

Расчет трехфазных цепей

Задача 2

Задание.

1. Найти токи и напряжения Y -нагрузки при 3-х и 4-х проводной линии питания от Y -источника (рис.1).
2. Найти мощность нагрузки. Определить показания однофазных ваттметров в соответствии с заданной схемой их включения (рис.2).
3. Определить симметричные составляющие тока нейтрального провода 4-х проводной линии
4. Построить векторные диаграммы.
5. Проверить результаты расчета на рабочем столе Electronics Workbench.

Пример выполнения задания

Параметры цепи заданы в таблице вариантов 1. Нагрузка питается от симметричного источника напряжения $\dot{U}_A = U$, $\dot{U}_B = a^2 \cdot U$, $\dot{U}_C = a \cdot U$. Частота напряжения сети $f = 50$ Гц.

Таблица 1.

№	U	Z_A	Z_B	Z_C
1	220	$j10\sqrt{3}$	10	$-j10\sqrt{3}$
2	380	10	$j10\sqrt{3}$	$-j10\sqrt{3}$
3	220	$10 \exp(j\pi/6)$	$j10$	$10 \exp(-j\pi/6)$
4	380	$10/\sqrt{3} \cdot \exp(-j\pi/3)$	$-j10$	$10 \exp(-j\pi/6)$
5	220	$10 \exp(-j\pi/3)$	$10 \exp(j\pi/3)$	$10/\sqrt{3}$
6	380	$-j20$	$20/\sqrt{3}$	$j20$
7	220	10	$10/\sqrt{3} \cdot \exp(-j\pi/6)$	$10 \exp(-j\pi/3)$
8	220	10	$10 \exp(-j\pi/3)$	$10 \exp(j\pi/3)$
9	380	$-j20$	$j20$	$20/\sqrt{3}$
10	127	$10/\sqrt{3} \cdot \exp(j\pi/6)$	$10 \exp(-j\pi/6)$	$j10$
11	220	$10 \exp(-j\pi/3)$	10	$10 \exp(j\pi/3)$
12	220	$j10$	$-j10$	$10/\sqrt{3}$
13	380	$10/\sqrt{3} \cdot \exp(-j\pi/6)$	$10 \exp(-j\pi/3)$	10
14	220	$j10$	$10/\sqrt{3}$	$-j10$
15	380	$10 \exp(-j\pi/6)$	$10 \exp(j\pi/6)$	$-j10$
16	380	$10/\sqrt{3}$	$j10$	$-j10$
17	380	$10 \exp(j\pi/3)$	5	$10 \exp(-j\pi/3)$
18	380	$10/\sqrt{3}$	$10 \exp(-j\pi/6)$	$10 \exp(j\pi/6)$
19	220	$10/\sqrt{3}$	$-j10$	$j10$
20	220	10	$10 \exp(j\pi/6)$	$20 \exp(-j\pi/6)$
21	380	10	$-j10\sqrt{3}$	$j10\sqrt{3}$
22	380	$j10\sqrt{3}$	$-j10\sqrt{3}$	10
23	380	$20 \exp(-j\pi/6)$	10	$10 \exp(j\pi/6)$
24	220	$10 \exp(j\pi/3)$	5	$10 \exp(-j\pi/3)$
25	220	$20 \exp(-j\pi/6)$	$-j10$	$10 \exp(j\pi/6)$

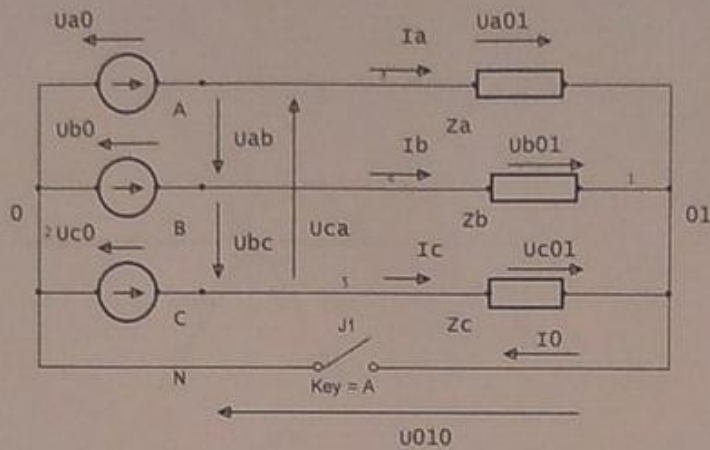


Рис.1. Трех и четырех проводная линия питания нагрузки, включенной по схеме «звезда».

