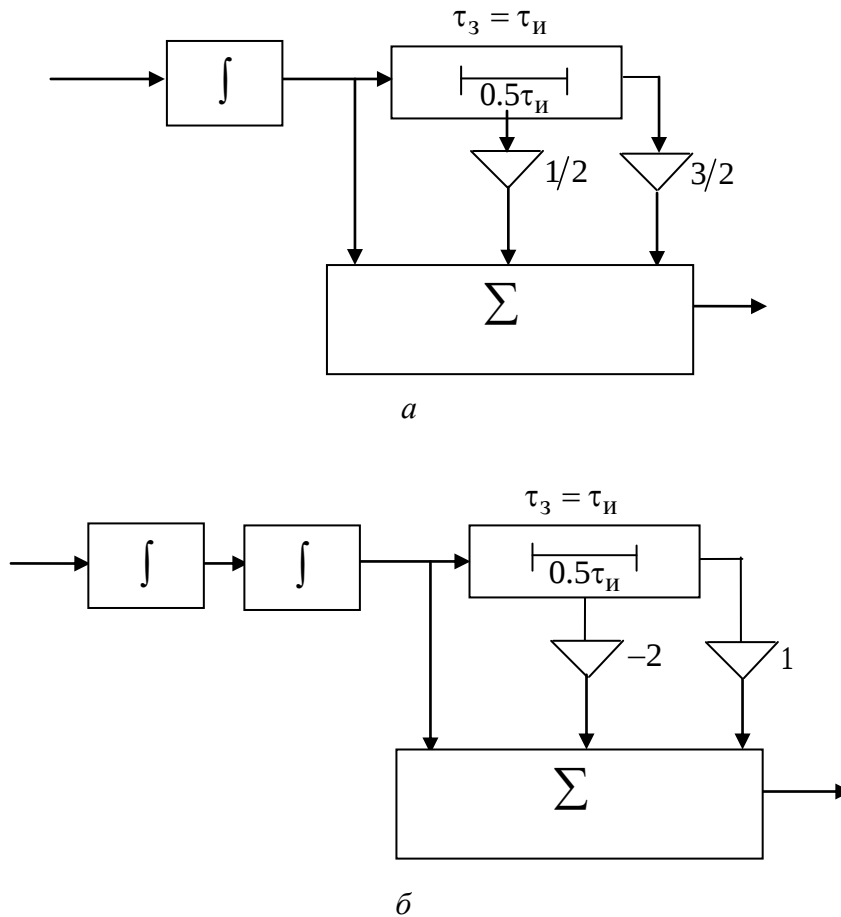


Рис. 1.24

момент времени t_0 получить максимум отношения с/ш? Каким оно будет, если сигнал $s(t) = U \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}$, а $K_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$? Рассмотреть два случая:

а) $N_{01}/2 \gg N_{02}/2$; б) $N_{01}/2 \ll N_{02}/2$. Объяснить результат.

6. Отклик линейного фильтра на сигнал $s(t) = \begin{cases} U_m, & t \in [0, \tau_{\text{и}}], \\ 0, & t \notin [0, \tau_{\text{и}}] \end{cases}$ имеет вид, приведенный

на рис. 1.25. С каким сигналом согласован фильтр? Каким будет проигрыш по сравнению с согласованной фильтрацией сигнала $s(t)$?

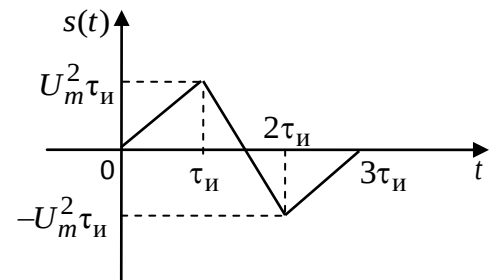


Рис. 1.25

7. Сигнал $s_1(t) = \sum_{k=0}^4 a_k s_0(t - kT)$, где $s_0(t)$ – прямоугольный импульс

длительностью $\tau_{\text{и}}$ с амплитудой U_m , $T = 3\tau_{\text{и}}$, а коэффициенты a_k принимают значения 1, 1, 1, -1, 1 (пятиэлементный код Баркера), подается на фильтр,

согласованный с сигналом $s_2(t) = \sum_{k=0}^8 b_k s_0(t - kT)$, причем коэффициенты b_k

равны соответственно $-1, 0, 2, 4, 3, -4, 2, 0, -1$. Найти вид сигнала $s_1(t)$ на выходе фильтра. Сравнить полученный результат со случаем согласованной фильтрации сигнала $s_1(t)$. Определить максимальное отношение с/ш на выходе данного фильтра и сравнить его со случаем согласованной фильтрации сигнала $s_1(t)$. Прокомментировать полученный результат.

8. Сигнал $s(t) = U_m \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}$ принимается на фоне помехи, представляющей собой сумму N независимых стационарных случайных процессов с корреляционными функциями вида $K_i(\tau) = \sigma_i^2 e^{-\alpha_i |\tau|}$, причем $\alpha_i \gg \Omega$. Найти структуру фильтра, максимизирующего отношение с/ш, и значение этого отношения.

9. При записи выражения для импульсной характеристики согласованного фильтра студент ошибся и написал $h(t) = s(t)$. Момент измерения отношения с/ш он определил как момент окончания сигнала $s(t)$. К какому проигрышу по сравнению с правильным решением это приведет для сигнала

$$s(t) = \begin{cases} \frac{Ut}{T}, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases} \quad \text{Помеха — белый шум со спектральной плотностью}$$

мощности $N_0/2$. Для каких сигналов эта ошибка не приведет к проигрышу?

10. Стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}$ записывается на магнитофон и считывается со скоростью kv_3 , где v_3 — скорость записи, а $0 < k < \infty$. При каком значении k считанный процесс обеспечит для сигнала $U \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}$ минимум или максимум отношения с/ш на выходе фильтра, максимизирующего это отношение?

11. Студент ошибся и в качестве импульсной характеристики согласованного фильтра взял функцию $s(t - t_0)$, где $s(t)$ — сигнал, отличный от нуля на интервале $[0, t_0]$. Каким будет теперь отношение с/ш в момент t_0 для сигнала

$$s(t) = \begin{cases} t/t_0, & t \in [0, t_0]; \\ 0, & t \notin [0, t_0] \end{cases} \quad \text{Как в этом случае нужно выбрать момент } t_0,$$

чтобы получить максимум отношения с/ш? Каким будет это отношение по сравнению с правильным выбором импульсной характеристики?

12. Фильтр согласован с сигналом $s(t) = \begin{cases} U_m, & |t| \leq \tau_{\text{и}}/2; \\ 0, & |t| > \tau_{\text{и}}/2. \end{cases}$ Каким будет

отношение сигнал/помеха (с/п) на выходе фильтра, если на его входе кроме белого шума со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ действует синусоидальная помеха $U_m \sin(\omega_0 t - \varphi)$, φ – случайная величина с равномерной плотностью вероятности в промежутке $[-\pi; \pi]$, а U_m и ω_0 – детерминированные величины. Под соотношением с/п следует понимать отношение максимума сигнала к корню из дисперсии суммарной помехи на выходе СФ. Белый шум и синусоидальную помеху считать независимыми. Каким будет фильтр, максимизирующий отношение с/п? Каким будет это отношение?

13. На вход СФ для прямоугольного импульса длительностью $\tau_{\text{и}}$ помимо белого шума со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ подается прямоугольный импульс длительностью T с амплитудой U . Построить зависимость максимального отношения с/ш на выходе фильтра от параметра T .

14. На вход фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом длительностью T , подается сигнал

$$s(t) = \begin{cases} U_m, & t \in [0, 4T]; \\ U_m/2, & t \in [4T, 10T]; \\ 0, & t \notin [0, 10T] \end{cases}$$

в смеси с белым шумом со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Какой линейный фильтр следует включить после указанного фильтра, чтобы обеспечить для сигнала $s(t)$ максимальное отношение с/ш? Каким будет отношение с/ш после первого и второго фильтров?

15. Насколько нужно увеличить длительность $\tau_{\text{и}}$ прямоугольного видеоимпульса с амплитудой U_m , чтобы с помощью интегрирующей RC-цепи добиться такого же отношения с/ш, как при согласованной фильтрации исходного сигнала?

16. Последовательность прямоугольных видеоимпульсов с длительностью 1 мкс и амплитудой 1 мВ подается на интегрирующую RC-цепь с постоянной времени $T = RC = 0.5$ мкс, на выходе которой добавляется белый

шум с $S(\omega) = N_0/2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ В}^2/\text{Гц}$. Сколько импульсов должно быть в последовательности, чтобы при согласованной фильтрации получить отношение с/ш, равное 10? Считать, что импульсы на выходе РС-цепи не перекрываются.

17. Сигнал $s(t) = U_m \sum_{k=0}^{100} \frac{\sin[\Omega(t - kT)]}{\Omega(t - kT)}$, где $T = \pi/\Omega$. Помеха – белый

шум с СПМ $S(\omega) = N_0/2$. Найти структуру СФ и вычислить отношение с/ш на его выходе. Каким будет результат, если вместо СФ использовать интегрирующую РС-цепь с постоянной времени, обеспечивающей максимум отношения с/ш на выходе?

18. Сигнал $s_1(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_0 t + \mu t^2/2), & t \in [-T/2, T/2]; \\ 0, & t \notin [-T/2, T/2] \end{cases}$ и белый шум

с $S(\omega) = N_0/2$ подаются на фильтр, согласованный с сигналом $s_2(t) = \begin{cases} U_m \cos \omega_0 t, & t \in [-T/2, T/2]; \\ 0, & t \notin [-T/2, T/2]. \end{cases}$ Считая базу заданного сигнала $B = \mu T^2 \gg 1$,

оценить проигрыш. Сравнить со случаем, когда в качестве фильтра используется идеальный полосовой фильтр с центральной частотой ω_0 , полосой пропускания μT и линейной ФЧХ.

19. Сигнал формируется подачей прямоугольного видеоимпульса с амплитудой U_m и длительностью $\tau_{\text{и}}$ на входы интегрирующей и дифференцирующей РС-цепей с одинаковыми постоянными времени и суммированием откликов. Найти фильтр, согласованный с таким сигналом, определить отношения с/ш на выходе и форму выходного полезного сигнала.

20. Для фильтрации гармонического сигнала с частотой ω_0 на фоне белого шума используется интегрирующая РС-цепь. Выбрать постоянную времени таким образом, чтобы в установившемся режиме отношение с/ш на выходе было максимально. Сравнить результат со случаем согласованной фильтрации отрезка данного гармонического колебания длиной $NT_{\text{опт}}$, где N – целое число, а $T_{\text{опт}}$ – ранее найденная оптимальная постоянная времени интегрирующей цепи.

2. ОБНАРУЖЕНИЕ, РАЗЛИЧЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

2.1. Основные теоретические сведения

Под обнаружением сигнала в РТС и ТКС понимается анализ принятого колебания $y(t)$, завершающийся принятием решения о наличии или отсутствии в нем полезной составляющей, которую и называют сигналом. Различение сигналов определяют как анализ принятого колебания, завершающийся принятием решения, какой из M сигналов, принадлежащих заданному множеству $S = \{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$, присутствует в $y(t)$.

Частный случай этой задачи представляет ситуация, когда принятое колебание $y(t)$ может вообще не содержать сигнала. В такой постановке говорят о различении-обнаружении.

Оцениванием параметра λ , в общем случае векторного, сигнала $s(t, \lambda)$ на основе анализа априорной информации и наблюдаемого колебания $y(t)$, содержащего сигнал и помеху, называется процедура формирования значения параметра $\hat{\lambda}$, выдаваемого в качестве истинного значения параметра λ , не гарантируя при этом равенства $\hat{\lambda} = \lambda$. Сформированное значение $\hat{\lambda}$, которое является функционалом от наблюдаемого колебания $y(t)$, называют точечной оценкой параметра λ . При этом параметр λ в пределах интервала наблюдения $[0, T]$ предполагается неизменным.

При синтезе оптимальных обнаружителей, различителей и устройств оценивания параметров сигнала используется критерий минимального среднего риска и его частные случаи.

Применительно к задаче различения M сигналов средний риск $\bar{\Pi}$ имеет вид

$$\bar{\Pi} = \sum_{i,j} \Pi_{ij} p_i p_{ij}, \quad (2.1)$$

где Π_{ij} – элементы матрицы потерь; p_i – априорные вероятности гипотез (предположений о присутствии в $y(t)$ сигнала $s_i(t)$); $p_{ij} = P(\hat{H}_j / H_i)$ – условные вероятности ошибок (принятие решения $\hat{H}_j$ в пользу сигнала $s_j(t)$, в то время как колебание $y(t)$ содержит сигнал $s_i(t)$).

Для задачи обнаружения (2.1) имеет вид $\bar{P} = P_0 w p_{л.т} + P_1 (1 - w) p_{п.с}$, где P_0 и P_1 – потери, связанные с ложной тревогой и пропуском сигнала; w – априорная вероятность отсутствия сигнала; $p_{л.т}$, $p_{п.с}$ – условные вероятности принятия ошибочных решений, называемые вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала соответственно.

Задача проверки гипотез H_i ($i = 0, 1, \dots, M - 1$ при различении M сигналов и $i = 0, 1$ при обнаружении сигнала) сводится к такому разбиению пространства наблюдения Y на непересекающиеся области Y_i , при котором величина средних потерь (2.1) достигает минимума. Тогда условные вероятности ошибок $p_{ij} = P(\hat{H}_j / H_i) = \int_{Y_j} W(y / H_i) dy$.

Характер областей Y и Y_i определяется способом формирования наблюдаемых данных. При дискретном наблюдении (цифровая обработка) Y есть n -мерное вещественное или комплексное пространство, а $W(y / H_i)$ есть совместная ПВ наблюдаемых отсчетов $y_1, y_2, \dots, y_n$ при справедливости гипотезы H_i . При наблюдении реализаций колебания $y(t)$ $W(y / H_i)$ есть функционал плотности наблюдаемого колебания в предположении истинности гипотезы H_i . С учетом введенных обозначений минимизация (2.1) приведет нас к следующему алгоритму принятия решения: принимается решение $\hat{H}_k$ в пользу гипотезы H_k , если для номера k совместно выполняются M неравенств

$$\sum_{i=0}^{M-1} p_i \Pi_{ik} W(y | H_i) \leq \sum_{i=0}^{M-1} p_i \Pi_{ir} W(y | H_i), r = 0, 1, \dots, M - 1.$$

В тех случаях, когда потери, связанные с перепутыванием гипотез, одинаковы, $\Pi_{ij} = \Pi$, $i \neq j$, решение принимается в пользу той гипотезы H_k , для которой будет выполнена система неравенств $P(H_k / y) \geq P(H_i / y)$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$, где $P(H_i / y)$ называется апостериорной вероятностью гипотезы H_i и характеризует всю доступную наблюдателю информацию, включая априорные сведения $P(H_i)$ и наблюдение y . Данный алгоритм определяет правило максимума апостериорной вероятности (МАП).

При отказе от априорной информации о проверяемых гипотезах ($P(H_i)$ и Π_{ij}) критерий минимума среднего риска превращается в критерий мини-

сумма сумм условных вероятностей ошибок $\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} p_{ik}, k \neq i$, и решение принимается в пользу той гипотезы H_k , которой при принятой реализации y соответствует наибольшее значение $W(y/H_k)$, $k = 0, 1, \dots, M-1$. Это выражение, рассматриваемое как функция y , есть ПВ, или функционал ПВ при истинности гипотезы H_k . Если же при фиксированном наблюдении y варьировать номер k , получаемое выражение называется *функцией правдоподобия* (ФП) и показывает, насколько правдоподобна та или иная гипотеза при данном наблюдении y . Описанный алгоритм носит название метода максимума правдоподобия (МП).

Для задачи обнаружения полностью известного сигнала на фоне статистически полностью описанной помехи все перечисленные критерии, включая критерий Неймана–Пирсона, для которого минимизируется вероятность пропуска сигнала $p_{п.с}$ при условии $p_{л.т} \leq p_{л.т0}$, решение принимается на основе сравнения с порогом $l_{п}$ отношения правдоподобия, т. е. $\frac{W(y|H_1)}{W(y|H_0)} \stackrel{\hat{H}_1}{\underset{\hat{H}_0}{>}} l_{п}$.

Для упрощения алгоритма обе части неравенства могут быть преобразованы с помощью монотонной возрастающей функции $f(\cdot)$, т. е.

$$f \left[\frac{W(y|H_1)}{W(y|H_0)} \right] \stackrel{\hat{H}_1}{\underset{\hat{H}_0}{>}} f(l_{п}). \quad (2.2)$$

Наиболее часто в этой роли выступает логарифмическая функция. Аргументом в пользу логарифмической функции служит тот факт, что при обработке независимых отсчетов отношение правдоподобия $\frac{W(y|H_1)}{W(y|H_0)}$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{W(y_i|H_1)}{W(y_i|H_0)} = \prod_{i=1}^n l(y_i), \text{ где } l(y_i) = \frac{W(y_i|H_1)}{W(y_i|H_0)}$$

называют парциальным отношением правдоподобия для одного отсчета, и при использовании в качестве

$$f(\cdot) \text{ логарифмической функции } f \left[\frac{W(y_i|H_1)}{W(y_i|H_0)} \right] = \sum_{i=1}^n \ln[l(y_i)], \text{ что дает суще-}$$

ственное упрощение алгоритма. Кроме того, если $W(y_i|H_1)$, $i = 0, 1$ принадлежит к экспоненциальному семейству, например гауссовскому, то исполь-

зование логарифмической функции дает дополнительное упрощение алгоритма обработки, исключая операцию вычисления экспоненты (потенцирование).

Для задачи оценивания скалярного параметра λ сигнала $s(t; \lambda)$, аддитивно взаимодействующего с помехой $x(t)$ и образующего в результате наблюдаемое колебание $y(t) = s(t; \lambda) + x(t)$, выражение для среднего риска запишется в форме

$$\bar{\Pi} = \iint \Pi(\lambda, \hat{\lambda}) W(\lambda) W(\hat{\lambda}/\lambda) d\lambda d\hat{\lambda}, \quad (2.3)$$

где $\Pi(\lambda, \hat{\lambda})$ – функция потерь, характеризующая последствия отклонения параметра сигнала λ от сформированной на основе наблюдения $y(t)$ и имеющейся априорной информации оценки $\hat{\lambda}$; $W(\lambda)$ – априорная ПВ параметра λ (аналог априорных вероятностей гипотез); $W(\hat{\lambda}/\lambda)$ – условная ПВ оценки параметра λ , являющаяся аналогом условных вероятностей ошибок в (2.1).

В соответствии с теоремой умножения $W(\lambda)W(\hat{\lambda}/\lambda) = W(\hat{\lambda})W(\lambda/\hat{\lambda})$ и учитывая, что оценка $\hat{\lambda}$ формируется при обработке принятого колебания $y(t)$, выражение (2.3) можно записать в виде

$$\bar{\Pi} = \int W(\hat{\lambda}) \left\{ \int \Pi(\lambda, \hat{\lambda}) W[\lambda/y(t)] d\lambda \right\} d\hat{\lambda}, \quad (2.4)$$

где $W(\hat{\lambda})$ – безусловная ПВ оценки; $W[\lambda/y(t)]$ – условная ПВ параметра λ при наблюдаемой реализации $y(t)$, называемая апостериорной ПВ параметра λ . Выражение в фигурных скобках называется условным (соответствующим колебанию $y(t)$) средним риском. Как видно из (2.4), минимизация условного среднего риска для любой реализации $y(t)$ обеспечит минимум $\bar{\Pi}$. Поэтому оценки по критерию минимума среднего риска можно находить на основе минимизации по $\hat{\lambda}$ выражения

$$\bar{\Pi}[y(t)] = \int \Pi(\lambda, \hat{\lambda}) W[\lambda/y(t)] d\lambda. \quad (2.5)$$

Функция потерь, характеризующая последствия отклонения оценки $\hat{\lambda}$ от истинного значения параметра λ , обычно задается в виде одного из следующих трех выражений:

- 1) $\Pi_1(\lambda, \hat{\lambda}) = (\lambda - \hat{\lambda})^2$ – квадратичная функция потерь;

2) $\Pi_2(\lambda, \hat{\lambda}) = |\lambda - \hat{\lambda}|$ – модульная функция потерь;

3) $\Pi_3(\lambda, \hat{\lambda}) = \begin{cases} 0, & |\lambda - \hat{\lambda}| \leq \varepsilon; \\ 1, & |\lambda - \hat{\lambda}| > \varepsilon \end{cases}$ – прямоугольная функция потерь.

Минимизация (2.5) по $\hat{\lambda}$ при приведенных функциях потерь дает следующие результаты:

1) при квадратичной функции потерь оптимальная оценка $\hat{\lambda}_{\text{опт } 1}$ соответствует математическому ожиданию апостериорной ПВ, т. е. $\hat{\lambda}_{\text{опт } 1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W[\lambda/y(t)] d\lambda$;

2) при модульной функции потерь $\hat{\lambda}_{\text{опт } 2}$ соответствует медиане апостериорной плотности вероятности, т. е. находится из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\hat{\lambda}_{\text{опт } 2}} W[\lambda/y(t)] d\lambda = \int_{\hat{\lambda}_{\text{опт } 2}}^{\infty} W[\lambda/y(t)] d\lambda;$$

3) при прямоугольной функции потерь и $\varepsilon \rightarrow 0$ $\hat{\lambda}_{\text{опт } 3}$ соответствует аргументу наибольшего значения $W[\lambda/y(t)]$ и называется оценкой по максимуму апостериорного распределения.

Апостериорная ПВ $W[\lambda/y(t)]$ может быть получена, если известна совместная ПВ (функционал ПВ) принимаемой реализации $y(t)$ и параметра λ . В этом случае $W[\lambda/y(t)] = W[y(t)]W[\lambda/y(t)] = W(\lambda)W[y(t)/\lambda]$ и

$$W[\lambda/y(t)] = \frac{1}{W[y(t)]} W(\lambda)W[y(t)/\lambda]. \quad (2.6)$$

Первый сомножитель $\frac{1}{W[y(t)]}$ не зависит от λ и может быть найден, если это

необходимо, с помощью условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} W[\lambda/y(t)] d\lambda = 1$. Второй

сомножитель $W(\lambda)$ – априорная ПВ параметра λ – должен быть задан. Третий сомножитель, рассматриваемый как функционал от $y(t)$ – условный функционал ПВ принятой реализации при фиксированном значении параметра. Если $y(t)$ зафиксировано (принято), то зависимость $W[y(t)/\lambda]$ от зна-

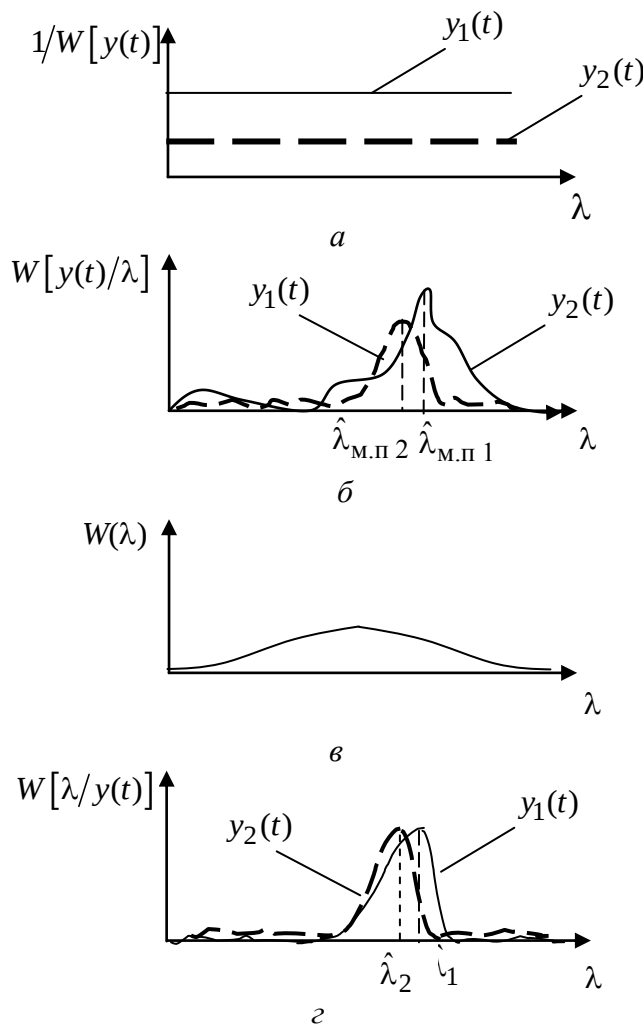


Рис. 2.1

чения параметра λ есть функция правдоподобия (ФП) и характеризует степень правдоподобности тех или иных значений параметра λ при данной реализации $y(t)$. На рис. 2.1, а–г приведены графики сомножителей, входящих в (2.6), и результат их перемножения – $W[\lambda/y(t)]$, для двух принятых реализаций $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Из приведенного рисунка видно, что если априорное распределение $W(\lambda)$ (рис. 2.1, в) значительно шире, чем ФП, т. е. основная информация о значении параметра λ извлекается из результатов измерения, то вид апостериорной ПВ и положение ее максимума близки к форме ФП и положению ее максимума. Это делает оправданной ориентацию на метод МП,

при котором в качестве оценки $\hat{\lambda}_{\text{М.П}}$ выдается значение аргумента $W[y(t)/\lambda]$, соответствующее максимуму этой функции по λ при фиксированном $y(t)$. Таким образом, $\hat{\lambda}_{\text{М.П}} = \arg \max_{\lambda} W(y(t)/\lambda)$. Значения этих оценок для реализаций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ приведены на рис. 2.1, б. Значения оценок $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$, соответствующих критерию МАП, показаны на рис. 2.1, г для двух реализаций $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Для АБГШ со спектральной плотностью мощности (СПМ) $N_0/2$ функция правдоподобия в соответствии с (1.29) имеет вид

$$W[y(t)/H_i] = k \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - s_i(t)]^2 dt \right\} \quad (2.7)$$

для задачи проверки гипотез и

$$W[y(t)/\lambda] = k \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - s(t; \lambda)]^2 dt \right\} \quad (2.8)$$

для задачи оценивания параметра λ .

В выражениях (2.7), (2.8) $[0, T]$ – интервал наблюдения, охватывающий сигналы $s_i(t)$ или $s(t; \lambda)$, $i = 0, 1, \dots, M-1$.

Подставляя (2.7) в (2.2) с учетом того, что $s_0(t) = 0$, $s_i(t) = s(t)$, получим после несложных преобразований алгоритм обнаружения полностью известного сигнала $s(t)$ на фоне НБШ с СПМ $N_0/2$:

$$z = \int_0^T y(y)s(y)dt \begin{matrix} \hat{H}_1 \\ > \\ \hat{H}_0 \end{matrix} z_{\Pi} = \frac{N_0}{2} \ln l_{\Pi} + \frac{E}{2},$$

где $E = \int_0^T s^2(y)dt$ – энергия обнаруживаемого сигнала.

При использовании критерия минимума среднего риска $l_{\Pi} = \frac{w\Pi_0}{(1-w)\Pi_1}$; для

критерия идеального наблюдателя $\Pi_0 = \Pi_1$ и $l_{\Pi} = \frac{w}{(1-w)}$, а в случае использо-

вания критерия минимума суммы условных вероятностей ошибок $p_{л.т}$ и $p_{п.с}$, $l_{\Pi} = 1$, а $\ln l_{\Pi} = 0$ и порог, с которым сравнивается корреляционный интеграл z , равен половине энергии ожидаемого сигнала. При использовании критерия Неймана–Пирсона пороговый уровень z_{Π} выбирается по заданному значению $p_{л.т}$.

Корреляционный интеграл z , характеризующий степень близости принятой реализации $y(t)$ и ожидаемого сигнала $s(t)$, может быть сформирован как отсчет на выходе фильтра, согласованного с сигналом $s(t)$, взятый в момент времени, соответствующий максимуму отношения сигнал/шум на выходе фильтра. Если этот момент соответствует окончанию интервала наблюдения $[0, T]$, то импульсная характеристика такого фильтра $h_{\text{СФ}}(t, \tau) = s(T-t)$, а комплексный коэффициент передачи $K_{\text{СФ}}(j\omega) = \tilde{s}^*(j\omega)e^{-j\omega T}$.

Сигнал на выходе согласованного фильтра может быть записан с помощью интеграла Дюамеля

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t s(\tau)h_{\text{СФ}}(t-\tau)d\tau = \int_0^t s(\tau)s(T-t+\tau)d\tau,$$

откуда видно, что если интервал наблюдения полностью охватывает ожидаемый сигнал, выходной сигнал СФ есть автокорреляционная функция ожидаемого сигнала, максимум которой соответствует моменту времени $t = T$. Этот

максимум $s_{\text{вых. max}} = \int_0^T s^2(t)dt$ численно равен энергии E обнаруживаемого

сигнала. Соответствие размерности обеспечивает не влияющий на отношение сигнал/шум коэффициент c .

Корреляционная функция помехи на выходе СФ будет равна

$$K_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |K_{\text{СФ}}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Поскольку в соответствии с обобщенным равенством Парсеваля и свойствами преобразования Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(j\omega) \tilde{s}^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(t - \tau) dt,$$

то $K_{\text{вых}}(\tau) = \frac{N_0}{2} K_s(\tau)$, где $K_s(\tau)$ – автокорреляционная функция сигнала $s(t)$, с которым согласован фильтр.

Дисперсия помехи на выходе СФ $D\{U_{\text{п. вых}}\} = K_{\text{вых}}(0) = \frac{N_0 E}{2}$. Максимально достижимое отношение сигнал/шум $q = \frac{s_{\text{вых. max}}}{\sqrt{D\{U_{\text{п. вых}}\}}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$.

Если используется коррелятор и сигнал, подаваемый на перемножитель в корреляторе, отличается от $s(t)$ или импульсная характеристика фильтра отличается от $s(T - t)$, но момент взятия отсчета на выходе фильтра по-прежнему $t = T$, то возникают потери в отношении сигнал/шум, которые можно оценить следующим образом.

Для корреляционного интеграла $z_0 = \int_0^T y(t) s_{\text{оп}}(t) dt$ при $s_{\text{оп}}(t) \neq s(t)$ от-

ношение сигнал/шум q_0 можно записать как $q_0 = \frac{\bar{z}_0}{\sqrt{D\{z_0\}}}$. При этом

$\bar{z}_0 = \int_0^T s(t) s_{\text{оп}}(t) dt$, а $D\{z_0\} = \frac{N_0 E_{\text{оп}}}{2}$. Тогда, умножив числитель и знаменатель

q_0 на $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$, можем записать $q_0 = q\rho_{s, s_{\text{оп}}}$, где $\rho_{s, s_{\text{оп}}} = \frac{\int_0^T s(t)s_{\text{оп}}(t)dt}{\sqrt{EE_{\text{оп}}}}$ – коэффициент корреляции ожидаемого сигнала и опорного колебания $s_{\text{оп}}(t)$, т. е. величина потерь q_0/q определяется коэффициентом взаимной корреляции $\rho_{s, s_{\text{оп}}}$.

Качественными показателями обнаружителей и различителей сигналов называют значения условных вероятностей ошибок (вероятности ложной тревоги $p_{\text{л.т}}$, вероятности пропуска сигнала $p_{\text{п.с}}$ при обнаружении сигнала и вероятности перепутывания сигналов p_{ij} для задачи различения сигналов). Зная эти вероятности, можно вычислить значения целевой функции для любого из рассмотренных критериев (средний риск, сумма условных вероятностей ошибок).

Для задачи обнаружения полностью известного сигнала $s(t)$ на фоне НБШ с СПМ $N_0/2$

$$p_{\text{л.т}} = 1 - \Phi(h), \quad p_{\text{п.с}} = \Phi(h - q),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ – интеграл вероятностей; h – нормированный относительно СКО шума порог; q – параметр обнаружения, численно равный отношению сигнал/шум на выходе СФ.

В справедливости этих выражений можно убедиться следующим образом. Величина z , сравниваемая с порогом $z_{\text{п}}$, при решении задачи обнаружения как результат линейного преобразования нормального белого шума подчиняется гауссовскому закону, среднее значение которого при отсутствии сигнала равно 0 и энергии сигнала E при его наличии. Дисперсия величины z не зависит от того, присутствует сигнал на входе или нет и как дисперсия на выходе СФ равна $N_0E/2$. Искомые вероятности $p_{\text{л.т}}$ и $p_{\text{п.с}}$ равны $p_{\text{л.т}} = \int_{z_{\text{п}}}^{\infty} W(z/H_0) dz$ и $p_{\text{п.с}} = \int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} W(z/H_0) dz$ соответственно. Выполняя интегрирование, приходим к записанным выше выражениям для $p_{\text{л.т}}$ и $p_{\text{п.с}}$.

Нормированный относительно СКО шума пороговый уровень и отношение сигнал/шум соответственно равны

$$h = z_{\Pi} \left(\sqrt{\frac{N_0 E}{2}} \right)^{-1}, \quad q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}.$$

Если обнаруживаемый сигнал представляет собой группу импульсов вида

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i(t),$$

то это должно учитываться как в структуре обнаружителя (фильтр должен быть согласован с группой), так и при расчете качественных показателей. При этом под энергией E следует понимать энергию группы

$$E = \int_0^T \left[\sum_{i=0}^{N-1} s_i(t) \right]^2 dt.$$

Если сигналы, входящие в группу, взаимно ортогональны, т. е. для любой пары сигналов $s_i(t)$ и $s_j(t)$ выполняется соотношение

$$\int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = 0,$$

$i \neq j$, то энергия группы сигналов равна сумме энергий сигналов, входящих в группу. В частности, для N взаимно ортогональных сигналов одинаковой энергии E_0 энергия группы равна $E = NE_0$ или $q = q_0 \sqrt{N}$. Это соотношение позволяет определить требуемое число сигналов при заданных q_0 , $p_{\text{л.т}}$ и $p_{\text{п.с}}$:

$$N_{\min} = \left[\frac{\Phi^{-1}(1 - p_{\text{л.т}}) - \Phi^{-1}(p_{\text{п.с}})}{q_0} \right]^2,$$

где $\Phi^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная интегралу вероятностей.

Как уже отмечалось, при различении M сигналов на основе критерия МАП решение в пользу k -го сигнала выносится при одновременном выполнении M неравенств

$$P(H_k/y) \geq P(H_i/y),$$

где $i = 0, 1, \dots, M-1$.

Если различитель оптимален по критерию МП, то решение принимается в пользу той гипотезы H_k , для которой ФП $W(y(t)/H_k)$ будет наибольшей.

В последнем случае различение на фоне АБГШ M сигналов, имеющих одинаковую энергию E , осуществляется на основе сравнения корреляционных интегралов

$$z_i = \int_0^T y(t)s_i(t)dt, \quad i = 0, 1, \dots, M-1.$$

Решение принимается в пользу той гипотезы (сигнала), которой соответствует наибольший корреляционный интеграл.

Вероятность ошибки при различении двух сигналов $s_0(t)$ и $s_1(t)$ с одинаковыми энергиями E равна

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right).$$

где $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$; $\rho = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t)s_1(t)dt$ – коэффициент корреляции различаемых сигналов, и достигает минимума при $\rho = -1$, что соответствует различению противоположных сигналов.

При различении M равнокоррелированных сигналов ($\rho_{ij} = \rho$, $i \neq j$) с одинаковой энергией E вероятность ошибки определяется выражением

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \Phi^{M-1}\left(x + q\sqrt{1-\rho}\right) dx$$

и достигает минимума для сим-
плексных сигналов, для которых $\rho = -\frac{1}{M-1}$.

При малых вероятностях ошибок $P_{\text{ош}} \rightarrow 0$, что достигается за счет увеличения $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$, справедливо приближенное выражение

$$P_{\text{ош}} \approx (M-1) \left[1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right) \right],$$

называемое аддитивной границей полной вероятности ошибки.

Для оценивания вектора параметров $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ качественными показателями будут вектор средних $\bar{\lambda} = [\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n]$ и корреляционная матрица $\mathbf{K}$, диагональные элементы которой определяют дисперсии оценки компонент вектора параметров $D\{\hat{\lambda}_i/\lambda\}$, а внедиагональные элементы – корреляционные связи между оценками компонент.

Оценки по методу максимального правдоподобия (ОМП) асимптотически несмещенные, асимптотически совместно эффективные и нормальные с корреляционной матрицей $\mathbf{K} = \mathbf{\Phi}^{-1}$, где $\mathbf{\Phi}^{-1}$ – матрица, обратная информационной матрице Фишера $\mathbf{\Phi}$, элементы которой

$$\Phi_{ik} = -\frac{\partial^2 \ln W(y(t)/\lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k}.$$

Предполагается, что логарифм ФП дважды дифференцируем по параметру. Это надо иметь в виду при определении точности измерения конкретных параметров сигналов.

Если помеха является АБГШ с двусторонней СПМ $N_0/2$, то ОМП $\hat{\lambda}$ находится в соответствии с правилом

$$z(\hat{\lambda}) - \frac{E(\hat{\lambda})}{2} = \max_{\lambda} \left[z(\lambda) - \frac{E(\lambda)}{2} \right] \quad \text{или} \quad \hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} \left[z(\lambda) - \frac{E(\lambda)}{2} \right],$$

где $z(\lambda) = \int_0^T y(t)s(t; \lambda)dt$; а $E(\lambda) = \int_0^T s^2(t; \lambda)dt$ – энергия сигнала.

Выражение для элементов матрицы Фишера при этом примет вид

$$\Phi_{ik} = -\frac{2}{N_0} \frac{\partial^2 \overline{z(\lambda)}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} + \frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 E(\lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k}.$$

При измерении неэнергетических параметров, для которых $E(\lambda) = E = \text{const}$, $\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} z(\lambda)$, т. е. ОМП соответствует максимуму корреляционного интеграла $z(\lambda)$, рассматриваемому при фиксированной реализации $y(t)$ как функция λ . В этом случае второе слагаемое в выражении для Φ_{ik} равно нулю ($E(\lambda) = \text{const}$), и после несложных преобразований

$$\Phi_{ik} = -q^2 \frac{\partial^2 \psi(\lambda_0, \lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} \Big|_{\lambda=\lambda_0},$$

где $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ – отношение сигнал/шум на выходе СФ, а функция

$\psi(\lambda_0, \lambda) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(t; \lambda_0)s(t; \lambda)dt$, введенная в первом разделе, называется

функцией неопределенности (ФН) сигнала. ФН сигнала $s(t; \lambda)$ по параметру λ

характеризует меру линейной связи (коэффициент корреляции) двух копий сигнала, имеющих различные значения параметра (λ_0 и λ).

Для ФН стационарного типа, зависящей от разности $\lambda - \lambda_0$, можно положить $\lambda_0 = 0$ и определить ее как

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} s(t; 0)s(t; \lambda)dt, \quad (2.9)$$

тогда элементы матрицы Фишера Φ определяются как

$$\Phi_{ik} = -q^2 \frac{\partial^2 \psi(\lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} \bigg|_{\lambda=0} \quad (2.10)$$

и для дисперсии МП оценки единственного неэнергетического параметра сигнала (фаза, частота для узкополосного сигнала; временной сдвиг, если сигнал не выходит за пределы интервала наблюдения $[0, T]$) можно записать

$$D\{\hat{\lambda}/\lambda\} \cong -\frac{1}{q^2 \psi''(0)}, \quad q \gg 1. \quad (2.11)$$

Ранее речь шла об обнаружении и различении полностью известных сигналов, а в задаче оценивания параметров оценке подлежали все неизвестные параметры. В тех случаях, когда сигналы содержат параметры $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$, не интересующие наблюдателя, которые можно рассматривать как случайные величины с ПВ $W(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, входящие в уже рассмотренные алгоритмы ФП $W[y(t)/H_i, \gamma]$ для задачи обнаружения и различения и $W[y(t)/\lambda, \gamma]$ для задачи оценивания могут быть усреднены по всем значениям неинформационного параметра γ .

Когда единственный неинформационный параметр – случайная начальная фаза сигнала ϕ , равномерно распределенная в интервале $[-\pi; \pi]$, т. е. $W(\phi) = 1/2\pi$, приходим к следующим результатам. Оптимальным правилом обнаружения радиосигнала $s(t) = S(t)\cos[\omega_0 t + \gamma(t) + \phi]$, где $S(t)$, ω_0 , $\gamma(t)$ – полностью известная огибающая, центральная частота и закон угловой модуляции соответственно, а ϕ – упомянутая ранее случайная начальная фаза, будет сравнение с порогом z_0 , зависящим от выбранного критерия оптимальности, статистики $Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Корреляционные интегралы z_1 и z_2 равны

$$z_{1,2} = \int_0^T y(t) S(t) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} [\omega_0 t + \gamma(t)] dt.$$

Способы реализации данного алгоритма будут рассмотрены во второй части учебного пособия. Здесь лишь отметим, что статистика Z может быть получена как отсчет огибающей в момент времени $t = T$ на выходе фильтра, согласованного с сигналом $s(t) = S(t) \cos[\omega_0 t + \gamma(t)]$. Вероятность ложной тревоги равна $p_{л.т} = \exp(-h^2/2)$, где h – нормированный относительно СКО шума на выходе СФ порог, $h = z_0 / \sqrt{N_0 E / 2}$.

Вероятность правильного обнаружения сигнала может быть определена в виде

$$p_{п.о} = 1 - p_{п.с} = Q(h, q),$$

где q – отношение сигнал/шум на выходе СФ; $Q(\cdot, \cdot)$ – табулированная Q -функция Маркума, определяемая выражением

$$Q(u, v) = \int_0^u t \exp\left(-\frac{t^2 + v^2}{2}\right) I_0(vt) dt,$$

$I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка (см. [14, с. 114]).

Из приведенных выражений можно определить пороговое отношение сигнал/шум $q_{\min}$, обеспечивающее обнаружение сигнала с требуемыми вероятностями $p_{л.т}$ и $p_{п.о}$:

$$q_{\min} = Q_2^{-1}(\sqrt{-2 \ln p_{л.т}}, p_{п.с}), p_{п.с} = 1 - p_{п.о},$$

где $Q_2^{-1}(\cdot, \cdot)$ – функция, обратная Q -функции по второму аргументу.

При обнаружении когерентного пакета (группы) импульсов $s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i S_0(t - iT_{\Pi}) \cos(\omega_0 t - \varphi)$ со случайной начальной фазой φ , равномерно

распределенной в интервале $[-\pi; \pi]$ решающая статистика остается такой же, как и для одиночного сигнала со случайной равномерно распределенной в интервале $[-\pi; \pi]$ начальной фазой с той лишь разницей, что теперь

$$z_1 = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_{1i}, \quad z_2 = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_{2i}, \quad \text{где} \quad z_{1i}, z_{2i} = \int_0^T y(t) S_0(t - iT_{\Pi}) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (\omega_0 t) dt. \quad \text{При}$$

определении параметра обнаружения $q = \sqrt{2E/N_0}$ под E нужно понимать энергию пачки импульсов, которая не зависит от начальной фазы.

При заданных верностях $p_{л.т}$ и $p_{п.о}$ и заданном q_0 минимальное число импульсов в пакете равно $N_{\min} = \frac{\left[Q_2^{-1}(\sqrt{-2 \ln p_{л.т}}, p_{п.о}) \right]^2}{q_0^2}$.

Для некогерентного пакета $s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i S_0(t - iT_{\Pi}) \cos(\omega_0 t - \varphi_i)$, где $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ – независимые между собой, равномерно распределенные в интервале $[-\pi; \pi]$ случайные начальные фазы, оптимальный алгоритм усложняется и состоит в сравнении с порогом ξ_{Π} решающей статистики $\xi = \sum_{i=0}^{N-1} \ln I_0 \left(\frac{2a_i Z_i}{N_0} \right)$.

Порог ξ_{Π} выбирается в зависимости от используемого критерия.

В наиболее типичном для практики случае прямоугольного пакета, в котором амплитуды a_i одинаковы, структура оптимального обнаружителя имеет вид, показанный на рис. 2.2.

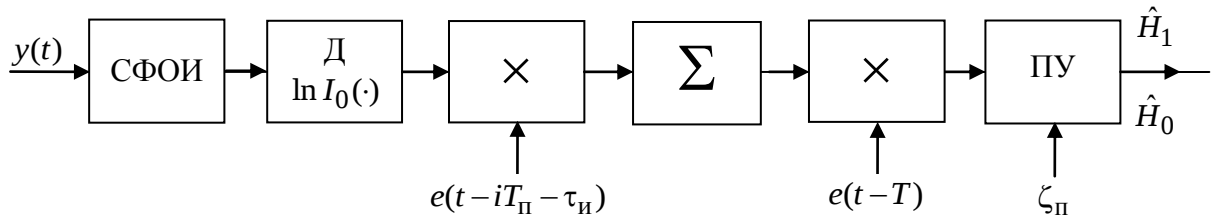


Рис. 2.2

Характерной ее особенностью является критичность к виду амплитудной характеристики детектора D , стоящего после фильтра, согласованного с одиночным импульсом (СФОИ), связанная с тем, что статистика, которая получилась бы на выходе сумматора при отклонении характеристики детектора от вида $\ln I_0(\cdot)$, не была бы взаимно однозначно связанной с ξ . Таким образом, в схеме рис. 2.2 оптимальный тип амплитудного детектора определен однозначно – это детектор с характеристикой $\ln I_0(2Z/N_0)$. Однако при слабых или сильных сигналах ($q_0 \ll 1$ или $q_0 \gg 1$) возможны упрощения, основанные на приближениях функции $\ln I_0(x) \approx x^2/4$ при $x \ll 1$ и $\ln I_0(x) \approx x$ при $x \gg 1$. При отсутствии сигнала (гипотеза H_0) $\overline{Z_i^2} = 2\sigma^2 = N_0 E$. Поэтому $\overline{(2Z_i/N_0)^2} = 2q_0^2$ и при

$q_0 \ll 1$ и аргумент выражения $\ln I_0(2Z_i/N_0)$ с большой вероятностью будет соответственно мал или велик по сравнению с единицей. Аналогичные выводы не трудно сделать и для случая истинности гипотезы H_1 . Это позволяет, опираясь на приведенные ранее приближения для $\ln I_0(\cdot)$, считать при $q_0 \ll 1$ оптимальным квадратичный детектор, а при $q_0 \gg 1$ – линейный.