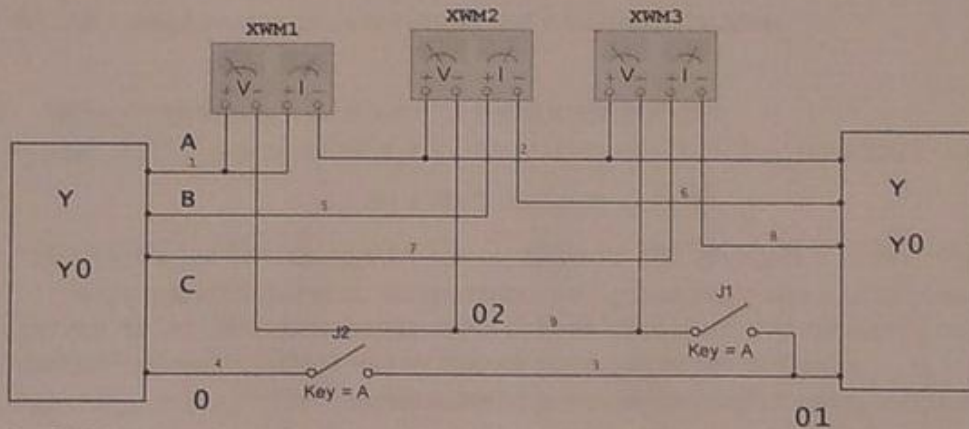


Рис.2. Схема измерения мощности в 4-х проводной линии (ключи замкнуты) и 3-х проводной линии (ключи разомкнуты). Узел 02 – искусственная нейтральная точка.

Расчет 4-х проводной линии

Нейтральные точки источника и нагрузки O, O_1 соединены нейтральным проводом, сопротивление которого принято равным нулю $Z_N = 0$. Поэтому смещение нейтралей отсутствует $\dot{U}_N = Z_N \cdot I_0 = 0$, напряжение источника равно напряжению нагрузки

$\dot{U}_{AO} = \dot{U}_{AO1} = U$. Ток нагрузки определяется по закону Ома

$$\dot{I}_A = \dot{U}_A \cdot Y_A = 220 \cdot 0.1 \exp(-j\pi/3) = 11 - j11 \cdot \sqrt{3}$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}_B \cdot Y_B = 220 \exp(-j2\pi/3) \cdot 0.2 = -22 - j\sqrt{3} \cdot 22$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_C \cdot Y_C = 220 \exp(j2\pi/3) \cdot 0.1 \exp(j\pi/3) = -22$$

Ток нейтрального провода определяется по ЗКТ

$$I_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 33 \cdot (-1 - j\sqrt{3}) = 66 \exp(-j2 \cdot \pi/3)$$

Векторная диаграмма напряжений и токов показана на рис.3.

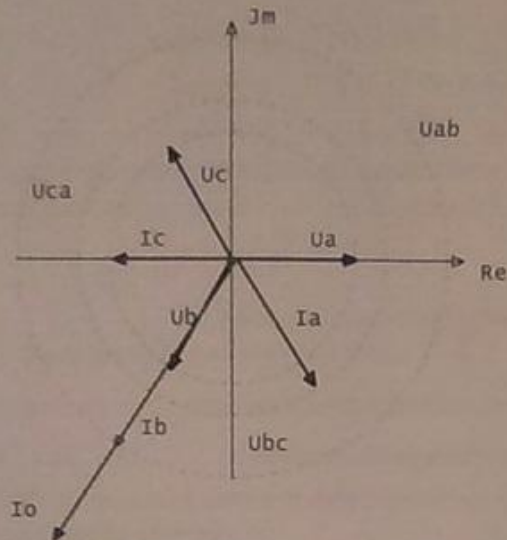


Рис. 3 Векторные диаграммы токов и напряжений в 4-х проводной линии.