Расчет качественных показателей некогерентного обнаружителя в общем случае – трудоемкая задача, поэтому ограничимся лишь указанными ранее ситуациями, когда $q_0 \ll 1$ и $q_0 \gg 1$.

При $q_0 \ll 1$ с порогом ζ_{Π} сравнивается сумма $\zeta = \sum_{i=0}^{N-1} u_{di}$, где u_{di} – от-

счеты на выходе квадратичного детектора. В этих условиях для получения представляющих практический интерес значений $p_{л.т}$ и $p_{п.с}$ необходимо накапливать большое число импульсов N . Тогда на основании центральной предельной теоремы величина ζ будет распределена по нормальному закону при обеих гипотезах. Можно показать, что при $q_0 \ll 1$ появление сигнала приводит лишь к изменению среднего значения ζ , не влияя на дисперсию. Обозначив среднее значение отсчетов при истинности H_0 и H_1 через $\bar{u}_{д.ш}$ и $\bar{u}_{д.с}$, а дисперсию через D_0 и учтя, что при $T_{\Pi} \geq \tau_{и}$ отсчеты u_{di} независимы, получим

$$W(\zeta/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ND_0}} \exp\left(-\frac{[\zeta - N\bar{u}_{д.ш}]^2}{2ND_0}\right);$$

$$W(\zeta/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ND_0}} \exp\left(-\frac{[\zeta - N\bar{u}_{д.с}]^2}{2ND_0}\right).$$

С учетом записанных выражений

$$p_{л.т} = \int_{\zeta_{\Pi}}^{\infty} W(\zeta/H_0) d\zeta = 1 - \Phi\left(\frac{\zeta_{\Pi} - N\bar{u}_{д.ш}}{\sqrt{ND_0}}\right);$$

$$p_{п.с} = \int_{-\infty}^{\zeta_{\Pi}} W(\zeta/H_1) d\zeta = \Phi\left(\frac{\zeta_{\Pi} - N\bar{u}_{д.с}}{\sqrt{ND_0}}\right).$$

Введя нормированный порог $h = \frac{\zeta_{\Pi} - N\bar{u}_{д.ш}}{\sqrt{ND_0}}$, окончательно получим

$$p_{л.т} = 1 - \Phi(h), \quad p_{п.с} = \Phi\left(h - \sqrt{N}q_{д0}\right),$$

где величину $q_{д0} = \frac{(\bar{u}_{д.с} - \bar{u}_{д.ш})}{\sqrt{D_0}}$ можно считать отношением сигнал/шум на

выходе детектора. Сравнение этих результатов с аналогичными для когерентного пакета показывает, что для получения одинаковой верности обнаружения когерентного и некогерентного пакетов должно выполняться условие

$$\sqrt{N_{нк}}q_{д0} = \sqrt{N_{к}}q_0,$$

где $N_{к}$, $N_{нк}$ – число импульсов, которые необходимо обработать в когерентном и некогерентном случаях. Если учесть, что для слабых сигналов $q_{д0} \approx q_0^2/2$, то проигрыш во времени $T = NT_{п}$ при обнаружении некогерентного пакета составит $4/q_0^2$ раз. Так, например, если $q_0 = 0,1$, то на обнаружение некогерентного пакета придется потратить в 400 раз больше времени, чем для когерентного. Это означает, что некогерентная обработка слабых сигналов практически лишена смысла; квалифицированный разработчик в условиях, когда имеет место режим слабого сигнала (космическая связь, локационные и навигационные системы со сложными сигналами и др.), должен обеспечить возможность когерентного приема пакета.

В случае $q_0 \gg 1$ ситуация в корне меняется. При неограниченном росте q_0 требуемые $p_{л.т}$ и $p_{п.с}$ можно обеспечить, обрабатывая лишь один импульс. При этом потери за счет незнания его фазы, как выяснено ранее, невелики. Таким образом, некогерентная обработка сильных сигналов почти столь же эффективна, как и когерентная.

При обнаружении сигнала, содержащего два неинформационных параметра, случайную начальную фазу φ , распределенную, как и раньше, равномерно в интервале $[-\pi; \pi]$, и случайную амплитуду A , подчиняющуюся распределению $W(A)$, оптимальный алгоритм не зависит от $W(A)$ и совпадает с алгоритмом обнаружения сигнала со случайной начальной фазой и известной амплитудой. Случайные величины φ и A считаются независимыми.

Если флуктуации амплитуды A подчиняются закону Рэлея

$$W(A) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), & A \geq 0; \\ 0, & A < 0, \end{cases}$$

то качественные показатели $p_{л.т}$ и $p_{п.с}$ равны

$$p_{л.т} = \exp(-h^2/2), \quad p_{п.с} = 1 - \exp\left(-\frac{h^2}{2(1+q^2/2)}\right),$$

где пороговый уровень h и отношение сигнал/шум q определяются выражениями

$$h = z_0 / \sqrt{N_0 E_0 / 2}, \quad q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}.$$

При этом средняя энергия сигнала E связана с энергией сигнала E_0 при $A = 1$ соотношением $E = \overline{A^2} E_0$.

Средний квадрат амплитуды равен

$$\overline{A^2} = \int_0^\infty \frac{A^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) dA = 2\sigma^2.$$

При различении равновероятных сигналов энергии E со случайными, независимыми и равномерно распределенными в интервале $[-\pi; \pi]$ начальными фазами оптимальный алгоритм состоит в сравнении между собой статистик Z_i , определяющих алгоритм обнаружения сигнала со случайной начальной фазой, и принятии решения в пользу того сигнала, для которого эта статистика окажется наибольшей.

Для ансамбля M сигналов, ортогональных в усиленном смысле (при любых значениях начальных фаз) и образующих для данной модели оптимальную совокупность сигналов, может быть записана оценка для вероятности ошибки

$$P_{ош} \approx \frac{M-1}{2} \exp\left(-\frac{q^2}{4}\right),$$

где $q = \sqrt{2E/N_0}$.

Посмотрим, как изменятся результаты, связанные с оценкой параметров сигнала, при наличии у сигнала случайной равномерно распределенной в интервале $[-\pi; \pi]$ начальной фазы.

Усредненная по φ функция правдоподобия параметра λ будет равна

$$W[y(t)/\lambda] = c_y I_0 \left[\frac{2Z(\lambda)}{N_0} \right] \exp\left[-\frac{E(\lambda)}{N_0}\right],$$

где $Z(\lambda) = |\dot{z}(\lambda)|$ – модуль корреляционного интеграла, $\dot{z}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{y}(t) \dot{s}^*(t, \lambda) dt$.

Аналитические сигналы $\dot{y}(t)$ и $\dot{s}(t, \lambda)$ соответствуют принятой реализации $y(t)$ и сигналу $s(t, \lambda) = \text{Re}[\dot{S}(t, \lambda) \exp(j\omega_0 t)]$ с комплексной огибающей $\dot{S}(t, \lambda)$. Соответственно, МП-оценка параметра λ находится из условия

$$\max_{\lambda} \left\{ \ln I_0 \left[\frac{2Z(\lambda)}{N_0} \right] - \frac{E(\lambda)}{N_0} \right\},$$

а для неэнергетического параметра $\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} Z(\lambda)$ в силу монотонного характера функции $\ln I_0(x)$ при $x \geq 0$.

В условиях высокоточных измерений ($q \gg 1$) элементы матрицы Фишера

$$\Phi_{ik} \cong -\frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} \left[\frac{2\overline{Z(\lambda)}}{N_0} \right], \quad \overline{Z(\lambda)} \cong E\Psi(\lambda_0, \lambda),$$

где

$$\Psi(\lambda_0, \lambda) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t, \lambda_0) \dot{S}^*(t, \lambda) dt \right|$$

– функция неопределенности сигнала со случайной начальной фазой по параметру λ .

Для ФН стационарного типа $\Psi(\lambda, \lambda_0) = \Psi(\lambda - \lambda_0)$ (см. ранее) и при $\lambda_0 = 0$

$$\Psi(\lambda_0, \lambda) = \Psi(\lambda) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}^*(t, 0) \dot{S}(t, \lambda) dt \right|.$$

Для одного измеряемого параметра λ у сигнала со случайной начальной фазой дисперсия МП оценки

$$D\{\hat{\lambda}/\lambda\} \cong -\frac{1}{q^2 \Psi''(0)}, \quad q \gg 1. \quad (2.12)$$

Применение полученных формул к задаче оценивания конкретных параметров сигнала дает следующие результаты.

Оценка амплитуды A сигнала $s(t) = As_0(t)$, где $s_0(t)$ – сигнал, имеющий

единичную энергию $E_0 = \int_0^T s_0^2(t) dt = 1$.

МП-оценка $\hat{A}$ амплитуды $\hat{A} = z$, где $z = \int_0^T y(t)s(t)dt$. Если $E_0 \neq 1$, то $\hat{A} = z/E_0$.

Дисперсия относительной ошибки $\frac{\hat{A} - A}{A}$, где A – фактическое (истинное) значение амплитуды, равна $\left[q^2(A)\right]^{-1}$, где $q^2(A) = \frac{2A^2E_0}{N_0}$.

Совместная оценка амплитуды A и фазы ϕ сигнала $s(t) = AS(t) \cos[\omega_0 t + \gamma(t) + \phi]$, где $S(t)$, ω_0 , $\gamma(t)$ – полностью известная огибающая, центральная частота и закон угловой модуляции, соответственно.

МП-оценки $\hat{A}$ и $\hat{\phi}$ будут равны соответственно

$$\hat{A} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{E_0}, \quad \hat{\phi} = \arctg \frac{z_2}{z_1} + \pi \frac{\text{sign } z_1 - 1}{2},$$

где $z_1, z_2 = \int_0^T y(t)S(t) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} [\omega_0 t + \gamma(t)] dt$; E_0 – энергия сигнала при единичной амплитуде. Второе слагаемое в выражении для $\hat{\phi}$ обусловлено тем, что значения арктангенса лежат в пределах $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, тогда как интервал распределения фазы $[-\pi; \pi]$.

Матрица Фишера для данной задачи имеет вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2E_0/N_0 & 0 \\ 0 & 2A^2E_0/N_0 \end{bmatrix},$$

откуда условные дисперсии оценок $\hat{A}$ и $\hat{\phi}$ равны

$$D\{\hat{A}/A, \phi\} = \frac{N_0}{2E_0} = \frac{1}{q_0^2}; \quad D\{\hat{\phi}/A, \phi\} = \frac{N_0}{2A^2E_0} = \frac{1}{q^2(A)}, \quad q \gg 1.$$

Таким образом, дисперсия оценки амплитуды определяется отношением сигнал/шум на выходе СФ для сигнала с единичной амплитудой, а дисперсия оценки фазы – фактическим отношением сигнал/шум. Оценки $\hat{A}$ и $\hat{\phi}$ некоррелированы, а в силу асимптотической нормальности и независимы.

Оценка времени запаздывания сигнала. Считаем, что время запаздывания τ является единственным информационным параметром сигнала $s(t; \lambda) = s(t - \tau)$.

ОМП параметра τ есть $\hat{\tau} = \arg \max_{\tau} z(\tau)$, где $z(\tau) = \int_0^T y(t)s(t - \tau)dt$. Ее можно получить, фиксируя положение наибольшего значения на выходе фильтра, согласованного с сигналом $s(t)$, с учетом постоянной поправки τ_c , равной длительности сигнала, т. е., $\hat{\tau} = \tau_{\max} - \tau_c$.

Пользуясь (2.9), (2.10), можно получить выражения для дисперсии ОМП параметра τ при известных остальных параметрах сигнала:

$$D\{\hat{\tau}/\tau\} \cong \frac{N_0}{2 \int_{-\infty}^{\infty} [s'(t)]^2 dt} = \frac{N_0}{2E} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} [s'(t)]^2 dt} \right] =$$

$$= \frac{N_0}{2E} \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(f)|^2 df}{(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |\tilde{s}(f)|^2 df} \right] = \frac{1}{(2\pi f_{\text{СК}})^2 q^2}, \quad q \gg 1, \quad (2.13)$$

где $f_{\text{СК}}$ называется среднеквадратической частотой спектра сигнала $s(t)$ и

$$\text{определяется как } f_{\text{СК}}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |\tilde{s}(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(f)|^2 df}, \text{ см. разд. 1.}$$

В формуле (2.13) второе выражение для $D\{\hat{\tau}/\tau\}$ показывает, что точность измерения временного положения сигнала зависит от отношения сигнал/шум на выходе СФ и энергии производной сигнала $s'(t)$, отнесенной к энергии сигнала, т. е. для быстроменяющихся сигналов точность измерения при одних и тех же значениях q будет выше. Третье и четвертое выражения в (2.13) позволяют связать точность измерения времени запаздывания τ с параметром спектра $f_{\text{СК}}$, который характеризует ширину спектра сигнала и его положение на оси частот. Соотношение для $f_{\text{СК}}^2$ можно записать в форме

$f_{\text{ск}}^2 = \Delta f^2 + f_0^2$, где Δf – среднеквадратическая ширина спектра; f_0 – центральная частота спектра сигнала, равная нулю для видеосигнала и

$$\frac{\int_0^\infty f |\tilde{s}(f)|^2 df}{\int_0^\infty |\tilde{s}(f)|^2 df} \quad \text{для радиосигнала. Для узкополосных радиосигналов}$$

$\Delta f^2 \ll f_0^2$ и выражение для дисперсии оценки временного положения сигнала принимает вид

$$D\{\hat{\tau}/\tau\} \cong \frac{1}{(2\pi f_0)^2 q^2}, \quad q \gg 1.$$

При измерении временного положения сигнала со случайной начальной фазой φ , $W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, дисперсия оценки τ определяется (2.12), что дает

$$D\{\hat{\tau}/\tau\} \cong \frac{1}{(2\pi \Delta F)^2 q^2}, \quad q \gg 1, \quad (2.14)$$

где $\Delta F = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |\tilde{S}(f)|^2 df / \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{S}(f)|^2 df \right]^{1/2}$ – среднеквадратическая (эффективная) ширина спектра комплексной огибающей $\dot{S}(t)$ сигнала $s(t, \varphi)$.

Учитывая, что для узкополосного радиосигнала спектр комплексной огибающей есть удвоенная часть спектра, расположенного вокруг центральной частоты f_0 , смещенная в начало координат, можно утверждать, что точность ОМП запаздывания сигнала со случайной фазой можно повысить и не прибегая к увеличению энергии сигнала, так как расширение спектра также уменьшает условную дисперсию ОМП. Тривиальным способом увеличения ΔF является укорочение сигнала, т. е. уменьшение его длительности τ_c . При этом, однако, для сохранения постоянства энергии, т. е. значения q , необходимо одновременно поднимать пиковую мощность сигнала, что на практике не всегда возможно в силу ограниченности мощности передатчиков. К счастью, спектр сигнала можно расширить и при фиксированной длительности τ_c . Для этого требуется только осуществить соответствующую модуляцию

сигнала в пределах длительности τ_c . При правильно выбранном законе модуляции ширина спектра ΔF определяется параметрами этого закона, а не длительностью τ_c . При этом выполняется соотношение $\Delta F \tau_c \gg 1$. Напомним, что сигналы, удовлетворяющие этому неравенству, называют сложными (широкополосными, шумоподобными) в отличие от простых, для которых база (произведение $\Delta F \tau_c$) близка к единице.

Механизм роста потенциальной точности оценки τ с расширением спектра сигнала состоит в следующем: с ростом ΔF огибающая сигнала после СФ «обостряется», и ее пик флюктуирует по времени под воздействием шума того же уровня в меньших пределах. Подчеркнем очевидную, но важную деталь: точность оценки τ сигнала со случайной начальной фазой не зависит от номинала f_0 , поскольку за ОМП принимают временное положение максимума огибающей радиосигнала (а не его высокочастотного заполнения) на выходе СФ.

Оценка частоты. При оценивании доплеровского сдвига частоты F для сигнала со случайной начальной фазой $s(t; F; \varphi) = \text{Re}\{\dot{S}(t) \times \exp(j\varphi) \exp[j2\pi(f_0 + F)t]\}$ дисперсия ОМП в соответствии с (2.12) будет равна

$$D\{\hat{F}/F\} \cong \frac{1}{(2\pi\Delta t_{\text{СК}})^2 q^2}, \quad q \gg 1, \quad (2.15)$$

где $\Delta t_{\text{СК}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |\dot{S}(t)|^2 dt \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt \right]^{1/2}$ – среднеквадратическая длительность сигнала.

В выражении для $\Delta t_{\text{СК}}$ параметр $t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t |\dot{S}(t)|^2 dt \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt$ – абсцисса центра тяжести фигуры, ограниченной осью t и кривой $|\dot{S}(t)|^2$, – характеризует положение огибающей $S(t) = |\dot{S}(t)|$ на оси t .

Физика роста точности ОМП $\hat{F}$ с увеличением $\Delta t_{\text{СК}}$ очевидна: оценить отличие частоты от номинального значения можно по набегу фазы $\Delta\varphi$ несущей наблюдаемого колебания относительно гармонической опоры частоты

f_0 . За эффективную длительность сигнала значение набега составит $\Delta\varphi = 2\pi F \Delta t_{\text{СК}}$, и поэтому оценить F можно делением ОМП значения $\Delta\varphi$ на $2\pi \Delta t_{\text{СК}}$ в силу инвариантности ОМП относительно замены переменных. Поскольку дисперсия $\Delta\hat{f}$ имеет порядок $1/q^2$, то дисперсия $\hat{F}$ оказывается равной правой части (2.15).

Из приведенных рассуждений понятно, что и для полностью известного сигнала (за исключением оцениваемого частотного сдвига F) получится аналогичное выражение для $D\{\hat{F}/F\}$. Ведь измерение частоты связано с оценкой набега фазы $\Delta\varphi = 2\pi F \Delta t_{\text{СК}}$, которая определяется как разность фаз в конце и начале сигнала с учетом набега фазы $\Delta\varphi_0 = 2\pi f_0 \Delta t_{\text{СК}}$ за счет известной центральной частоты f_0 . При этом случайная, но постоянная за время $\Delta t_{\text{СК}}$ фаза φ исключается.

Интересно отметить дуальность временных и спектральных характеристик при измерениях τ и F . Если при $q = \text{const}$ точность оценки времени запаздывания определяется шириной спектра, т. е. «протяженностью» сигнала в частотной области, то дисперсия ОМП частоты зависит только от протяженности сигнала во временной области. Если при оценивании τ или F производится N независимых измерений в одинаковых условиях, то дисперсия оценки уменьшается в N раз.

Совместная оценка времени запаздывания и частоты. Пусть у сигнала $s(t; \lambda; \varphi) = \text{Re}\{\dot{S}(t, \lambda) \exp(j2\pi f_0 t + \varphi)\}$ вектор измеряемых параметров λ имеет вид $\lambda = [\tau, F]^T$, т. е.

$$s(t; \tau, F, \varphi) = \text{Re}\{\dot{S}(t - \tau) \exp(j\varphi) \exp[j2\pi(f_0 + F)t]\}.$$

В этом случае матрица Φ^{-1} имеет вид (см. [1, с. 139])

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{(2\pi \Delta F \Delta t_{\text{СК}})^2 (1 - \rho_{tf}^2) q^2} \begin{bmatrix} \Delta t_{\text{СК}}^2 & \rho \Delta F \Delta t_{\text{СК}} \\ \rho \Delta F \Delta t_{\text{СК}} & \Delta F^2 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

где $\rho_{tf} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t F_0(t) S^2(t) dt \right] / \left[\Delta F \Delta t_{\text{СК}} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt \right]$ – коэффициент частотно-временной связи; $F_0(t) = d\gamma(t)/2\pi dt$ – мгновенное отклонение частоты сигнала от f_0 ; $\gamma(t)$ – закон угловой модуляции сигнала.

Таким образом, условные дисперсии совместных ОМП τ и F в асимптотическом приближении равны соответственно:

$$D\{\hat{\tau}/\tau, F\} \cong \frac{1}{(2\pi\Delta F)^2 (1 - \rho_{tf}^2) q^2}, \quad q \gg 1; \quad (2.17)$$

$$D\{\hat{F}/\tau, F\} \cong \frac{1}{(2\pi\Delta t_{\text{ск}})^2 (1 - \rho_{tf}^2) q^2}, \quad q \gg 1. \quad (2.18)$$

Поскольку матрица Φ^{-1} является корреляционной матрицей асимптотически совместно нормальных ОМП $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$, то из (2.16) следует, что коэффициент частотно-временной связи есть не что иное, как коэффициент корреляции случайных величин $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$ при $q \gg 1$. Кроме того, результаты (2.17) и (2.18) показывают, что при прочих равных условиях точность совместной оценки τ и F выше в том случае, когда $\rho_{tf} = 0$, т. е. $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$ не коррелированы. При этом выражения (2.17) и (2.14), как и (2.18) и (2.15), совпадают, откуда следует, что при отсутствии частотно-временной связи точность ОМП одного из параметров τ и F не зависит от того, известен ли другой или оценивается наряду с первым. Подчеркнем, что для любых сигналов без ЧМ, а также для сигналов с симметричной ЧМ $\rho_{tf} = 0$. Для сигналов названных типов дисперсии ОМП τ и F при совместных и отдельных измерениях времени запаздывания и частоты одинаковы. При этом ФН

$$\Psi(\tau, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) \exp(-j2\pi Ft) dt \right|, \quad (2.19)$$

как уже отмечалось, называют частотно-временной. Само название «функция неопределенности», введенное Ф. Вудвордом, первоначально было закреплено за функцией (2.19) и лишь впоследствии, по мере разработки общей теории оценок, распространено на параметры любой природы. Очевидно, геометрически ФН (2.19) описывает некую поверхность над плоскостью (τ, F) , причем ее максимум, равный единице, находится в точке $\tau = 0, F = 0$ ($\Psi(\tau, F) \leq \Psi(0, 0) = 1$).