Запишем временные зависимости токов и напряжений

$$i_A(t) = 22\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - \pi/3), \quad i_B(t) = 44\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 2\pi/3), \quad i_C(t) = 22\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - \pi)$$

$$i_0(t) = 66\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 2\pi/3)$$

$$u_A(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad u_B(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 2\pi/3), \quad u_C(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 2\pi/3)$$

Из результатов расчета, построенных векторных диаграмм и осциллограмм токов (рис.4а) видно, что асимметрия токов связана как с отличием амплитуд токов фаз, так и отличием фазового сдвига между токами смежных фаз от значения

$\varphi_{U_{AB}} = \varphi_{U_{BC}} = \varphi_{U_{CA}} = 120^\circ$, характерного для симметричной системы напряжений (см. рис.4б):

$$\varphi_{IA,IB} = \psi_{IA} - \psi_{IB} = -60 - (-120) = 60^\circ$$

$$\varphi_{IB,IC} = \psi_{IB} - \psi_{IC} = -120 - (-180) = 60^\circ$$

$$\varphi_{IC,IA} = \psi_{IC} - \psi_{IA} = -180 - (-60) = -240 = 120^\circ$$

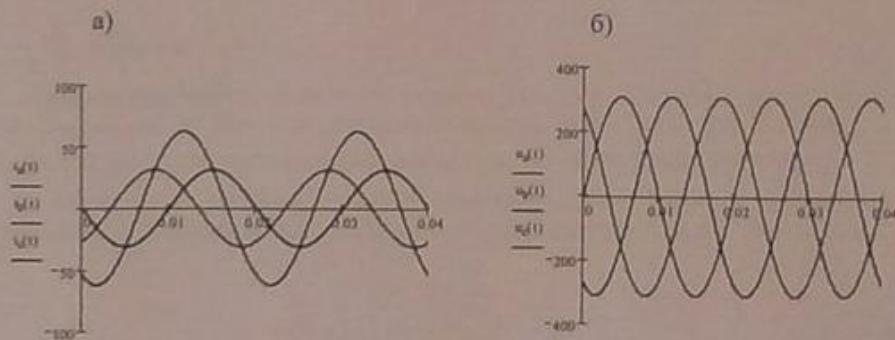


Рис.4. Осциллограммы токов - а) и напряжений - б)

Мощность трехфазной цепи

Находим мощность фаз

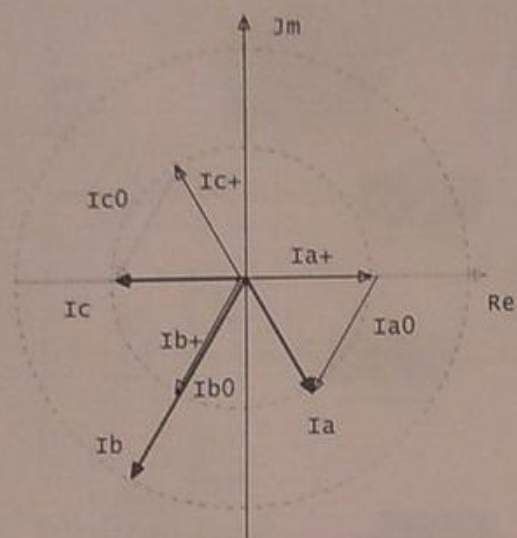


Рис. 5. Векторная диаграмма несимметричных токов и их симметричных составляющих прямой и нулевой последовательности.

Проверка результатов расчета на рабочем столе Electronics Workbench.

Используя алгебраическую форму представления комплексных сопротивлений фаз Z_A, Z_B, Z_C , определим параметры элементов, образующих нагрузку.

Сопротивление $Z_A = 10 \exp(j\pi/3) = 5 + j5\sqrt{3}$ имеет индуктивный характер. Активное сопротивление равно $R = 5$. По индуктивному сопротивлению $X_L = 5\sqrt{3}$ находим индуктивность: $L_A = X_L / \omega = 8.67 / 314 = 27.56$ мГн.

Сопротивление $Z_B = R_B$ является чисто активным.

Сопротивление $Z_C = 10 \exp(-j\pi/3) = 5 - j5\sqrt{3}$ имеет емкостный характер. Активное сопротивление равно $R_C = 5$. По емкостному сопротивлению $X_C = 5\sqrt{3}$ находим емкость С-элемента: $C = 1 / X_C \cdot \omega = 1 / 8.67 \cdot 314 = 367.3$ мкФ.