Чтобы лучше уяснить смысл требований к ФН (2.19), вытекающих из стремления к высокой точности оценок τ и F , обратимся к схеме измерителя времени запаздывания и частоты, изображенной на рис. 2.3, в соответствии с существом метода МП.

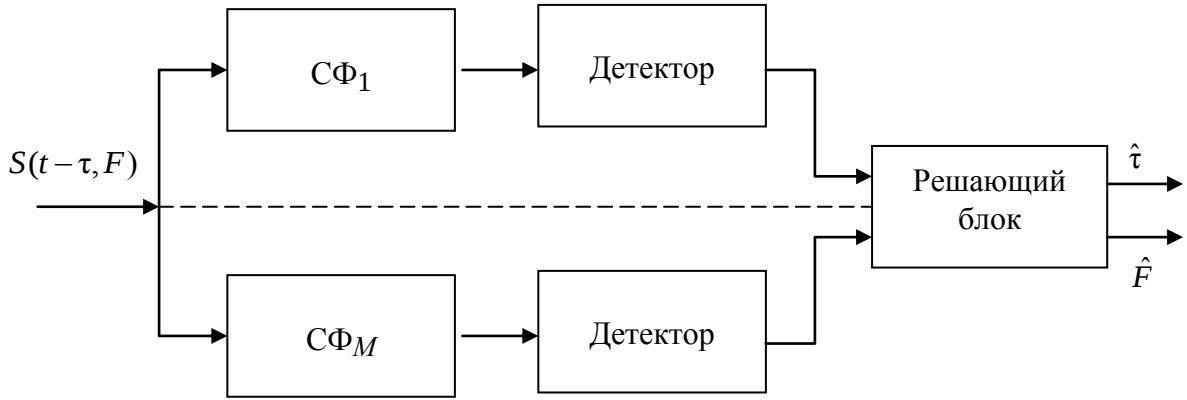


Рис. 2.3

Схема состоит из набора фильтров СФ k , согласованных с сигналами $\text{Re}\{\dot{S}(t)\exp[j2\pi(f_0 + k\Delta F)]\}$, где k – номер канала; $k = 1, \dots, M$; ΔF – частотная расстройка каналов, причем полоса частот $M\Delta F$ охватывает все возможные значения оцениваемой частоты F . Выходные сигналы СФ поступают на детекторы огибающей, после чего в решающем блоке определяется номер канала $\hat{k}$, в котором огибающая достигла наибольшего значения и фиксируется временное положение этого максимума $\hat{\tau}$ с поправкой на длительности сигнала τ_c . Оценка частотного сдвига $\hat{F} = \hat{k}\Delta F$. Число каналов M выбирается из условий требуемой точности замены непрерывной оценки F дискретной.

Пусть на вход этой схемы подан сигнал с нулевыми значениями времени запаздывания и частотной расстройки. Тогда при отсутствии шума на входе измерителя выходной сигнал детектора огибающей с линейной характеристикой для i -го канала в момент времени $t = \tau + \tau_c$ будет равен

$$\left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) \exp(-j2\pi F_i t) dt \right| = E\Psi(\tau, F_i).$$

Таким образом, огибающая после i -го СФ воспроизводит по форме ФН $\Psi(\tau, F_i)$ как функцию τ при фиксированной расстройке F_i . Но поскольку F_i меняется от канала к каналу, рассматриваемые в совокупности выходы всех детекторов схемы на рис. 2.3 одновременно воспроизводят все сечения ФН (2.19) плоскостями $F = F_i$, $i = 1, 2, \dots, M$. В идеале частотная расстройка между соседними каналами должна быть бесконечно малой. Тогда выходы всех детекторов в точности воспроизвели бы ФН (2.19), если одну координату τ

рассматривать как реальное время t (с вычитанием τ_c), а другую – F – как частотную расстройку СФ от номинала f_0 .

Следовательно, для достижения высокой точности совместного измерения τ и F необходимо иметь достаточно острый пик ФН (2.19) в точке $\tau = 0$, $F = 0$. Действительно, появление шума на входе системы приведет к искажению воспроизводимой ею поверхности по сравнению с ФН $\Psi(\tau, F)$ и, как следствие, к отклонениям координат ее максимума $\hat{\tau}$, $\hat{F}$ от значений $\tau = 0$, $F = 0$. При одном и том же довольно слабом шуме колебания поверхности по вертикали вызовут тем меньшие флуктуации координат максимума, чем острее пик ФН (2.19) в точке $\tau = 0$, $F = 0$. Следует отметить, что наличие у ФН побочных максимумов (боковых лепестков) увеличивает риск аномальных ошибок. Если у ФН есть боковые лепестки, их «легче» поднять до уровня главного (расположенного в точке $\tau = 0$, $F = 0$), так как для этого потребуются шумовые выбросы меньшей интенсивности, чем при равенстве ФН нулю вне пределов зоны главного максимума.

Сформулированные требования к виду ФН аналогичны требованиям, которые будут изложены в 2.2 при изучении разрешающей способности РТС.

2.2. Разрешающая способность РТС

Разрешающей способностью (разрешающей силой) принято называть способность приборов различать близкие в пространстве, во времени или по физическим свойствам объекты или процессы. Это понятие, изначально введенное Рэлеем применительно к оптическим приборам, продолжает широко использоваться в оптике, радиоастрономии, радиотехнических приложениях.

С точки зрения теории радиосистем задача разрешения сводится к возможности раздельного наблюдения и обработки сигналов, отличающихся друг от друга значением параметра $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M]$, в состав которого могут входить, например, время запаздывания, сдвиг по частоте, направление прихода, поляризация. Переформулируя классическое детерминистическое определение применительно к радиотехнике, получим следующее: разрешающая способность радиоэлектронного прибора есть способность давать такой суммарный отклик на суперпозицию двух отличающихся значениями параметра λ сигналов, в котором просматриваются два максимума, соответствующих отдельным сигналам. Мерой разрешающей способности при этом

может служить минимальная разница значений λ накладываемых сигналов, при которой указанные два максимума еще не воспринимаются как один.

Однако для радиосистем извлечения и обработки информации характерно наблюдение сигналов на фоне шумов. Учитывая, что основным методом описания помех являются вероятностные законы, весьма конструктивным оказывается статистический подход к решению задачи разрешения сигналов. Конкретизируя понятия «извлечение информации», «обработка сигнала», можно видеть, что задача разрешения представляется в виде решаемых отдельно или совместно процедур обнаружения, различения, измерения параметров сигналов.

Статистическая интерпретация разрешения по параметру λ позволяет определить его как обнаружение, различение либо измерение параметров полезного сигнала в условиях совокупного мешающего воздействия флуктуационных шумов и помех в виде суперпозиции копий полезного сигнала, отличающихся от последнего значениями λ . Термин «разрешающая способность» при этом означает способность к выполнению соответствующей функции (обнаружения, различения, измерения параметров) в присутствии помех названной природы. Статистическое толкование разрешающей способности учитывает конечные цели обработки наблюдений в РТС и обычно более содержательно, чем заимствованное из классической оптики детерминистическое.

Несмотря на принципиальные различия статистического и детерминистического подходов к проблеме разрешения, практические выводы, получаемые на их основе, нередко совпадают. Многочисленные примеры, известные из литературных источников, свидетельствуют, что качество разрешения находится в сильной зависимости от одной и той же характеристики сигнала – функции неопределенности по параметру λ , которая была введена выше:

$$\Psi(\lambda, \lambda_M) = |\dot{\psi}(\lambda, \lambda_M)| = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t; \lambda) S^*(t; \lambda_M) dt \right|,$$

где λ и λ_M – значения параметра информационного и мешающего сигналов, соответственно; $\dot{S}(t; \lambda)$ – комплексная огибающая. Напомним, что при стационарной ФН можно положить $\lambda_M = 0$, тогда величина ФН $\Psi(\lambda)$ будет характеризовать качество разрешения двух сигналов, значения неэнергетического параметра которых отличаются на λ .

Основной вывод, к которому приводит анализ рассматриваемой задачи, состоит в том, что показатели различения сигналов по параметру λ тем выше, чем ниже уровень ФН $\Psi(\lambda)$ по сравнению с максимальным значением ФН $\Psi(0)=1$.

Остановимся на важнейших частных случаях.

Разрешение по времени запаздывания. Пусть скалярным параметром, по которому необходимо разрешать сигналы, служит время запаздывания. Качество разрешения двух копий сигнала:

$$s(t; \tau_1; \varphi_1) = \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t - \tau_1) \exp(j2\pi f_0 t) \exp(j\varphi_1) \right];$$

$$s(t; \tau_2; \varphi_2) = \operatorname{Re} \left[\dot{S}(t - \tau_2) \exp(j2\pi f_0 t) \exp(j\varphi_2) \right],$$

со временем запаздывания друг относительно друга $\tau = \tau_1 - \tau_2$ и случайными начальными фазами φ_i , $i = 1, 2$ определяется уровнем ФН. Такая ФН стационарна, имеет вид

$$\Psi(\tau) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt \right|$$

и представляет собой не что иное, как модуль нормированной корреляционной функции комплексной огибающей

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) dt. \quad (2.20)$$

Следовательно, две копии сигнала, отличающиеся временем запаздывания на τ , разрешаются тем успешнее, чем меньше уровень корреляционной функции комплексной огибающей при данном τ .

В качестве меры разрешающей способности по τ можно принять то минимальное расхождение $\tau_{\min}$ времен запаздывания двух копий сигнала, начиная с которого последние разрешаются удовлетворительно, причем в рамках статистического подхода требуемое качество разрешения понимается в смысле соответствия тех или иных статистических показателей (вероятностей ошибок при разрешении-обнаружении, дисперсий оценок при разрешении-измерении) предъявленным требованиям. Чем меньше $\tau_{\min}$, тем более высокой следует признать разрешающую способность по времени запаздывания. Таким образом, чем более сконцентрирована корреляционная функция в окрестности $\tau = 0$, тем выше разрешающая способность, т. е. хорошо раз-

решаются по времени запаздывания лишь сигналы, обладающие достаточно «короткими» корреляционными функциями. При этом следует отметить, что полная длительность автокорреляционной функции сигнала протяженности τ_c равна $2\tau_c$, т. е. речь идет о длительности так называемого главного (центрального) пика ФН по τ при условии достижения функцией $\Psi(\tau)$ пренебрежимо малого уровня за пределами этого пика.

Достичь того, чтобы длительность ФН или, что эквивалентно, длительность τ_k корреляционной функции комплексной огибающей была меньше $\tau_{\min}$, можно простым способом: для всякого импульсного сигнала, длительность которого $\tau_c \leq \tau_{\min}$, протяженность АКФ $\tau_k \leq \tau_{\min}$. Однако при уменьшении длительности τ_c сигнала без изменения его мощности $P_c(t)$

уменьшается и энергия $E = \int_0^{\tau_c} P_c(t)dt$, от отношения которой к СПМ белого

шума зависят статистические характеристики соответствующих процедур извлечения информации. Следовательно, чтобы уменьшение энергии E не снижало положительного эффекта укорочения ФН, нужно, уменьшая τ_c , пропорционально увеличивать мощность сигнала $P_c(t)$. Возможности такого увеличения на практике далеко не беспредельны.

Перечисленные причины побуждают к поискам таких сигналов, которые позволяли бы иметь хорошее качество разрешения по времени запаздывания при больших собственных длительностях $\tau_c \gg \tau_{\min}$, т. е. обладали бы более узкой корреляционной функцией, чем сам сигнал: $\tau_k \ll \tau_c$. Если сигнал с таким свойством поступает на согласованный с ним фильтр, то длительность основной части реакции последнего (главный лепесток) оказывается значительно меньше τ_c , т. е. происходит сжатие сигнала в СФ.

Для сигналов, названных ранее простыми, т. е. имеющих частотно-временное произведение порядка единицы, протяженность АКФ τ_k не может быть заметно меньше длительности импульса τ_c . Следовательно, чтобы соблюсти условие $\tau_k \ll \tau_c$, необходимо «усложнить» комплексную огибающую $\dot{S}(t)$, промодулировав в пределах длительности сигнала его фазу или частоту. Введению такой модуляции и сопровождающему эффекту укорочения корреляционной функции будет неизбежно сопутствовать значительное

расширение спектра сигнала. Действительно, спектр сигнала на выходе СФ $\tilde{s}_{\text{СФ}}(f)$ будет тем шире, чем короче сам выходной сигнал фильтра, что можно выразить соотношением $\Delta f_{\text{СФ}} \approx \tau_{\text{к}}^{-1}$, где $\Delta f_{\text{СФ}}$ – ширина спектра $\tilde{s}_{\text{СФ}}(f)$. Ввиду того что передаточная функция СФ $K_{\text{СФ}}(j\omega) = \tilde{s}^*(\omega)e^{-j\omega\tau_{\text{с}}}$, амплитудно-частотный спектр $|\tilde{s}_{\text{СФ}}(f)|$ сигнала на выходе СФ повторяет по форме энергетический спектр $|\tilde{s}_{\text{СФ}}(f)|^2$ входного сигнала, так что ширина спектра $\Delta f_{\text{с}}$ последнего совпадает с $\Delta f_{\text{СФ}}$: $\Delta f_{\text{с}} \approx \Delta f_{\text{СФ}} \approx 1/\tau_{\text{к}}$. В результате приходим к следующему выводу: для того чтобы сигнал обладал свойством сжатия в СФ, $\tau_{\text{к}} \ll \tau_{\text{с}}$, ширина его спектра должна удовлетворять неравенству $\Delta f_{\text{с}} \approx \Delta f_{\text{СФ}} \gg 1/\tau_{\text{с}}$. Иными словами, для любых сигналов, поддающихся сжатию в СФ, база B , определяемая как произведение ширины спектра на длительность, должна быть большой:

$$B = \Delta f_{\text{с}} \tau_{\text{с}} \gg 1.$$

Сигналы с большими базами (как это уже отмечалось) называют сложными (шумоподобными либо широкополосными). Последний термин не следует рассматривать как антоним понятия «узкополосный», предполагающего $\Delta f_{\text{с}} \ll f_0$.

Говоря о сложных сигналах, необходимо отметить, что сжатие их происходит в СФ, т. е. одновременно с обработкой, максимизирующей выходное отношение сигнал/шум. С помощью специально подобранного фильтра можно «укоротить» любой сигнал, однако для простых сигналов это достигается ценой больших потерь в выходном отношении сигнал/шум по сравнению с согласованной фильтрацией. В то же время нередки случаи, когда помехи в виде запаздывающих или опережающих копий сигнала представляют гораздо большую опасность, чем флюктуационные шумы. Тогда приходится заведомо соглашаться на определенные потери в отношении сигнал/шум, применяя вместо согласованных фильтры, обеспечивающие более высокую степень сжатия сигнала (см. [3, с. 244–252]).

В ряде случаев сигналы, интерферирующие на входе приемника, отраженные различными целями, отличаются друг от друга не только временем запаздывания, но и доплеровскими сдвигами спектра. При этом приходится говорить о разрешении сигналов по времени запаздывания τ и по частоте F , т. е. по двумерному векторному параметру λ , компонентами которого слу-

жат τ и F : $\lambda = [\tau, F]$. Качество разрешения при этом определяется видом частотно-временной ФН

$$\Psi(\tau, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t - \tau) \exp(-j2\pi Ft) dt \right|.$$

Подробнее вопросы разрешения по времени и частоте рассмотрены в 2.3.

2.3. Разрешение по времени запаздывания и частоте

В локационных системах сигналы, интерферирующие на входе приемника, отраженные различными целями, обычно отличаются друг от друга не только временем запаздывания, но и доплеровскими сдвигами. В таких случаях, характерных и для других приложений (радионавигация, связь по многолучевым трассам и др.), приходится говорить о разрешении сигналов по времени запаздывания τ и по частоте F , т. е. по двумерному векторному параметру λ , компонентами которого служат τ и F : $\lambda = (\tau, F)$. Качество разрешения при этом определяется видом частотно-временной ФН.

Геометрически $\Psi(\tau, F)$ задает некоторую поверхность над координатной плоскостью τ, F , причем в начале координат $\tau = 0, F = 0$ высота этой поверхности фиксирована и равна $\Psi(0, 0) = 1$ (рис. 2.4, а).

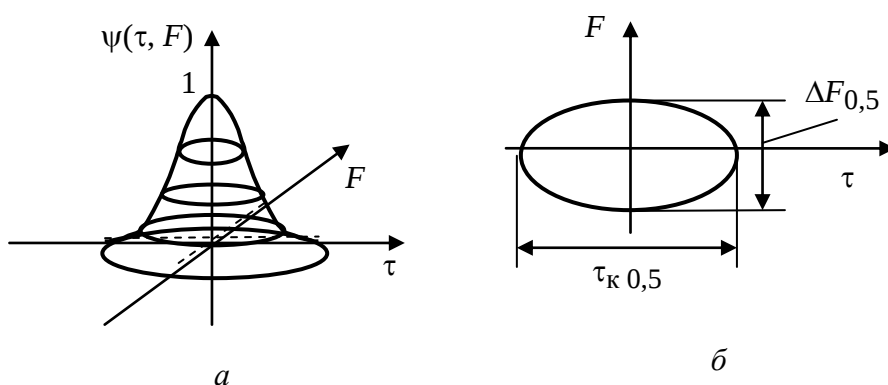


Рис. 2.4

Две копии сигнала, сдвинутые друг относительно друга по времени запаздывания на τ и по частоте на F , разрешить тем легче, чем ниже уровень ФН при данных τ, F , т. е. чем меньше высота поверхности на рис. 2.4, а в точке с координатами τ, F . Таким образом, желательно, чтобы ФН $\Psi(\tau, F)$ как можно быстрее спадала по мере удаления точки (τ, F) от начала координат. Нужно отметить, что сечение $\Psi(\tau, 0)$ ФН $\Psi(\tau, F)$ плоскостью $F = 0$, как следует из (2.20), есть ФН по запаздыванию $\Psi(\tau)$, и, следовательно, протяженность $\Psi(\tau, 0)$

по оси τ характеризует достижимую для данного сигнала разрешающую способность только по времени запаздывания (т. е. возможность разрешения двух копий сигнала, имеющих разное время запаздывания, но одинаковые частотные сдвиги спектра). Аналогично, протяженность вдоль оси F сечения $\Psi(0, F)$ ФН плоскостью $\tau = 0$ определяет разрешающую способность только по частоте (когда разрешаемые копии сигнала совмещены по времени, но различаются частотными сдвигами спектра). При этом, как следует из (2.19), функция

$$\Psi(0, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 \exp(-j2\pi Ft) dt \right| = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) \exp(-j2\pi Ft) dt \right|$$

повторяет по форме амплитудно-частотный спектр квадрата действительной огибающей сигнала, т. е. определяется исключительно законом амплитудной модуляции сигнала. Если протяженность сечения $\Psi(\tau, 0)$ по τ имеет порядок длительности τ_k корреляционной функции комплексной огибающей сигнала, то ширина сечения $\Psi(0, F)$ вдоль оси F близка к ширине спектра действительной огибающей сигнала, т. е. значению, обратному длительности сигнала.

Следует отметить, что в аксонометрическом изображении $\Psi(\tau, F)$ (рис. 2.4, а), наглядном в качественном отношении, не всегда удастся учесть количественные соотношения, и потому для графического представления частотно-временной ФН нередко прибегают к методу, принятому в топографии, где профиль рельефа местности на бумаге передают с помощью изолиний, соединяющих географические точки одной и той же высоты. Чтобы таким способом отразить рельеф поверхности, задаваемой ФН, следует нанести на плоскость τ, F сечения поверхности $\Psi(\tau, F)$ горизонтальными плоскостями, поднятыми на ту или иную высоту относительно координатной плоскости. Подобное сечение на высоте $\Psi(\tau, F) = 0,5$, называемое *областью высокой корреляции* либо *диаграммой неопределенности* (рис. 2.4, б), задает область, в пределах которой уровень ФН превышает 0,5. Столь большое значение ФН позволяет с некоторой долей условности считать, что любые две копии сигнала, у которых взаимные рассогласования по времени запаздывания τ и частоте F попадают в пределы области высокой корреляции, неразрешимы. Это, в частности, означает, что для достижения высокой разрешающей способности по времени и частоте необходимо, чтобы диаграмма неопределенности имела довольно малую протяженность по любому направлению в плоскости τ, F . При этом длина отрезка оси τ в пределах области высокой корреляции есть длительность $\tau_{k0,5}$ корреляционной функции (2.20) по уров-

ню 0,5, т. е. характеризует разрешающую способность только по времени запаздывания. Аналогично, длина отрезка оси F в пределах той же фигуры, равная ширине спектра $\Delta F_{0,5}$ квадрата действительной огибающей сигнала по уровню 0,5, служит мерой разрешающей способности только по частоте.

Дополнительной иллюстрацией влияния ФН на разрешающую способность служит тот факт, что ФН при фиксированном значении F воспроизводит огибающую после СФ, на который подается сигнал, расстроенный относительно фильтра на F Гц. Набор таких огибающих, после «гребенки» настроенных на разные частоты фильтров, образует «пакет» сечений ФН $\Psi(\tau, F)$ для разных значений F .

Для иллюстрации приведем частотно-временную ФН простейшего сигнала – радиоимпульса с прямоугольной огибающей, полученную в примере 2 разд. 1.

Домножив и разделив полученное там выражение на $\tau_{\text{и}}$, заменив обозначение $\tau_{\text{и}}$ на $\tau_{\text{с}}$, после предельного перехода $F \rightarrow 0$ нетрудно убедиться, что сечение ФН плоскостью $F = 0$ есть равнобедренный треугольник с основанием $2\tau_{\text{с}}$:

$$\Psi(\tau, 0) = 1 - |\tau|/\tau_{\text{с}}, |\tau| \leq \tau_{\text{с}}; \quad \Psi(\tau, 0) = 0, |\tau| > \tau_{\text{с}}.$$

Этого и следовало ожидать, так как комплексной огибающей рассматриваемого сигнала является прямоугольный видеоимпульс, имеющий именно такую корреляционную функцию. Сечение же ФН плоскостью $\tau = 0$ есть функция вида $\Psi(0, F) = |\sin \pi F \tau_{\text{с}} / \pi F \tau_{\text{с}}|$, что опять же предсказуемо и без вычисления ФН, так как квадрат огибающей прямоугольного радиоимпульса – прямоугольный видеоимпульс, имеющий амплитудно-частотный спектр $|\sin \pi F \tau_{\text{с}} / \pi F \tau_{\text{с}}|$. Кроме того, сечения ФН плоскостями $F = k/\tau_{\text{с}}$ (k – ненулевое целое) повторяют по форме модули синусов частот $k/2\tau_{\text{с}}$. Все эти детали отчетливо прослеживаются на аксонометрии ФН, приведенной на рис. 2.5 и показывающей, что рельеф, сосредоточенный в пределах полосы $-\tau_{\text{с}} \leq \tau \leq \tau_{\text{с}}$, имеет склоны от начала координат – линейный вдоль оси τ и вида $\sin x/x$ вдоль оси F . На расстояниях от оси τ , больших $1/\tau_{\text{с}}$, поверхность $\Psi(\tau, F)$ становится волнистой, приобретая характер извилистых гребней и ложбин.

Область высокой корреляции для ФН, показанная на рис. 2.6, включает в себе отрезки осей τ, F , имеющие длины, связанные обратной пропорцией, со-

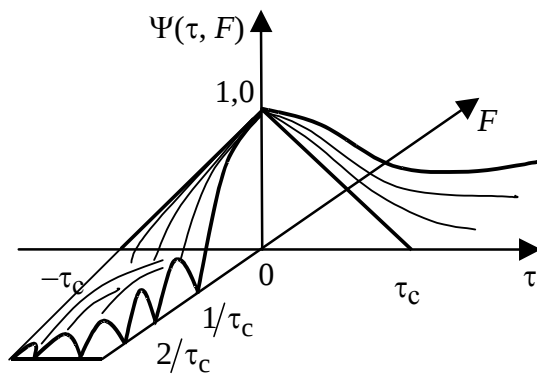


Рис. 2.5

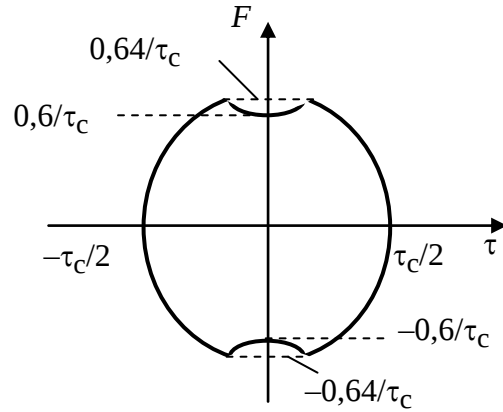


Рис. 2.6

ответственно, τ_c и $1,2/\tau_c$. Следовательно, для прямоугольного радиоимпульса улучшения разрешающей способности по времени запаздывания можно достичь лишь ценой ухудшения разрешающей способности по частоте. Так, неограниченное укорочение импульса, т. е. переход к огибающей типа δ -функции, превратило бы область высокой корреляции в бесконечно узкую полосу неограниченной протяженности вдоль оси F .

Это означает, что две копии сигнала, разнесенные по времени запаздывания на любое ненулевое значение τ , оказались бы легко разрешимыми, тогда как совмещенные по времени копии, несмотря на сколь угодно большую частотную расстройку, разрешить бы не удалось. Аналогично, устремляя $\tau_c \rightarrow \infty$, т. е. переходя к сигналу в виде немодулированного гармонического колебания, можно получить ДН в виде полосы, вытянутой вдоль оси τ . При этом сигналы с какой угодно отличной от нуля частотной расстройкой разрешаются без затруднений, тогда как копии сигнала с совпадающими частотами неразрешимыми ни при каком разное по времени.

Противоречивость показателей разрешения по τ и по F характерна для всех простых сигналов. В основе ее лежит инвариантность к виду сигнала объемом V *тела неопределенности*, т. е. тела, заключенного между плоскостью τ, F и поверхностью, описываемой квадратом ФН $\Psi^2(\tau, F)$. Соответствующее утверждение, известное как *принцип неопределенности Вудворда*, доказывается довольно легко. Согласно определению ФН (2.19)

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(\tau, F) d\tau dF = \frac{1}{4E^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t_1) \dot{S}^*(t_1 - \tau) \times$$

$$\times \dot{S}^*(t_2) \dot{S}(t_2 - \tau) \exp[-j2\pi F(t_1 - t_2)] dt_1 dt_2 d\tau dF.$$

Взяв интеграл по F и получив δ -функцию аргумента $t_1 - t_2$, можно воспользоваться ее фильтрующим свойством:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4E^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t_1) \dot{S}^*(t_1 - \tau) \dot{S}^*(t_2) \dot{S}(t_2 - \tau) \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 d\tau = \\ &= \frac{1}{4E^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t - \tau)|^2 d\tau = 1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

так как каждый из интегралов равен $2E$.

Таким образом, тело неопределенности имеет единичный объем независимо от конкретного закона модуляции сигнала. Можно представить тело неопределенности как некую массу пластилина, которой, выбирая сигнал, можно придавать различные конфигурации, но из которой нельзя удалить даже одной молекулы.

Из соотношения (2.21) можно сделать важные выводы, если учесть, что объем тела неопределенности сигнала, имеющего длительность τ_c и ширину спектра Δf_c , обязательно сосредоточен в пределах прямоугольника, длины сторон которого по осям τ и F равны $2\tau_c$ и $2\Delta f_c$. Действительно, из (2.19) следует, что ФН $\Psi(\tau, F)$ обращается в нуль, когда $\dot{S}(t)$ и $\dot{S}(t - \tau)$ не перекрываются по времени, т. е. когда $|\tau| > \tau_c$. Воспользовавшись в (2.19) равенством Парсеваля

$$\Psi(\tau, F) = \left| \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(f) \tilde{S}^*(f + F) \exp(-j2\pi f \tau) df \right|,$$

нетрудно убедиться в равенстве нулю $\Psi(\tau, F)$ и при частотных расстройках, больших по абсолютному значению Δf_c , поскольку при этом не перекрываются по частоте спектры $\dot{S}(f)$ и $\dot{S}(f + F)$.

Возвращаясь к вопросу о предпочтительной форме частотно-временной ФН (о предпочтительном теле неопределенности), можно утверждать, что для получения хорошей разрешающей способности по τ и F тело неопределенности должно иметь пик в начале координат (основной пик) по возможности малого объема $V_{\text{осн}}$. Оставшийся объем $V - V_{\text{осн}}$, приходящийся на боковые лепестки, для минимизации уровня последних следует распределить

как можно более равномерным слоем по прямоугольнику со сторонами $2\tau_c$, $2\Delta f_c$. Таким образом, идеальная ФН должна иметь «кнопочный» вид – наподобие иголки единичной высоты на прямоугольном пьедестале площадью $4\Delta f_c\tau_c$ (рис. 2.7).

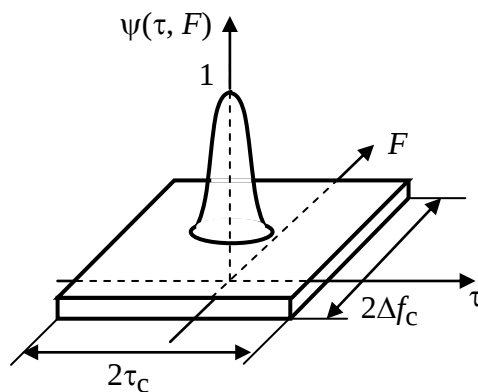


Рис. 2.7

Для простых сигналов $\Delta f_c \approx 1/\tau_c$, так что площадь всего прямоугольника, в пределах которого сосредоточено тело неопределенности, имеет порядок единицы. Но тот же порядок имеет и площадь области высокой корреляции простого сигнала, так как ее размеры по осям τ и F близки к τ_c и $1/\tau_c$ (рис. 2.7). Следовательно, для простых сигналов почти весь объем тела неопределенности сосредоточен в области высокой корреляции, и вытеснить оттуда существенную часть полного объема $V = 1$ не удастся. Никакой «иглы» на пьедестале при этом не получается, а невозможность вытеснить объем из области высокой корреляции приведет к тому, что сплющивание ФН по одной из осей будет сопровождаться неминуемым расширением ее по другой. Это и есть причина обратной зависимости между показателями разрешающей способности по τ и F , свойственной простым сигналам.

Теперь понятно, что приближение к идеальной форме ФН наподобие изображенной на рис. 2.7 возможно лишь в классе широкополосных (сложных) сигналов. Действительно, для таких сигналов характерна малая по сравнению с длительностью сигнала τ_c длительность корреляционной функции $\tau_k \approx 1/\Delta f_c$, т. е. длина отрезка оси τ внутри области высокой корреляции $\tau_{k0,5} \approx 1/\Delta f_c$. Длина же отрезка оси F в пределах той же области (ширина спектра квадрата действительной огибающей $\Delta F_{0,5}$) для сложных сигналов та же, что и для простых, $\Delta F_{0,5} = 1/\tau_c$. Таким образом, если площадь области высокой корреляции близка к произведению длин указанных отрезков, т. е. к $\tau_{k0,5}\Delta F_{0,5} \approx 1/\Delta f_c\tau_c$, то объем основного пика (его высота равна единице, а площадь основания близка к площади области высокой корреляции) $V_{осн} = 1 \cdot \tau_{k0,5}\Delta F_{0,5} \approx 1/\Delta f_c\tau_c = 1/B$. При базе $B \gg 1$ объем $V_{осн}$ составит малую долю полного объема $V = 1$, и последний практически весь придется на

пьедестал, площадь которого $4\Delta f_c \tau_c = 4B$ значительно больше единицы. Средний квадрат боковых лепестков ФН можно найти, разделив объем пьедестала $1-V_{\text{осн}}$ на площадь его основания. Это обусловлено тем, что предыдущие рассуждения относились к телу неопределенности, связанному с ФН квадратичной зависимостью. Так как $V_{\text{осн}} \ll 1$, то среднеквадратический уровень боковых лепестков $\Psi(\tau, F)$ примерно равен $1/(2\sqrt{\Delta f_c \tau_c}) = 1/(2\sqrt{B})$, т. е. уменьшения боковых лепестков частотно-временной ФН можно добиться только за счет увеличения базы сигнала.

Отыскание конкретных законов модуляции, отвечающих приемлемым ФН, составляет предмет отдельной серьезной задачи, и само по себе большое значение базы B еще не гарантирует близости $\Psi(\tau, F)$ к идеальной.

В качестве примера рассмотрим частотно-временную ФН прямоугольного радиоимпульса с линейной частотной модуляцией.

Пусть в течение длительности τ_c сигнала $s(t)$ мгновенное значение частоты его заполнения линейно нарастает от $f_0 - W_f/2$ до $f_0 + W_f/2$, где f_0 – центральная частота; W_f – девиация частоты сигнала. Принимая за точку $t = 0$ момент, соответствующий середине сигнала, запишем выражения для его частоты $f(t)$ и фазы $\Phi(t)$ при $t \in [-\tau_c/2, \tau_c/2]$:

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^t f(t) dt = 2\pi \left(f_0 t + \frac{W_f t^2}{2\tau_c} \right); \quad f(t) = f_0 + \frac{W_f t}{\tau_c}; \quad (2.22)$$

где значение фазы $\Phi(0)$ без ограничения общности принято равным нулю. Радиосигнал с угловой модуляцией вида (2.22) называют линейно-частотно-модулированным импульсом (ЛЧМ-импульсом). Примерный вид ЛЧМ-импульса с прямоугольной огибающей, а также законы изменения его частоты и фазы показаны на рис. 2.8, а–в.

Второе из выражений (2.22) позволяет записать прямоугольный ЛЧМ-импульс амплитуды A в виде следующей функции времени:

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \varphi(t) = A \cos 2\pi \left(f_0 t + \frac{W_f t^2}{2\tau_c} \right), & |t| \leq \frac{\tau_c}{2}; \\ 0, & |t| \leq \frac{\tau_c}{2} \end{cases}$$

или

$$s(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ A \exp \left[j 2 \pi \left(f_0 t + \frac{W_f t^2}{2 \tau_c} \right) \right] \right\}, & |t| \leq \frac{\tau_c}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{\tau_c}{2}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Следовательно, комплексная огибающая прямоугольного ЛЧМ-импульса

$$\dot{S}(t) = \begin{cases} A \exp \left[j \frac{\pi W_f t^2}{\tau_c} \right], & |t| \leq \frac{\tau_c}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{\tau_c}{2}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Из теории частотной модуляции известно, что когда девиация частоты многократно превосходит ширину спектра модулирующего сообщения, спектр модулированного сигнала занимает полосу частот, приближенно равную девиации. В рассматриваемом случае частота модулируется по закону линейно нарастающего в течение интервала τ_c импульса, и в первом приближении за ширину спектра модулирующего сообщения можно принять величину $1/\tau_c$, тогда как полный диапазон изменений частоты равен W_f . Следовательно, при девиации W_f , много большей $1/\tau_c$ ($W_f \tau_c \gg 1$), ширина спектра Δf_c ЛЧМ-импульса близка к W_f , база $B = \Delta f_c \tau_c \approx W_f \tau_c \gg 1$, и сигнал данного типа действительно относится к категории сложных.

Поскольку огибающая сигнала (2.23) постоянна при $|t| \leq \tau_c/2$, то при условии узкополосности $\Delta f_c \approx W_f \ll f_0$ его энергия $E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(t)|^2 dt = \frac{A^2 \tau_c}{2}$.

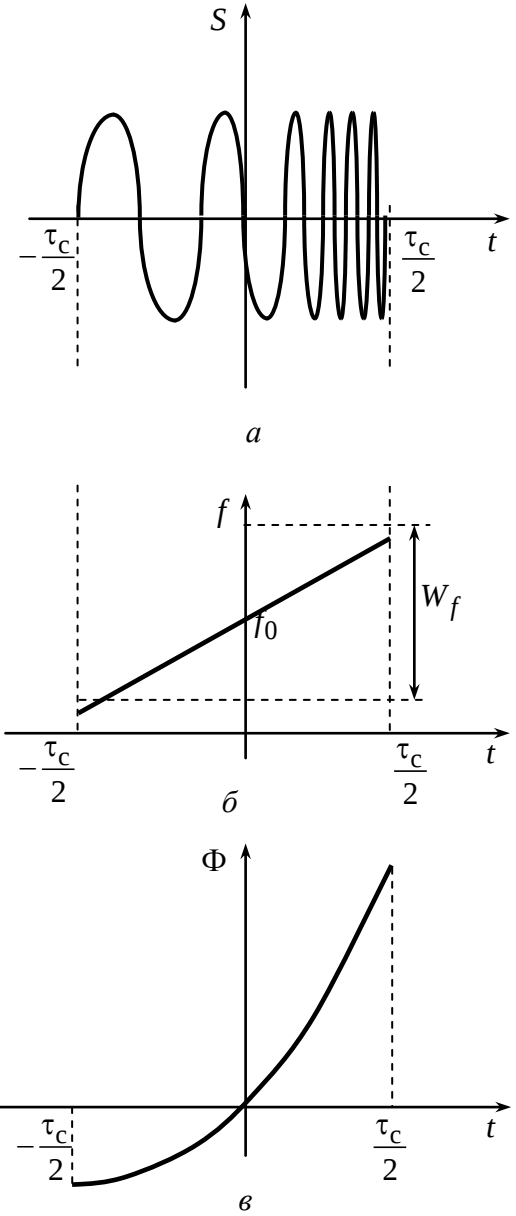


Рис. 2.8

Кроме того, при вычислении корреляционной функции комплексной огибающей $\dot{\psi}(\tau)$ учтем, что для любых τ из интервала $[-\tau_c/2, \tau_c/2]$ произведение $\dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau)$ отлично от нуля лишь при $-\tau_c/2 + \tau < t < \tau_c/2$. Поэтому при $0 < t < \tau_c$ интегрирование в выражении для нормированной корреляционной функции комплексной огибающей $\dot{\psi}(\tau) = \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t-\tau) dt$ после подстановки туда (2.24) нужно выполнять по отрезку $[-\tau_c/2 + \tau, \tau_c/2]$:

$$\dot{\psi}(\tau) = \frac{1}{\tau_c} \int_{-\tau_c/2 + \tau}^{\tau_c/2} \exp \left\{ j \frac{\pi W_f \tau}{\tau_c} [t^2 - (t-\tau)^2] \right\} dt.$$

Раскрыв скобки в показателе экспоненты, после замены переменных $t - \tau/2 \rightarrow t$ получим

$$\dot{\psi}(\tau) = \frac{1}{\tau_c} \int_{-\tau_c/2 + \tau}^{\tau_c/2 - \tau/2} \exp \left\{ j \frac{\pi W_f \tau}{\tau_c} \tau t \right\} dt = \frac{\sin \pi W_f \tau (1 - \tau / \tau_c)}{\pi W_f \tau}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_c.$$

Воспользовавшись очевидным равенством $\dot{\psi}(\tau) = \dot{\psi}^*(-\tau)$ и тем, что $\dot{\psi}(\tau) = 0$ при $|\tau| > \tau_c$, придем к выражению, справедливому для любых τ :

$$\dot{\psi}(\tau) = \begin{cases} \frac{\sin \left[\pi W_f \tau \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_c} \right) \right]}{\pi W_f \tau}, & |\tau| \leq \tau_c; \\ 0, & |\tau| > \tau_c. \end{cases} \quad (2.25)$$

Точная формула (2.25) в случаях больших девиаций $W_f \gg 1/\tau_c$, т. е. больших баз $B \approx W_f \tau_c \gg 1$, допускает наглядное приближение. Действительно, когда произведение $W_f \tau_c$ достаточно велико, абсолютное значение знаменателя $\pi W_f \tau$ дроби в (2.25) становится большим уже при малых $|\tau|/\tau_c$, т. е. $\dot{\psi}(\tau)$ затухает до пренебрежимого уровня уже при $|\tau|/\tau_c \ll 1$. Поэтому в той области значений τ , где с уровнем $\dot{\psi}(\tau)$ приходится считаться, сомножитель $1 - |\tau|/\tau_c$ в аргументе синуса практически равен единице. Это и приводит к аппроксимации

$$\psi(\tau) \approx \frac{\sin \pi W_f \tau}{\pi W_f \tau}, \quad (2.26)$$

показанной на рис. 2.9.

Легко видеть, что при оценке длительности τ_k корреляционной функции (2.26) расстоянием между ее ближайшими к точке $\tau = 0$ нулями справедливо соотношение $\tau_k = 2/W_f$, обнаруживающее

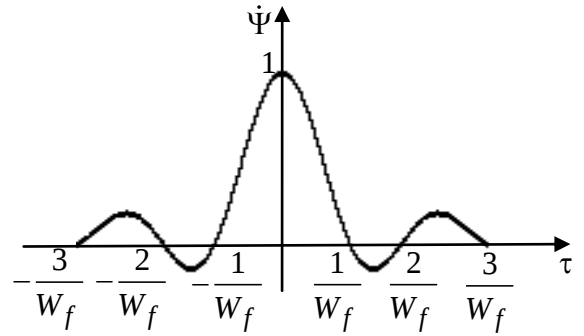


Рис. 2.9

эффект сжатия в СФ ЛЧМ-импульсов с большими значениями базы $B = W_f \tau_c \gg 1$: $\tau_k = 2/W_f = 2\tau_c/(W_f \tau_c) \ll \tau_c$. Форма огибающей реакции СФ на радиоимпульс (2.23), описываемая (2.26), подтверждает изложенное ранее относительно спектра ЛЧМ-импульса, поскольку радиоимпульс с огибающей $\sin x/x$ (см. (2.26)) имеет прямоугольный спектр с шириной, обратной расстоянию первого нуля функции (2.26) от начала координат: $\Delta f_c = 1/(\tau_k/2) = W_f$. Но так как спектр на выходе СФ повторяет по форме квадрат амплитудно-частотного спектра входного сигнала, то амплитудно-частотный спектр ЛЧМ-импульса приближенно (в силу нестрогости соотношения (2.26)) можно полагать равномерным в диапазоне $[f_0 - W_f/2, f_0 + W_f/2]$ и равным нулю вне этого отрезка.

Технические средства, применяемые для формирования и согласованной фильтрации ЛЧМ-сигналов, разнообразны. Для импульсов длительности τ_c вплоть до десятков-сотен микросекунд с девиациями до нескольких мегагерц наиболее характерно построение СФ с использованием дисперсионных линий задержки на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Групповое время задержки t_3 в дисперсионных линиях зависит от частоты $[t_3 = t_3(f)]$, и если в пределах полосы ЛЧМ-сигнала (2.23) функция $t_3(f)$ линейно убывает с угловым коэффициентом $-\tau_c/W_f$ (рис. 2.10), то подобный четырехполюсник, последовательно соединенный с неискажающим полосовым фильтром с полосой W_f , образует СФ для сигнала (2.23).

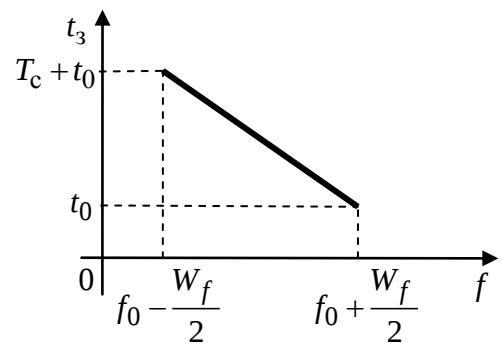


Рис. 2.10

Объяснение этого факта базируется на осмыслении физики работы любого СФ, функции которого сводятся к накоплению (запоминанию и взвешенному суммированию) последовательно поступающих на вход фрагментов сигнала. ЛЧМ-сигнал (2.23) начинается с низкочастотных колебаний ($f(t)$ близка к $f_0 - W_f/2$), которые в дисперсионной линии будут задержаны на максимальное время порядка $\tau_c + t_0$ (рис. 2.10). Идущий затем отрезок сигнала с более высокой частотой запоздает на меньшее время так, чтобы к моменту $\tau_c + t_0$ «догнать» предшествовавший, и т. д. Заключительный отрезок сигнала задержится только на время t_0 , догнав все предыдущие. Поэтому в момент $\tau_c + t_0$ произойдет синфазное сложение всех собравшихся вместе сигналов, дающее основной пик отклика на рис. 2.9. Результатом интерференции отрезков в другие моменты времени будут изменения комплексной огибающей на выходе по закону, воспроизведенному на рис. 2.9.

Для обработки ЛЧМ-сигнала с шириной спектра в сотни и тысячи мегагерц возможности устройств на ПАВ оказываются исчерпанными, и в этих случаях целесообразно использование акустооптических сигнальных процессоров [25]. При построении акустооптических согласованных фильтров (АОСФ) для широкополосных, но достаточно коротких (десятки микросекунд) ЛЧМ-импульсов можно использовать АОСФ с пространственным интегрированием сигнала. Достоинствами такого фильтра являются исключительная простота и широкополосность. Для обработки широкополосных и протяженных по времени сигналов необходимо использовать АОСФ с временным интегрированием, для которого длительность обрабатываемого сигнала может достигать десятков миллисекунд.