Модель цепи с измерительными приборами, собранная на рабочем столе *Electronics Workbench*, показана на рис.6.

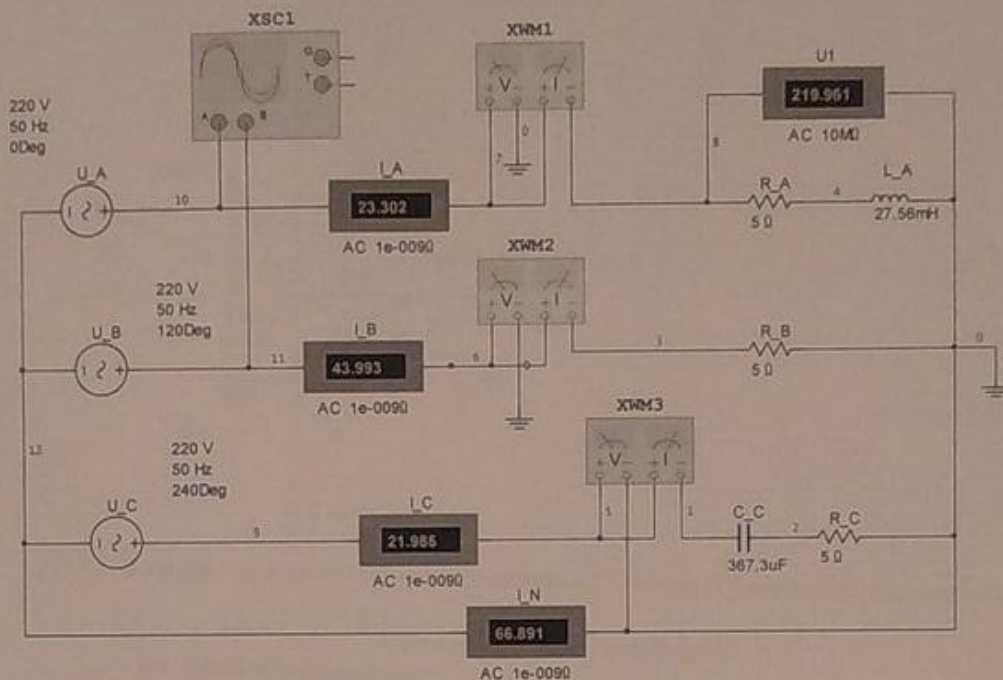


Рис.6 . Схема проверки результатов расчета.

В модели напряжение источника изменяется по закону $e(t) = E_m \sin(\omega t - \psi_e)$. Поэтому при формировании трехфазного источника следует устанавливать начальные фазы $\psi_A = 0, \psi_B = 120^\circ, \psi_C = 240^\circ$. Из показаний приборов следует, что результаты расчета совпадают с результатами измерений

3-х проводная схема питания Y - приемника.

Несимметричная нагрузка в отсутствие нейтрального провода вызывает смещение нейтралей

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{U}_A \cdot Y_A + \dot{U}_B \cdot Y_B + \dot{U}_C \cdot Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = 220 \cdot \frac{\exp(-j\pi/3) + 2 \cdot \exp(-j2\pi/3) + \exp(j \cdot (\pi/3 + 2\pi/3))}{\exp(-j\pi/3) + 2 + \exp(j\pi/3)} =$$

$$= 220 \exp(-j2\pi/3) = \dot{U}_B$$

Определяем фазные напряжения нагрузки

$$\dot{U}_{AO1} = \dot{U}_A - \dot{U}_N = \dot{U}_{AB} = 220\sqrt{3} \exp(j\pi/6) \quad \dot{U}_{BO1} = \dot{U}_B - \dot{U}_N = 0$$

$$\dot{U}_{CO1} = \dot{U}_C - \dot{U}_N = \dot{U}_{CB} = -\dot{U}_{BC} = 220\sqrt{3} \exp(j\pi/2) = j220\sqrt{3}$$

Токи находятся по закону Ома

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AO1} \cdot Y_A = 220\sqrt{3} \exp(j\pi/6) \cdot 0.1 \exp(-j\pi/3) = 22\sqrt{3} \exp(-j\pi/6) = 33 - j11\sqrt{3}$$

$$\dot{I}_B = \dot{U}_{BO1} \cdot Y_B = 0$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{CO1} \cdot Y_C = j220\sqrt{3} \cdot 0.1 \exp(j\pi/3) = 22\sqrt{3} \exp(j5\pi/6) = -33 + j11\sqrt{3}$$