Отметим, что хотя за длительность сжатого ЛЧМ-импульса была принята ширина основного пика (2.26), выбросы $\psi(\tau)$ за пределами интервала $[-1/W_f, 1/W_f]$ (боковые лепестки) достигают значительного уровня, спадающего в обратной пропорции от τ . Первый – максимальный по уровню боковой лепесток при $\tau \approx 3/(2W_f)$ лишь в $3\pi/2 \approx 4,7$ раза (на 13 дБ) ниже основного пика. Столь заметные боковые лепестки могут существенно повысить риск аномальных ошибок при измерении времени запаздывания ЛЧМ-сигнала и затруднить разрешение импульсов, имеющих разнос по времени, близкий к $\tau_k = 2/W_f$.

На рис. 2.11, *а* сплошными и штриховыми линиями условно обозначены, соответственно, сильный и слабый ЛЧМ-импульсы, сдвинутые друг относительно друга по времени на $3/(2W_f)$. В этом случае из-за интерференции откликов СФ на перекрывающиеся ЛЧМ-сигналы боковые лепестки сильного сигнала на выходе фильтра (сплошные линии на рис. 2.11, *б*) могут замаскировать основной пик слабого выходного импульса (пунктир на рис. 2.11, *б*).

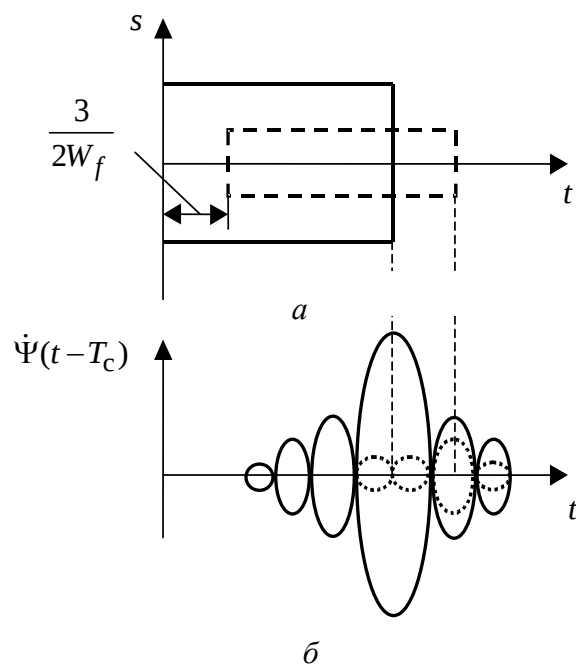


Рис. 2.11

На практике часто важно не пропустить именно полезный слабый радиосигнал на фоне близко расположенного мешающего сильного. Так, в радиолокации отраженный лоцируемой целью импульс нередко теряется в более сильных отражениях от близких посторонних объектов (построек, морской поверхности, элементов рельефа, специально устанавливаемых ложных целей); в дальней радионавигации используемый для местоопределения слабый сигнал поверхностной волны маскируется накладывающимся на него более сильным, отраженным ионосферой. Поэтому так актуальны попытки избежать осложнений, связанных с наличием у ФН $\dot{\Psi}(\tau)$ ЛЧМ-импульсов больших боковых лепестков.

Определенного снижения уровня боковых лепестков можно добиться, применяя ЛЧМ-сигналы с непрямоугольными гладкими (типа колоколообразной, см. пример 5 в разд. 1) огибающими, переходя к нелинейной частотной модуляции [26] либо заменяя согласованную фильтрацию специальной весовой обработкой [3], [27].

Более похожую на «кнопочную» ФН имеют многие фазоманипулированные сигналы. Для них область высокой корреляции, как и для простых сигналов, симметрична относительно осей τ , F , однако размер ее вдоль оси τ примерно в $B \approx N$ раз меньше τ_c : $\tau_k \approx \tau_c/N$. Поэтому, выбрав τ_c и N достаточно большими, основному пику всегда можно придать иглообразную форму. При этом, однако, вместо изображенного на рис. 2.7 «гладкого» пьеде-

стала высотой $1/(2\sqrt{\Delta f_c \tau_c}) = 1/(2\sqrt{N})$ вне основного пика оказываются хаотически расставленными острые боковые пики, отдельные из которых могут иметь уровни, заметно превосходящие $1/\sqrt{N}$.

2.4. Контрольные вопросы, примеры и задачи

2.4.1. Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача обнаружения сигналов?
2. Какой информацией располагает разработчик обнаружителя и как она структурируется?
3. Что такое матрица потерь?
4. Как записывается выражение для средних потерь в задаче обнаружения сигнала?
5. Что такое пространство наблюдения? Как с его помощью можно описать работу обнаружителя?
6. Что такое простые и сложные гипотезы? Чем определяется тип гипотезы? Какие бывают сложные гипотезы? Приведите примеры.
7. Как рассчитываются условные вероятности ошибок (вероятность ложной тревоги и вероятность пропуска сигнала) для задачи обнаружения сигнала?
8. Как записывается правило проверки двух простых гипотез, оптимальное по критерию минимума среднего риска?
9. Сформулируйте критерии идеального наблюдателя и минимума суммы условных вероятностей ошибок.
10. Как формулируется критерий Неймана–Пирсона для задачи обнаружения сигнала?
11. Составляют ли ложная тревога и пропуск сигнала полную группу событий?
12. Что такое функция правдоподобия для задачи обнаружения сигнала?
13. Что такое отношение правдоподобия в задачах проверки двух простых гипотез?
14. Почему в качестве монотонной функции при преобразовании отношения правдоподобия чаще всего используется логарифмическая функция?
15. Сформулируйте алгоритм оптимального обнаружения полностью известного сигнала при дискретном наблюдении, считая отсчеты помехи независимыми СВ с известной плотностью вероятности $W(x_i)$.

16. Каким будет алгоритм оптимального обнаружения полностью известного сигнала при дискретном наблюдении, если отсчеты помехи независимы и подчинены нормальному закону?

17. Каким будет алгоритм оптимального обнаружения полностью известного сигнала на фоне нормального белого шума? Как изменится результат, если гауссовский шум будет окрашен?

18. Как рассчитываются качественные показатели оптимального обнаружителя полностью известного сигнала на фоне нормального белого шума?

19. Какой будет структура и как рассчитывать качественные показатели при обнаружении полностью известной пачки импульсов на фоне нормального белого шума?

20. Каким будет алгоритм оптимального обнаружения сигнала со случайной начальной фазой на фоне нормального белого шума?

21. Какие структуры можно использовать для оптимального обнаружения когерентной пачки импульсов со случайной начальной фазой?

22. Как рассчитываются характеристики обнаружения для сигнала со случайной начальной фазой?

23. В чем специфика обнаружения сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой?

24. Сравните характеристики обнаружения, соответствующие одному и тому же значению вероятности ложной тревоги $p_{л.т.}$, для полностью известного сигнала, сигнала со случайной начальной фазой и сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой.

25. Какова будет структура обнаружителя для некогерентного пакета?

26. Сравните качественные показатели обнаружителей когерентного и некогерентного пакетов для случаев $q_0 \ll 1$ и $q_0 \gg 1$, где q_0 – отношение с/ш на выходе согласованного фильтра для одиночного импульса пакета.

27. Как формулируется задача различения M полностью известных сигналов?

28. Какие критерии оптимальности используются при решении задачи различения сигналов?

29. Запишите алгоритм различения двух полностью известных сигналов на фоне АБГШ оптимальный по критерию максимального правдоподобия.

30. Проиллюстрируйте графически задачу различения двух сигналов на фоне АБГШ. Какая пара равновероятных сигналов одинаковой энергии при

фиксированном значении СПМ АБГШ обеспечит минимум вероятности ошибки различения сигналов?

31. Обобщите ответ на вопрос 29 на случай различения M равновероятных сигналов одинаковой энергии.

32. Как оценивается вероятность ошибки при различении M равнокоррелированных сигналов одинаковой энергии с помощью аддитивной границы полной вероятности ошибки? При каких условиях допустимо использовать эту оценку?

33. Каким будет оптимальный алгоритм различения равновероятных узкополосных радиосигналов одинаковой энергии, имеющих случайные независимые начальные фазы, равномерно распределенные в интервале $[-\pi; \pi]$?

34. Каким будет оптимальный ансамбль различаемых сигналов для условий вопроса 32?

35. Чем отличаются ортогональные сигналы от ортогональных в усиленном смысле?

36. Детерминированными или случайными функциями λ являются априорная ПВ, функция правдоподобия (ФП)?

37. Как эти функции связаны между собой?

38. В чем принципиальное отличие априорной и апостериорной ПВ?

39. Почему $W(y(t))$ не является функцией λ ?

40. Что такое состоятельность и несмещенность оценки?

41. Какие оценки называют эффективными?

42. Что такое совместная эффективность оценок компонентов векторного параметра?

43. Измеряется только амплитуда, только начальная фаза либо амплитуда и начальная фаза сигнала. В каких из названных случаев оценки измеряемых параметров окажутся строго эффективными?

44. Какие требования должны быть предъявлены к функции правдоподобия при выводе границы Крамера–Рао? Приведите пример случая, когда эти требования не выполняются.

45. При каких условиях существует эффективная оценка? Приведите примеры.

46. Дайте определение оценки по методу максимума правдоподобия.

47. Сформулируйте основные свойства оценок по методу максимума правдоподобия.

48. В чем достоинства МП-оценок?

49. Какими способами ФП может быть «освобождена» от неинформационных параметров?

50. Какие из следующих параметров сигнала и при каких условиях являются неэнергетическими: начальная фаза, центральная частота спектра, амплитуда, время запаздывания, длительность, девиация частоты, период повторения импульсов в пакете, индекс угловой модуляции?

51. Какой качественный смысл вкладывается в понятие функции неопределенности?

52. К какому виду ФН следует стремиться, чтобы с бóльшим доверием относиться к значениям дисперсий ошибок, рассчитанным по границе Крамера–Рао?

53. В чем суть детерминистического и статистического толкований понятия разрешающая способность?

54. Каким образом определяется разрешающая способность по времени запаздывания и частотному сдвигу спектра сигнала?

55. Что такое ФН сигнала по параметру λ и как она определяется?

56. Что такое частотно-временная ФН и как она записывается для комплексной огибающей сигнала и ее спектра?

57. Перечислите свойства частотно-временной ФН?

58. Что такое тело неопределенности для частотно-временной ФН и как на его основе формулируется принцип неопределенности?

59. Что характеризует вертикальное сечение частотно-временной ФН плоскостями $\tau = 0$ и $F = 0$?

60. Можно ли улучшить разрешающую способность по времени запаздывания, применяя несогласованные фильтры, дающие на выходе более короткие отклики на сигнал, чем СФ? Приведите примеры.

61. Что такое «кнопочная» («игольчатая») ФН? Как к ней приблизиться?

62. Почему в классе сложных сигналов достижимы показатели совместного разрешения по времени запаздывания и частоте, недоступные для простых сигналов? Как связана разрешающая способность по τ и F с базой сигнала?

63. Чему равна база ЛЧМ-сигнала, если девиация частоты Δf много больше величины, обратной длительности импульса $\tau_{\text{и}}$?

64. Какой порядок имеет база M -элементного фазоманипулированного сигнала?

2.4.2. Примеры

1. Найти алгоритм работы оптимального обнаружителя дискретного сигнала $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ на фоне гауссовской помехи $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, описываемой совместной ПВ $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Определите качественные показатели для различных критериев оптимальности.

Решение. В целях наглядности геометрической иллюстрации рассмотрим случай $n = 2$, обобщив полученный результат для произвольного n .

Итак, задача решается на основе наблюдения двух отсчетов $y_i, i = 1, 2$. При справедливости гипотезы H_0 (сигнала нет) $y_i = x_i, i = 1, 2$, а в случае наличия сигнала (гипотеза H_1) $y_i = x_i + s_i, i = 1, 2$.

Будем считать, что $M\{x_i\} = 0, D\{x_i\} = \sigma^2, i = 1, 2$, а коэффициент корреляции равен r . Тогда распределение наблюдаемых отсчетов y_1 и y_2 для гипотез H_0 и H_1 равны

$$W(y_1, y_2/H_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{y_1^2 + y_2^2 - 2ry_1y_2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right];$$

$$W(y_1, y_2/H_1) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{(y_1 - s_1)^2 + (y_2 - s_2)^2 - 2r(y_1 - s_1)(y_2 - s_2)}{2\sigma^2(1-r^2)}\right]$$

соответственно, а отношение правдоподобия

$$\Lambda(y_1, y_2) = \frac{W(y_1, y_2/H_1)}{W(y_1, y_2/H_0)} = \exp\left[-\frac{2y_1(2s_2 - s_1) + 2y_2(2s_1 - s_2) + s_1^2 + s_2^2 - 2rs_1s_2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right].$$

Переходя к логарифму отношения правдоподобия, после несложных преобразований получим решающее правило

$$z = (s_1 - rs_2)y_1 + (s_2 - rs_1)y_2 \underset{\hat{H}_2}{\overset{\hat{H}_1}{\geq}} z_{\Pi}, \quad (2.27)$$

где z_{Π} – пороговый уровень, зависящий от выбранного критерия оптимальности обнаружителя. Рис. 2.12 иллюстрирует рассматриваемую задачу.

Прямая, определяемая уравнением

$$(s_1 - rs_2)y_1 + (s_2 - rs_1)y_2 = z_{\Pi},$$

делит пространство наблюдения $Y = E^2$ (двумерное евклидово пространство) на две области Y_0 и Y_1 ($Y_0 \cup Y_1 = Y, Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$), определяющие принятие

решения в пользу гипотез H_0 и H_1 соответственно. Эллипсы с центрами в точках $(0,0)$ и (s_1, s_2) определяют линии равных значений ПВ наблюдаемых отсчетов y_1 и y_2 по гипотезам H_0 и H_1 соответственно.

При некоррелированных отсчетах ($r=0$) решающее правило примет вид

$$\begin{matrix} \hat{H}_1 \\ s_1 y_1 + s_2 y_2 \gtrless z_{\Pi} \\ \hat{H}_2 \end{matrix}$$

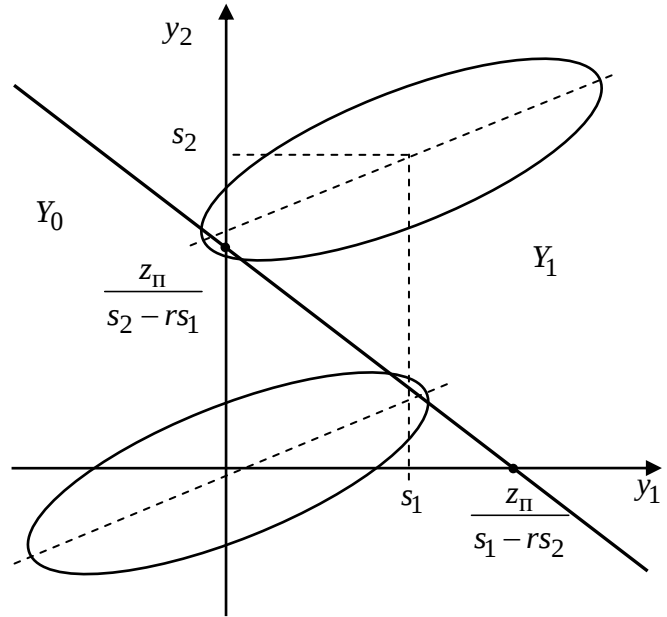


Рис. 2.12

а эллипсы перейдут в окружности (подумайте, почему).

Полученный результат легко обобщается на случай n отсчетов. При этом в соответствии с (1.37) логарифм отношения правдоподобия примет вид

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}^{-1} (y_i s_j + y_j s_i - s_i s_j),$$

а решающее правило с учетом симметрии матрицы $\mathbf{K}^{-1}$, $K_{ij}^{-1} = K_{ji}^{-1}$, может быть записано как

$$z = \sum_{i=1}^n C_i y_i \begin{matrix} \hat{H}_1 \\ \gtrless z_{\Pi} \\ \hat{H}_2 \end{matrix}, \quad C_i = \sum_{j=1}^n s_j K_{ij}^{-1}, \quad (2.28)$$

где z_{Π} – пороговая константа, в которую вошло слагаемое $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_i s_j$. Для экспоненциально-коррелированной помехи в соответствии с (1.41)

$$C_1 = s_1 - r s_2, \quad C_i = (1 + r^2) s_i - r (s_{i-1} + s_{i+1}), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad C_n = s_n - r s_{n-1}.$$

При некоррелированных отсчетах $r=0$, $C_i = s_i$ и

$$z = \sum_{i=1}^n s_i y_i.$$

Определим вероятности ложной тревоги $p_{л.т}$ и пропуска сигнала $p_{п.с}$ для рассмотренных обнаружителей, начав со случая обработки двух отсчетов. Как видно из (2.27), СВ z является результатом линейного преобразова-

ния (умножения на известные весовые коэффициенты $(s_1 - rs_2)$ и $(s_2 - rs_1)$ и суммирования) совместно нормальных СВ y_1 и y_2 , поэтому ПВ СВ z будет гауссовской с математическим ожиданием $M\{z/H_0\} = 0$, так как при отсутствии сигнала $M\{y_1\} = M\{y_2\} = 0$, и $M\{z/H_1\} = (s_1 - rs_2)s_1 + (s_2 - rs_1)s_2 = s_1^2 + s_2^2 - 2rs_1s_2$, так как при наличии сигнала $M\{y_1\} = s_1$ и $M\{y_2\} = s_2$. Дисперсия СВ z будет одинаковой при истинности H_0 или H_1 и равна $D\{z\} = \sigma^2(1 - r^2)(s_1^2 + s_2^2 - 2rs_1s_2)$. (Подумайте, почему.)

При некоррелированных отсчетах $M\{z/H_0\} = 0$, $M\{z/H_1\} = s_1^2 + s_2^2$ и $D\{z\} = \sigma^2\{s_1^2 + s_2^2\}$.

Теперь, пользуясь полученными выражениями, можно найти вероятности ложной тревоги $p_{л.т}$ и пропуска сигнала $p_{п.с}$:

$$p_{л.т} = \int_{z_{п}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{z\}}} \exp\left[-\frac{z^2}{2D\{z\}}\right] dz,$$

$$p_{п.с} = \int_{-\infty}^{z_{п}} \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{z\}}} \exp\left[-\frac{(z - M\{z/H_1\})^2}{2D\{z\}}\right] dz. \quad (2.30)$$

Входящие в (2.30) интегралы выражаются через специальную функцию – интеграл вероятностей $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ и $p_{л.т} = 1 - \Phi(z_{п}/\sqrt{D\{z\}})$, а $p_{п.с} = \Phi(z_{п}/\sqrt{D\{z\}} - M\{z/H_1\}/\sqrt{D\{z\}})$.

Выраженный из формулы для $p_{л.т}$ нормированный порог

$$h = z_{п}/\sqrt{D\{z\}} = \Phi^{-1}(1 - p_{л.т}),$$

где $\Phi^{-1}(\cdot)$ – функция обратная интегралу вероятностей, и подставляя его в формулу для $p_{п.с}$, будем иметь

$$p_{п.с} = \Phi\left[\Phi^{-1}(1 - p_{л.т}) - M\{z/H_1\}/\sqrt{D\{z\}}\right].$$

Из приведенного выражения видно, что при заданном значении вероятности ложной тревоги $p_{л.т}$ вероятность пропуска сигнала $p_{п.с}$ или вероят-

ность правильного обнаружения $p_{п.о} = 1 - p_{п.с}$, полностью определяются параметром $q = \frac{M\{z/H_1\}}{\sqrt{D\{z\}}}$, который называют параметром обнаружения.

С учетом сделанных обозначений выражения для вероятностей $p_{л.т}$ и $p_{п.с}$ примут вид

$$p_{л.т} = 1 - \Phi(h) = Q(h), \quad p_{п.с} = \Phi(h - q), \quad (2.31)$$

где $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2/2) dt$ – дополнительная функция ошибок.

Подставляя в выражение для q значения $M\{z/H_1\}$ и $D\{z\}$, будем иметь

$$q = \left[\frac{s_1^2 + s_2^2 - 2rs_1s_2}{\sigma^2(1-r^2)} \right]^{1/2}.$$

Если отсчеты сигнала одинаковы, т. е. $s_1 = s_2 = s$, то с учетом знака коэффициента корреляции

$$q = \left[\frac{s^2}{\sigma^2} \frac{2}{1+|r|} \right]^{1/2} = \frac{s}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{1+|r|}}.$$

Видно, что корреляционная связь между отсчетами помехи уменьшает параметр обнаружения, увеличивая при одном и том же значении $p_{л.т}$ вероятность пропуска $p_{п.с}$ и соответственно уменьшая вероятность правильного обнаружения $p_{п.о} = 1 - p_{п.с}$. Отношение s/σ можно рассматривать как параметр обнаружения при наблюдении одного отсчета y_1 (убедитесь в этом). При $r=0$ (некоррелированные, а при гауссовой помехе и независимые отсчеты) $q = \sqrt{2} \frac{s}{\sigma}$, а при $|r|=1$ $q = s/\sigma$, т. е. при $|r|=1$ использование второго отсчета не улучшает характеристики обнаружения. Это связано с тем, что условная ПВ для рассматриваемых нормальных СВ x_1 и x_2 имеет вид

$$W(x_2/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-r^2)}} \exp \left[-\frac{(x_2 - rx_1)^2}{2\sigma^2(1-r^2)} \right] x_1$$

(см. [9, с. 45–47]) и при $|r| \rightarrow 1$ переходит в $W(x_2/x_1) = \delta(x_2 - x_1)$, что означает простое повторение первого отсчета.

При обработке n отсчетов решающая статистика $\xi = z$ также распределена по нормальному закону со средними значениями $M\{z/H_0\} = 0$,

$$M\{z/H_1\} = \sum_{i=1}^n C_i s_i \quad \text{и} \quad \text{одинаковыми дисперсиями} \quad D\{z/H_0\} = D\{z/H_1\} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n C_k C_l K_{kl},$$

где коэффициенты C_i, C_k, C_l определены в (2.28), а K_{kl} –

элементы корреляционной матрицы помехи. Параметр обнаружения q при этом будет равен

$$q = \sum_{i=1}^n C_i s_i / \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n C_k C_l K_{kl}}.$$

Для некоррелированных отсчетов

$$q = \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} / \sigma,$$

где $\sum_{i=1}^n s_i^2 = \|\mathbf{s}\|^2$ – квадрат нормы дискретного сигнала, $\mathbf{s}$ – его энергетическая характеристика.

Для экспоненциально-коррелированной гауссовской помехи

$$C_i = (1 + r^2) s_i - r(s_{i-1} + s_{i+1}).$$

(Выражение для параметра обнаружения q читатель может определить самостоятельно.)

Качественным показателем оптимального обнаружителя является значение целевой функции, определяющей критерий оптимальности. Для критерия минимального среднего риска целевая функция (средний риск) $\bar{\Pi} = \Pi_0 W p_{\text{л.т}} + \Pi_1 (1 - W) p_{\text{п.с}}$, где Π_0, Π_1 – потери (риски), связанные с ложной тревогой и пропуском сигнала, а W и $(1 - W)$ – априорные вероятности отсутствия и наличия сигнала (гипотезы H_0 и H_1).

Вероятности $p_{\text{л.т}}$ и $p_{\text{п.с}}$ определяются выражениями (2.31), где нормированный при некоррелированных отсчетах помехи порог

$$h = \frac{\sigma^2 l_n \Lambda_{\Pi} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n s_i^2}{\sqrt{D\{z\}}}, \quad \Lambda_{\Pi} = \frac{\Pi_0 W}{\Pi_1 (1 - W)}, \quad D\{z\} = \sigma^2 \sum_{i=1}^n s_i^2.$$

Аналогично определяются качественные показатели и для других критериев оптимальности.

2. Найти оптимальный по критерию максимального правдоподобия алгоритм различения двух дискретных сигналов $\mathbf{s}_i = (s_{1i}, s_{2i}, \dots, s_{ni})$, $i = 1, 2$ на фоне гауссовской помехи $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, описываемой совместной ПВ $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Будем считать отсчеты помехи независимыми, т. е.

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n W(x_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right).$$

Таким образом, гипотезе H_i соответствует наблюдения $\mathbf{y}_i = \mathbf{x} + \mathbf{s}_i$, $i = 1, 2$. В соответствии с методом максимального правдоподобия для наблюдаемого вектора $\mathbf{y}$ следует записать значения распределения по гипотезам H_i $W(\mathbf{y}/H_i)$ и принять решение в пользу той гипотезы (того сигнала), которой соответствует большее значение функции правдоподобия $f(i) = W(\mathbf{y}/H_i)$.

Учитывая условия задачи, после несложных преобразований решающее правило примет вид

$$\sum_{k=1}^n y_k s_{1k} - \frac{\|\mathbf{s}_1\|^2}{2} \stackrel{\hat{H}_1}{>} \stackrel{\hat{H}_2}{\sum_{k=1}^n y_k s_{2k} - \frac{\|\mathbf{s}_2\|^2}{2}},$$

где $\|\mathbf{s}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n s_{ik}^2$, $i = 1, 2$ – квадраты норм различаемых дискретных сигналов.

Входящие в это выражение суммы $\sum_{k=1}^n y_k s_{ik}$, $i = 1, 2$, являются скалярными произведениями вектора наблюдения $\mathbf{y}$ и векторов различаемых сигналов $\mathbf{s}_i$. Если различаемые сигналы имеют одинаковые нормы $\|\mathbf{s}_1\| = \|\mathbf{s}_2\|$ (одинаковые энергетические характеристики), то оптимальный алгоритм сводится к сравнению между собой скалярных произведений или сравнению с нулем их разности, т. е. решающее правило принимает вид

$$\sum_{k=1}^n y_k s_{1k} - \sum_{k=1}^n y_k s_{2k} = \sum_{k=1}^n y_k (s_{1k} - s_{2k}) \stackrel{\hat{H}_1}{>} \stackrel{\hat{H}_2}{0}.$$

Так как скалярные произведения $(\mathbf{y}, \mathbf{s}_i) = \sum_{k=1}^n y_k s_{ik}$ являются мерой корреляции векторов $\mathbf{y}$ и $\mathbf{s}_i$, то решение принимается в пользу того сигнала,

у которого корреляция с наблюдаемым вектором $\mathbf{y}$ будет больше. Этот результат очевидным образом обобщается на случай $M > 2$ сигналов.

Для нахождения вероятностей перепутывания двух сигналов и при заданных априорных вероятностях $P(H_1)$ и $P(H_2)$ вероятности ошибки

$P_{\text{ош}} = P(H_1)P(\hat{H}_2/H_1) + P(H_2)P(\hat{H}_1/H_2)$ необходимо найти распределение

решающей статистики $\xi = \sum_{k=1}^n y_k(s_{1k} - s_{2k})$ для конкурирующих гипотез H_1 и

H_2 . Напомним, что при истинности гипотезы H_1 вектор наблюдения $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}_1$, а для альтернативы H_2 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}_2$. Поскольку $\mathbf{x}$ – нормальный случайный вектор, а $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ – детерминированные векторы, то $\mathbf{y}$ является случайным нормальным вектором со средним значением $M\{\mathbf{y}/H_i\} = \mathbf{s}_i$, $i = 1, 2$ и корреляционной матрицей $\mathbf{K} = \sigma^2 \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Решающая статистика ξ , как результат линейного преобразования нормального случайного вектора (вычисление скалярного произведения $(\mathbf{y}, \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$) будет нормальной СВ с математическим ожиданием

$M\{\xi/H_i\} = (\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$ и дисперсией $D\{\xi\} = \sigma^2 \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2$, одинаковой по обе-

им гипотезам. Раскрывая скалярное произведение и квадрат нормы с учетом вещественности векторов $\mathbf{s}_i$, $i = 1, 2$ и введенного обозначения

$\|\mathbf{s}_1\|^2 = \|\mathbf{s}_2\|^2 = E$, получим: $M\{\xi/H_1\} = E(1 - \rho)$, $M\{\xi/H_2\} = -E(1 - \rho)$;

$D\{\xi/H_i\} = 2\sigma^2 E(1 - \rho)$, $i = 1, 2$, где $\rho = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)/E$ – дискретный аналог коэффициента корреляции сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. После этого нетрудно найти вероятности перепутывания сигналов

$$P(\hat{H}_1/H_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi 2E(1-\rho)\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x + E(1-\rho)^2}{4E(1-\rho)\sigma^2}\right] dx;$$

$$P(\hat{H}_2/H_1) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi 2E(1-\rho)\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - E(1-\rho)^2)}{4E(1-\rho)\sigma^2}\right] dx.$$

Вычисляя записанные интегралы с помощью замены переменной

$t = \frac{x + E(1-\rho)}{\sqrt{E(1-\rho)\sigma^2}}$ в первом и $t = \frac{x - E(1-\rho)}{\sqrt{E(1-\rho)\sigma^2}}$ во втором, получим

$$P(\hat{H}_2/H_1) = P(\hat{H}_1/H_2) = Q\left(\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{2\sigma^2}}\right),$$

где $Q(x)$ – введенная ранее дополнительная функция ошибок. Полная вероятность ошибки $p_{\text{ош}} = Q\left(\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{2\sigma^2}}\right)[P(H_1) + P(H_2)] = Q\left(\sqrt{\frac{E(1-\rho)}{2\sigma^2}}\right)$ и не зависит от априорных вероятностей гипотез H_1 и H_2 , так как вероятности перепутывания сигналов в нашем случае одинаковы.

Из полученного выражения с учетом монотонно убывающего характера функции $Q(x)$ видно, что для улучшения вероятности ошибки нужно увеличивать отношение E/σ^2 , характеризующее соотношение между нормой (энергетической характеристикой) сигнальных векторов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ и СКО отсчетов помехи σ . Вторая возможность уменьшения $p_{\text{ош}}$ связана с уменьшением $\rho = (\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1)/E = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_0)/E$. Очевидно, что минимум ρ достигается, если $\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_2$, т. е. в случае противоположных векторов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, и равен -1 .

Дадим геометрическую трактовку полученным результатам. Как уже отмечалось, при проверке двух гипотез пространство наблюдения Y делится на две непересекающиеся области Y_1 и Y_2 , при попадании в которые вектора наблюдения $\mathbf{y}$ принимаются решения $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$. В соответствии с полученным РП, записан-

ным в векторной форме, $(\mathbf{y}, \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \underset{\hat{H}_2}{\overset{\hat{H}_1}{\geq}} 0$, граница областей Y_1 и Y_2 определяется

гиперплоскостью $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}$. На рис. 2.13 представлена геометрическая иллюстрация задачи различения сигналов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ для случаев противоположных ($\rho = -1$) и ортогональных ($\rho = 0$) сигналов. Нормы векторов $\mathbf{s}_0$ и $\mathbf{s}_1$ равны и одинаковы для обоих случаев. Реализация вектора помехи $\mathbf{x}$ также одинакова для рис. 2.13, *а* и *б*. Видно, что для противоположных сигналов (рис. 2.13, *а*) будет принято правильное решение $\hat{H}_1$, а для ортогональных (рис. 2.13, *б*) – ошибочное.

Рассмотрение задачи различения произвольного числа сигналов, а также случая непрерывного наблюдения отложены до разд. 4 второй части учебного пособия.

3. Найти алгоритм оптимального оценивания амплитудного множителя A дискретного сигнала $\mathbf{s} = A\mathbf{s}_0$, где $\mathbf{s}_0 = (s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0n})$ – полностью из-

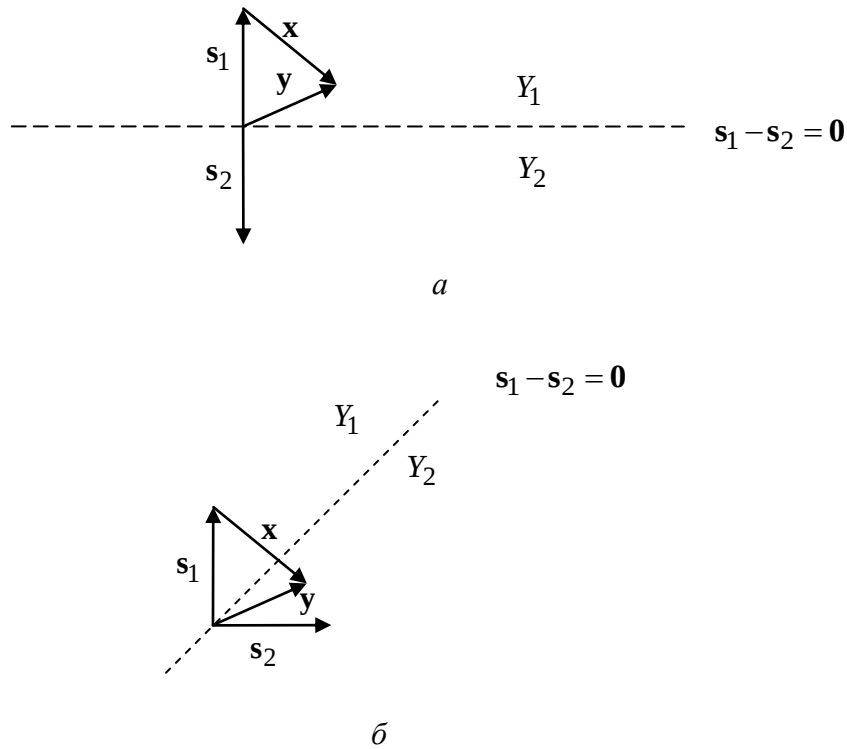


Рис. 2.13

вестный дискретный сигнал на фоне гауссовской помехи $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с независимыми отсчетами, имеющими нулевое среднее значение и дисперсию σ^2 . Критерий оптимальности – минимум средних потерь при квадратичной функции потерь.

Априорное распределение параметра A – гауссовское со средним значением A_0 и дисперсией σ_A^2 .

Решение. Для заданного критерия оптимальности оценкой будет математическое ожидание $\bar{A}$ апостериорного распределения $W(A/\mathbf{y})$, где $\mathbf{y}$ – наблюдаемый вектор.

В соответствии с теоремой умножения совместные распределения A и $\mathbf{y}$ имеют вид $W(A, \mathbf{y}) = W(A)W(\mathbf{y}/A) = W(\mathbf{y})W(A/\mathbf{y})$, откуда

$$W(A/\mathbf{y}) = \frac{1}{W(\mathbf{y})} W(A)W(\mathbf{y}/A),$$

где $W(\mathbf{y}/A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - As_{0i})^2\right]$, рассматриваемое при фиксированном векторе наблюдения $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ как функция параметра A ,

есть функция правдоподобия; $W(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}} \exp\left[-\frac{(A-A_0)^2}{2\sigma_A^2}\right]$ – априорная

ПВ параметра A ; $W(\mathbf{y})$ – не зависящее от A значение ПВ вектора наблюдения.

Подставляя записанные выражения в формулу для $W(A/\mathbf{y})$ и включая не зависящие от A множители в константу C , которая может быть определена из условия нормировки, получим окончательно:

$$W(A/\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\{A\}}} \exp\left[-\frac{(A-\bar{A})^2}{2D\{A\}}\right],$$

$$\text{где } \bar{A} = \frac{A_0}{1 + \left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^n s_{0i}^2} + \frac{\left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^n s_{0i} y_i}{1 + \left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^n s_{0i}^2}, \text{ а } D\{A\} = \frac{\sigma_A^2}{1 + \left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^n s_{0i}^2}.$$

Видно, что в условиях задачи апостериорное распределение параметра A – гауссовское, и оптимальная оценка $A_{\text{опт}} = \bar{A}$. Точность оценивания определяется дисперсией $D\{A\}$. Отметим, что поскольку для гауссовского распределения среднее значение, медиана и наиболее вероятное значение совпадают, $\hat{A}_{\text{опт}}$ будет оптимальной оценкой и для других рассмотренных функций потерь (модульной и простой).

Параметр $\left[1 + \left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^n s_{0i}^2\right]^{-1}$ определяет вклад в результирующую оценку априорной информации, характеризуемой распределением $W(A)$, и результата измерения $\sum_{i=1}^n s_{0i} y_i$.

При высокоточном измерении (большое отношение с/ш) можно считать, что $\left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^n s_{0i}^2 \gg 1$ и $A_{\text{опт}} = A_0 / \left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^n s_{0i}^2 + \sum_{i=1}^n s_{0i} y_i / \sum_{i=1}^n s_{0i}^2$, где первым слагаемым можно пренебречь, и $\hat{A}_{\text{опт}} \approx \sum_{i=1}^n s_{0i} y_i / \sum_{i=1}^n s_{0i}^2$, точность оценивания, при этом определяется дисперсией $D\{\hat{A}_{\text{опт}}\} = \sigma^2 / \sum_{i=1}^n s_{0i}^2$.

В другом крайнем случае, когда $\left(\frac{\sigma_A}{\sigma}\right)^2 \sum_{i=1}^n s_{0i}^2 \ll 1$ $\hat{A}_{\text{опт}} \approx A_0$,
 $D\{\hat{A}_{\text{опт}}\} = \sigma_A^2$.

2.4.3. Задачи

1. Простая гипотеза H_0 состоит в том, что выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ получена из экспоненциального распределения

$$W(x/H_0) = \begin{cases} \exp(-x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

проверяется против простой альтернативы H_1 , состоящей в том, что выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ получена из генеральной совокупности, описываемой односторонним нормальным распределением

$$W(x/H_1) = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \exp(-x^2/2), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти оптимальное решающее правило по критерию максимального правдоподобия. Как изменится решающее правило, если по гипотезе H_1 распределение будет иметь вид $\sqrt{1/2\pi} \exp(-x^2/2)$?

2. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение $N(0, \sigma)$ и подвергается следующим преобразованиям: по гипотезе H_0 $\eta = \xi^2$, а по гипотезе H_1 $\eta = \xi^3$. Записать отношение правдоподобия для проверки данных простых гипотез.

3. Постоянный сигнал $s(t) = u$, $u > 0$ обнаруживается на фоне аддитивной помехи, значения которой равномерно распределены в промежутке $[-a, a]$. Решение принимается по двум независимым отсчетам с использованием критерия Неймана–Пирсона. Изобразить области Y_0 и Y_1 и при заданном значении α построить зависимости β от величины u .

4. Сопоставить между собой качественные показатели обнаружения детерминированных прямоугольного видео- и радиоимпульсов одинаковой длительности и амплитуды. Шум – нормальный белый со спектральной плотностью мощности $N_0/2$.

5. Сопоставить между собой качественные показатели обнаружения детерминированных прямоугольных видео- и радиоимпульсов одинаковой энергии при обнаружении их на фоне:

- а) белого шума;
- б) белого шума, прошедшего через интегрирующую RC-цепь;
- в) белого шума, прошедшего через колебательный контур, настроенный на несущую частоту радиоимпульса.

6. Определить минимально необходимое для достижения вероятности ложной тревоги $0 < \alpha \leq 0,01$ число обрабатываемых отсчетов в обнаружителе детерминированной последовательности импульсов, если в его структуре на выходе согласованного с одиночным импульсом фильтра включен аналого-

цифровой преобразователь с характеристикой $U_{\text{вых АЦП}} = \begin{cases} 1, & U_{\text{вх АЦП}} \geq 0; \\ 0, & U_{\text{вх АЦП}} < 0? \end{cases}$

Чему в этом случае равна вероятность пропуска сигнала, если отношение с/ш после согласованного фильтра $q=1$?

7. Сигнал имеет вид $s(t) = U \frac{\sin(\pi F_c t)}{\pi F_c t}$. С какой из двух корреляционных функций – $K_1(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\pi F_{\Pi} \tau)}{\pi F_{\Pi} \tau}$ или $K_2(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(2\pi F_{\Pi} \tau)}{2\pi F_{\Pi} \tau}$, гауссовская помеха обеспечит более эффективное противодействие обнаружению сигнала? Рассмотреть различные соотношения между F_c и F_{Π} для двух случаев, когда обнаружитель рассчитан на:

- а) АБГШ;
 - б) создаваемую помеху.
8. Постоянный сигнал U обнаруживается на фоне нормальной аддитивной помехи с нулевым средним. Наблюдается n независимых отсчетов,

для которых корреляционная матрица имеет вид $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 2\sigma^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & n\sigma^2 \end{pmatrix}$.

Найти решающее правило, оптимальное по критерию Неймана–Пирсона, и определить качественные показатели обнаружителя.

9. Найти структуру оптимального обнаружителя сигнала $s(t) = S(t)\cos(\omega_0 t + \varphi)$ на фоне АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$, если фаза сигнала φ случайна и подчиняется распределению

$$W(\varphi) = \begin{cases} \frac{p_1}{2\pi} + p_2\delta(\varphi - \varphi_0), & \varphi \in [-\pi, \pi], p_1 + p_2 = 1; \\ 0, & \varphi \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Записать выражение для оценки качественных показателей (α и β).

10. На фоне АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ обнаруживается сигнал $s(t) = \begin{cases} A\cos 2\pi f_0 t, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$ где f_0 – известная частота;

A – случайная амплитуда с ПВ $W(A) = \begin{cases} A/\sigma^2 \exp(-A^2/2\sigma^2), & A \geq 0; \\ 0, & A < 0. \end{cases}$ Опреде-

лить структуру оптимального обнаружителя и рассчитать его качественные показатели (α и β).

11. Возможно ли безошибочное обнаружение сигнала $s(t) = \begin{cases} U_m, & |t| \leq T/2; \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$ на фоне помехи $x(t) = A\sin(\omega_0 t - \varphi)$, где ω_0 – детерминированная величина, а A и φ – независимые случайные величины с совмест-

ной плотностью вероятности $W(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)$, $A \geq 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Если да, то как это реализовать? Сравнить два случая:

а) помеха действует все время;

б) помеха действует лишь в пределах длительности сигнала.

12. Необходимо обнаружить на фоне АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ сигнал $s(t) = \begin{cases} U_m \cos 2\pi f t, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$ где U_m – извест-

ная амплитуда, а f – случайная величина, подчиняющаяся распределению

$W(f) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(f - f_i)$. Значения f_i таковы, что при заданной длительности

T сигналы, соответствующие частотам f_i , взаимно ортогональны. Опреде-

литель структуру оптимального обнаружителя и рассчитать качественные показатели, считая $N \gg 1$ и $p_i = 1/N$.

13. Найти алгоритм оптимального обнаружения сигнала

$$s(t) = \begin{cases} U_m, & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau], \end{cases}$$

где τ – дискретная случайная величина с плотностью вероятности $W(\xi) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(\tau - \tau_i)$ на фоне АБГШ с $S(\omega) = N_0/2$.

14. Оценить энергетические потери (требуемое увеличение энергии сигнала для сохранения неизменной вероятности ошибки) при различении двух равновероятных детерминированных сигналов одинаковой энергии с коэффициентом корреляции $r = 1/2$ по отношению к случаю различения противоположных сигналов. Как изменится ответ, если $r = 1/3$, $r = 1/5$, $r = -1/5$?

15. Найти вероятность ошибки при различении сигнала $s_1(t)$, имеющего энергию E , и сигнала $s_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_1(\tau)}{t - \tau} d\tau$. Сигналы равновероятны. Помеха – АБГШ с двусторонней спектральной плотностью мощности $N_0/2$.

16. Решается задача различения двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ (рис. 2.14) на фоне АБГШ. Как следует выбирать параметр τ , чтобы минимизировать

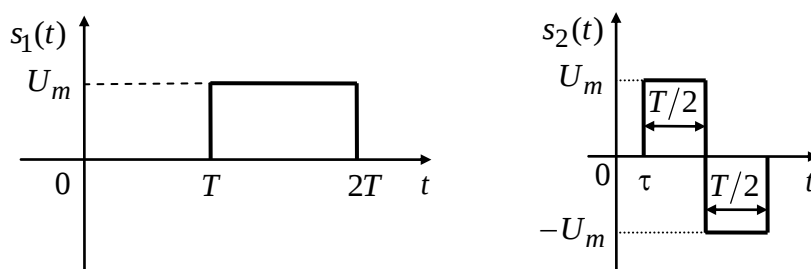


Рис. 2.14

вероятность ошибки? Проиллюстрируйте ответ временными диаграммами сигналов на входе решающего устройства.

17. Для какой из двух пар сигналов (рис. 2.15) вероятность правильного различения на фоне АБГШ будет меньше? Ответ обосновать.

18. Как изменится ошибка различения двух равновероятных противоположных сигналов одинаковой энергии на фоне АБГШ, если от задачи чистого различения перейти к задаче различения-обнаружения? Каким будет.