Закон Кирхгофа для токов выполняется

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 33 - j11\sqrt{3} + 0 - 33 + j11\sqrt{3} = 0$$

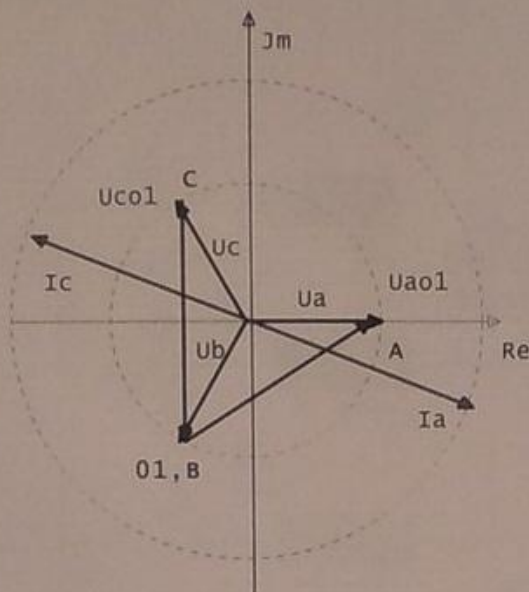


Рис.7. Векторные диаграммы токов и напряжений в 3-х проводной линии при несимметричной нагрузке

Мощность трехфазной цепи

Находим мощность фаз

$$\dot{S}_A = \dot{U}_{AO1} \cdot \dot{I}_A = 220 \cdot \sqrt{3} \exp(j\pi/6) 22\sqrt{3} \exp(j\pi/6) = 4840\sqrt{3} \cdot \exp(j\pi/3) = 7260 \cdot (1 + j\sqrt{3})$$

$$\dot{S}_B = \dot{U}_{BO1} \cdot \dot{I}_B = 0$$

$$\dot{S}_C = \dot{U}_{CO1} \cdot \dot{I}_C = j220\sqrt{3} \cdot 22\sqrt{3} \exp(-j5\pi/6) = 4840\sqrt{3} \exp(-j\pi/3) = 7260(1 - j\sqrt{3})$$

Реактивные мощности фаз A, C равны по модулю и противоположны по знаку. Поэтому комплексная мощность 3-х фазной цепи не содержит реактивной составляющей

$$\dot{S} = \dot{S}_A + \dot{S}_B + \dot{S}_C = 14520.$$

Проверка результатов расчета на рабочем столе Electronics Workbench

В схеме (рис.6) для измерения мощности используются три однофазных ваттметра с искусственной нейтральной точкой 0_2 , потенциал которой равен потенциалу нейтральной точки источника 0 и не равен потенциалу нейтральной точки приемника 0_1 . В силу того, что ток $I_B \approx 0$, смещение нейтралей равно фазному напряжению источника

$$U_N = U_B = 220.$$

Запишем комплексную мощность

$$\dot{S} = (\dot{U}_A - \dot{U}_N) \cdot \dot{I}_A + (\dot{U}_B - \dot{U}_N) \cdot \dot{I}_B + (\dot{U}_C - \dot{U}_N) \cdot \dot{I}_C = \dot{U}_A \cdot \dot{I}_A + \dot{U}_B \cdot \dot{I}_B + \dot{U}_C \cdot \dot{I}_C - \dot{U}_N \cdot (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C)$$

С учетом ЗКТ $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, последнее выражение принимает вид

$$\dot{S} = \dot{U}_A \cdot \dot{I}_A + \dot{U}_B \cdot \dot{I}_B + \dot{U}_C \cdot \dot{I}_C$$

Тогда активную мощность 3-х фазной нагрузки можно определить как сумму показаний ваттметров

$$P = \text{Re}(\dot{S}) = P_{WA} + P_{WB} + P_{WC}$$

Отметим, что в случае неравномерной нагрузки физический смысл имеет только сумма показаний однофазных приборов