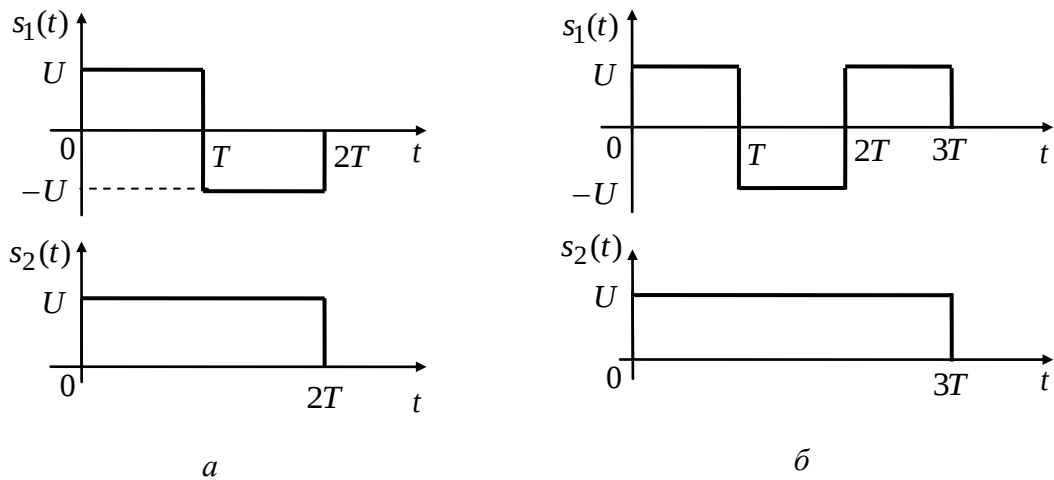


Рис. 2.15

алгоритм работы обнаружителя-различителя? Качественные показатели процедуры обнаружения (α и β) считать заданными

19. Найти вероятность ошибки при различении на фоне АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ двух равновероятных сигналов

$$s_1(t) = \begin{cases} U_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right), & |t| \leq T/2, \quad \mu T^2 \gg 1; \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_0 t), & |t| \leq T/2; \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases}$$

Воспользоваться свойствами интеграла Френеля $C(x)$ (см. [14, с. 102]).

20. Вычислить вероятности ошибок различения по методу максимального правдоподобия для двух пар сигналов, приведенных ниже, на фоне АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$: а) $s_1(t)$ и $s_2(t)$; б) $s_1^2(t)$ и $s_2^2(t)$, где $s_1(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$ $s_2(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$ $T \gg 2\pi/\omega_0$.

21. Для передачи одного бита информации используется два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$, показанных на рис. 2.16. Во сколько раз можно было бы снизить энергию сигналов, переходя к оптимальной паре сигналов, при условии сохранения неизменным значения вероятности ошибки? Помеха – АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$.

22. Прямоугольный видеоимпульс длительностью τ_n и амплитудой U_m , временное положение которого известно, проходит с равной вероятностью по двум каналам с коэффициентами передачи $K_1(j\omega)=1$ и $K_2(j\omega)=1-e^{-j\omega\tau_n/2}$ соответственно. Как с помощью различителя определить, по какому каналу передавался сигнал? Найти вероятность ошибки. Помеха – АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$.

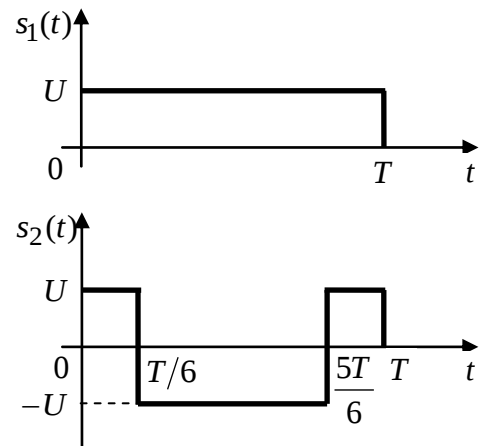


Рис. 2.16

23. Генератор гармонического колебания может работать на частоте 10^6 Гц или $10^6 + 1$ Гц. Амплитуда сигнала – 1 мВ. Спектральная плотность АБГШ $N_0/2 = 10^{-6}$ В²/Гц. Сколько времени надо обрабатывать наблюдаемое колебание, чтобы вероятность ошибки в определении частоты не превышала бы 10^{-2} ?

24. Найти МП-оценку величины постоянного сигнала U на основе наблюдений N независимых отсчетов аддитивной смеси сигнала и помехи, отсчеты которой подчиняются распределению $W_{\Pi}(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Какой результат выдаст измеритель после обработки выборки $Y_6 = (3, 2, 4, 1, 5, 0.2, 2, 8)$?

25. Для передачи четырех равновероятных символов отведены два временных интервала длительностью ΔT и две полосы частот ширины Δf (рис. 2.17). Интервалы ΔT , полосы Δf и расстояния между ними выбраны так, что сигналы не перекрываются ни по времени, ни по частоте. Начальные фазы сигналов случайны, независимы и равномерно распределены в промежутке $[-\pi, \pi]$. Энергия сигналов E , помеха – АБГШ с $S(\omega) = N_0/2$. Найти струк-

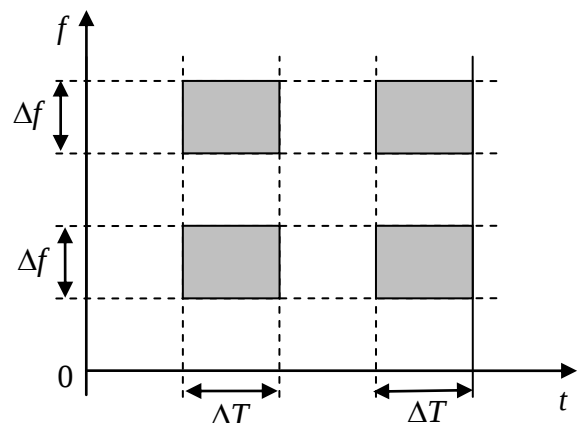


Рис. 2.17

туру различителя и определить вероятность ошибки. *Указание:* считая, что $p_{\text{ош}} \rightarrow 0$, воспользоваться для вычисления $p_{\text{ош}}$ аддитивной границей.

26. Найти структуру оптимального различителя по критерию максимального правдоподобия для сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, являющихся четной и нечетной частями сигнала $s(t) = \begin{cases} U_m, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$ и вычислить вероятность ошибки. Помеха – АБГШ с $S(\omega) = N_0/2$.

27. Оценить потенциальную точность измерения запаздывания сигнала $s(t) = U_m \frac{\sin 2\pi Ft}{2\pi Ft}$ на фоне нормального белого шума с двусторонней спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Как изменится результат, если частота F увеличится в 2 раза?

28. Определить дисперсию максимально правдоподобной оценки постоянной скорости сближения v передатчика, излучающего частоту f_0 , и неподвижного приемника, полученной на основе использования эффекта Доплера. Амплитуда принимаемого периодического колебания U_m , помеха – АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$, время излучения T и амплитуда сигнала U_m обеспечивают выполнение условия $q = \sqrt{2E/N_0} \gg 1$, где E – энергия обрабатываемого полезного сигнала.

29. Какое минимальное число периодов гармонического колебания $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ необходимо обработать, чтобы измерить методом максимального правдоподобия амплитуду A с относительной ошибкой $\sigma_{\hat{A}}/A = 1\%$ и фазу с точностью $\sigma_{\hat{\varphi}}/\varphi = 0,1\%$? Значение амплитуды лежит в диапазоне $[A_{\min}, A_{\max}]$, а фазы – в диапазоне $[0, 2\pi]$. Частота ω_0 известна. Измерения проводятся на фоне АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$.

30. Для оценки постоянной времени интегрирующей RC-цепи используется N практически независимых отсчетов выходного сигнала. Входной сигнал – нормальный белый шум со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Найти максимально правдоподобную оценку постоянной времени цепи.

31. Необходимо измерить разность фаз колебаний $U_{m1} \cos(\omega_0 t - \varphi_1)$ и $U_{m2} \cos(\omega_0 t - \varphi_2)$, принимаемых по двум каналам в течение времени T . По-

мехи в каналах независимы и представляют собой АБГШ с $S(\omega) = N_0/2$. Найти алгоритм оценивания и определить его точность.

32. Найти алгоритм обнаружения узкополосного сигнала $S(t)\cos(\omega_0 t - \varphi)$ с неизвестной начальной фазой φ на фоне АБГШ с $S(\omega) = N_0/2$ с помощью замены неизвестной фазы ее МП оценкой. Убедиться в том, что полученный алгоритм совпадает с алгоритмом обнаружения сигнала $S(t)\cos(\omega_0 t - \varphi)$ для случая, когда φ – случайная величина с распределением $W(\varphi) = 1/2\pi$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

33. Найти алгоритм МП оценивания числа импульсов M в пачке $\sum_{k=0}^M s(t - kT_{\text{и}})$ на фоне АБГШ с $S(\omega) = N_0/2$. Импульсы $s(t - kT_{\text{и}})$ взаимно ортогональны.

34. Для сигнала $s(t)$, приведенного на рис. 2.18, определить, как должны быть связаны параметры U_m , T и T_1 , чтобы точность измерения временного положения данного сигнала на фоне АБГШ с $S(\omega) = N_0/2$ оставалась бы постоянной при их изменении ($q = \sqrt{2E/N_0} \gg 1$).

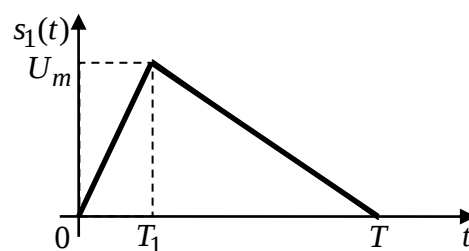


Рис. 2.18

35. Необходимо измерить неэнергетический параметр сигнала на фоне аддитивного нормального белого шума. Зависимость функции неопределенности $\psi(\lambda)$ по параметру λ для трех различных случаев представлена на рис. 2.19. В каком случае точность измерения λ будет наивысшей и почему? Параметр $q = \sqrt{2E/N_0}$ для всех трех случаев одинаков.

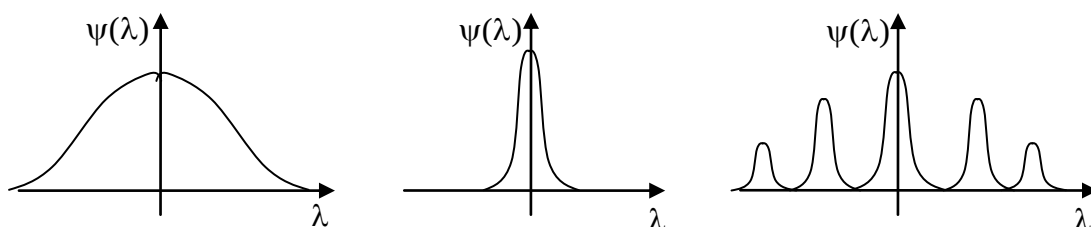


Рис. 2.19

36. Одновременно должны быть измерены два неэнергетических скалярных параметра λ_1 и λ_2 . Функция неопределенности $\psi(\lambda_1, \lambda_2)$ геометрически представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Сечение

этой поверхности на некотором уровне (например, 0,5) горизонтальной плоскостью представлено на рис. 2.20 для трех типичных случаев. Какой из них обеспечивает наибольшую точность одновременного оценивания λ_1 , λ_2 при условии отсутствия априорных сведений об их значениях и почему?

37. Заданы автокорреляционные функции трех различных сигналов (рис. 2.21). Какой из сигналов является наилучшим для измерения временной задержки и почему?

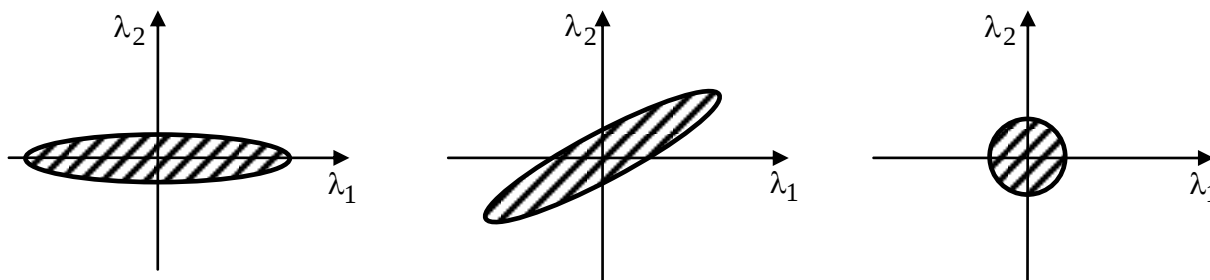


Рис. 2.20

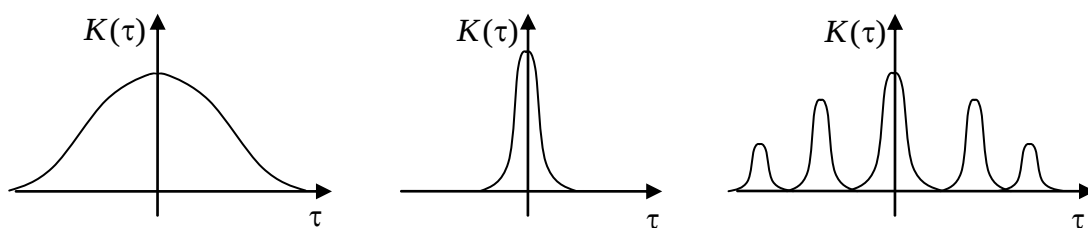


Рис. 2.21

38. В радиолокационной системе измерение дальности производится посредством использования импульса с ЛЧМ с базой $B = 10^3$. В результате поломки модулятора передатчик стал излучать немодулированные импульсы той же пиковой мощности и длительности. Что произойдет с разрешающей способностью по дальности?

39. На рис. 2.22 приведены временные ФН для трех сигналов (масштаб по временной оси одинаков). Какой из них обладает лучшей разрешающей способностью по задержке и почему?

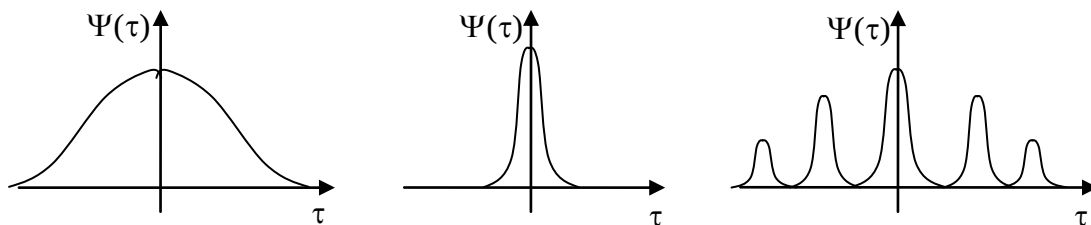


Рис. 2.22

40. На рис. 2.23 приведены горизонтальные сечения частотно-временной ФН сигналов. Какой из сигналов является наилучшим с точки зрения обеспе-

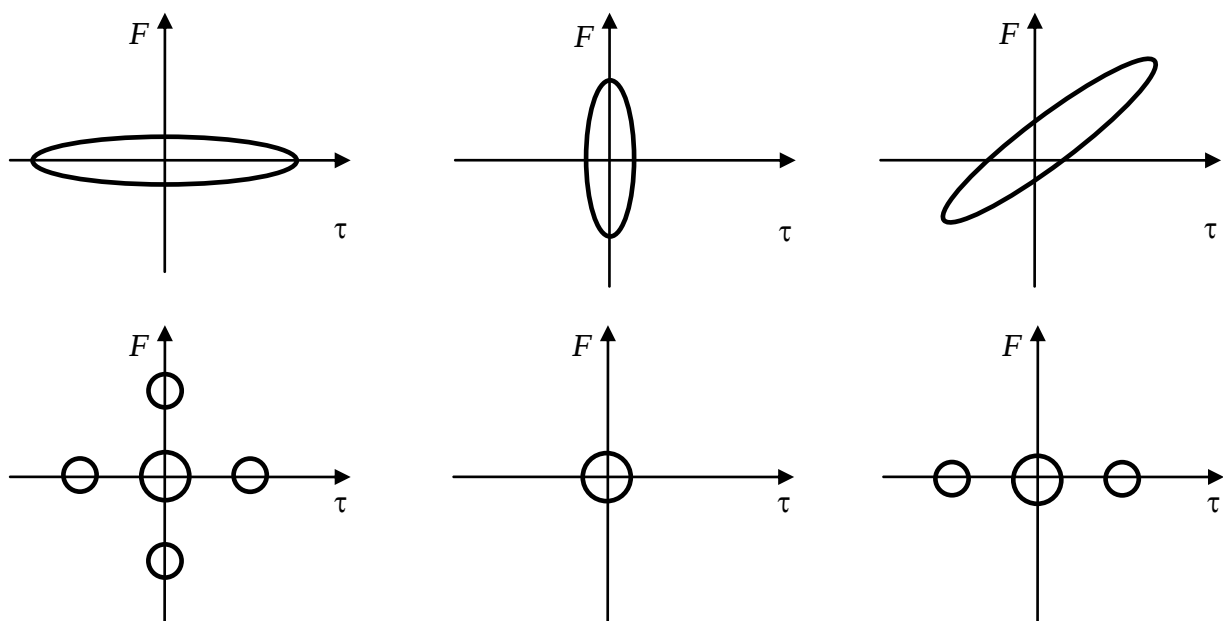


Рис. 2.23

чения разрешающей способности: а) по времени; б) по частоте; в) одновременно по времени и частоте, и почему?

41. Объясните, почему для ЛЧМ-сигналов существуют сочетания сдвигов по времени τ и частоте F , при которых два сигнала практически неразрешимы.

42. Найти частотно-временную ФН для сигнала с V-образной частотной модуляцией

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радиотехнические системы: учеб. для вузов по специальности «Радиотехника» / Ю. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов и др.; под ред. Ю. М. Казаринова. М.: Высш. шк., 1990.
2. Радиотехнические системы: учеб. для студентов высш. учеб. заведений / Ю. М. Казаринов и др.; под ред. Ю. М. Казаринова. М.: Издательский центр «Академия», 2008 г.
3. Ипатов В. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007 г.
4. Коломенский Ю. А., Ульяницкий Ю. Д., Павленко К. В. Помехоустойчивость радиотехнических систем: учеб. пособие / ЛЭТИ. Л., 1967. Разд. I.
5. Коломенский Ю. А., Ульяницкий Ю. Д., Павленко К. В. Помехоустойчивость радиотехнических систем: учеб. пособие / ЛЭТИ. Л., 1968. Разд. II.
6. Коломенский Ю. А., Ульяницкий Ю. Д. Статистические методы измерения параметров сигналов в шумах: учеб. пособие / ЛЭТИ. Л., 1970.
7. Казаринов Ю. М., Коломенский Ю. А., Ульяницкий Ю. Д. Математический аппарат статистической радиотехники: учеб. пособие в 3 ч. / ЛЭТИ. Л., 1973, 1976, 1977.
8. Ипатов В. П. Методы обработки сигналов: учеб. пособие. / ЛЭТИ. Л., 1978.
9. Методы обработки сигналов в условиях априорной неопределенности: учеб. пособие / В. А. Богданович, В. Н. Бондаренко, Ю. А. Коломенский, Ю. Д. Ульяницкий; ЛЭТИ. Л., 1980.
10. Методы обработки сигналов: учеб. пособие / В. П. Ипатов, Ю. А. Коломенский, К. В. Павленко, Ю. Д. Ульяницкий / ЛЭТИ. СПб., 1993.
11. Измерение параметров сигналов радиотехнических систем: Учебное пособие / В. П. Ипатов, Ю. А. Коломенский, К. В. Павленко, Ю. Д. Ульяницкий / ЛЭТИ. Л., 1986.
12. Фильтрация параметров и разрешение сигналов РТС / В. П. Ипатов, Ю. А. Коломенский, К. В. Павленко, Ю. Д. Ульяницкий / ЛЭТИ. Л., 1988.
13. Статистическая теория связи в вопросах и задачах: учеб. пособие. О. М. Заславская, В. П. Ипатов, А. С. Маругин и др. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004.
14. Математический аппарат радиотехники: учеб. пособие: в 2 ч. / под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. Ч. I. Множества, пространства, операторы. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006.

15. Математический аппарат радиотехники: учеб. пособие: в 2 ч. / под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. Ч. II. Случайные процессы. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006.
16. Методы математической статистики и их применение в радиотехнике: учеб. пособие / под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2008.
17. Компьютерный практикум по дисциплинам «Математический аппарат радиотехники» и «Статистическая теория РТС»: учеб. пособие / под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011.
18. Математическое моделирование случайных процессов: учеб. пособие / под общей ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.
19. Преобразование сигналов и помех линейными и нелинейными системами: учеб. пособие / под общ. ред. проф. В. П. Ипатова и проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013.
20. Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Статистическая радиотехника: примеры и задачи: учеб. пособие для вузов / под ред. В. И. Тихонова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Сов. радио, 1980.
21. Сборник задач по применению математического аппарата радиотехнических систем: в 2 ч. / под ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2010. Ч. 2.
22. Сборник задач по применению математического аппарата радиотехнических систем: в 2 ч. / под ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2009. Ч. 1.
23. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов. Стандарт третьего поколения / под ред. В. Н. Ушакова. СПб.: Питер, 2014.
24. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: Гос. изд-во физ. мат. лит., 1963.
25. Наумов К. П., Ушаков В. Н. Акустооптические сигнальные процессоры: учеб. пособие. М.: Сайнс-пресс, 2002.
26. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы / пер. с англ. под ред. В. С. Кельзона. М.: Сов. радио, 1971.
27. Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи. М.: Радио и связь, 1971.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ И РАДИОТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ.....	4
1.1. Информационные радиотехнические системы и их классификация.....	4
1.2. Математические модели сигналов и помех.....	8
1.2.1. Сигналы, помехи, поля	8
1.2.2. Аналитическое описание сигналов	11
1.2.3. Огибающая и фаза.....	15
1.2.4. Корреляционные функции и функции неопределенности	19
1.2.5. Обобщенная модель и категории дискретных сигналов.....	21
1.2.6. Корреляционные функции АФМ-сигналов.....	23
1.2.7. Вычисление корреляционных функций кодовых последовательностей	26
1.2.8. Корреляционные функции ЧМ-сигналов	29
1.2.9. Аналитическое описание помех	32
1.3. Фильтры, максимизирующие отношение сигнал/шум	37
1.4. Контрольные вопросы, примеры и задачи	49
1.4.1. Контрольные вопросы	50
1.4.2. Примеры.....	56
1.4.3. Задачи	67
Глава 2. ОБНАРУЖЕНИЕ, РАЗЛИЧЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ	73
2.1. Основные теоретические сведения	73
2.2. Разрешающая способность РТС	99
2.3. Разрешение по времени запаздывания и частоте.....	104
2.4. Контрольные вопросы, примеры и задачи	116
2.4.1. Контрольные вопросы	116
2.4.2. Примеры.....	120
2.4.3. Задачи	130
Список литературы	140

Андреева Ольга Марковна, Богачев Михаил Игоревич,
Ипатов Валерий Павлович, Красичков Александр Сергеевич,
Маркелов Олег Александрович, Маругин Алексей Сергеевич,
Пыко Светлана Анатольевна, Соколов Андрей Андреевич,
Соколова Анастасия Алексеевна, Ульяницкий Юрий Дмитриевич,
Хачатурян Алена Борисовна

**Статистическая теория радиотехнических и
телекоммуникационных систем.**

Часть 1

Учебное пособие

Редактор Н. В. Лукина

Подписано в печать 30.12.15. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 9,25.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 67 экз. Заказ .

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5