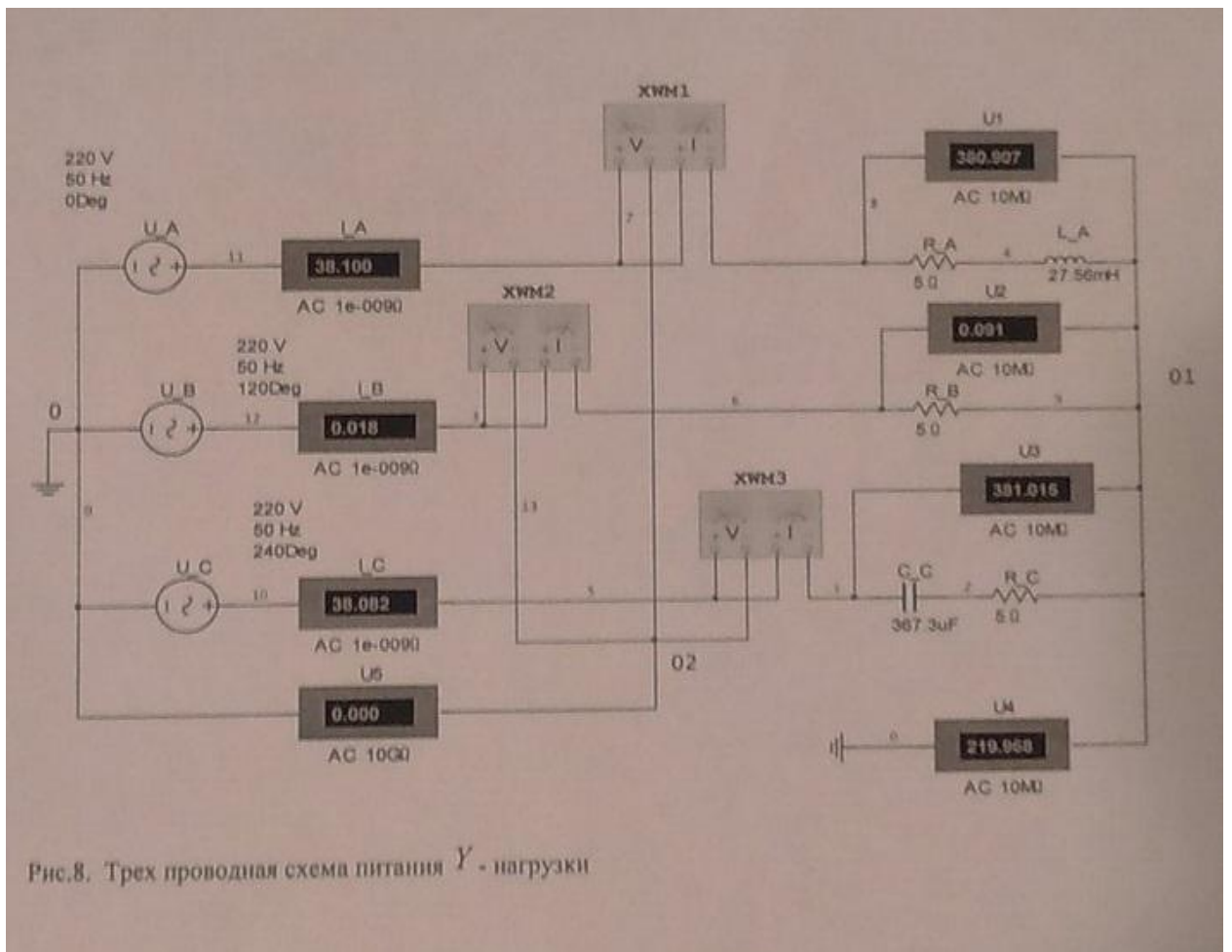


Рис.8. Трех проводная схема питания Y - нагрузки

$$\dot{S}_A = U_A \cdot I_A^* = 220 \cdot 11 \cdot (1 + j\sqrt{3}) = 2420 + j\sqrt{3} \cdot 2420$$

$$\dot{S}_B = U_B \cdot I_B^* = 220(-0.5 - j0.5\sqrt{3}) \cdot 22 \cdot (-1 + j\sqrt{3}) = 9680$$

$$\dot{S}_C = U_C \cdot I_C^* = 220 \cdot (-0.5 + j0.5\sqrt{3}) \cdot (-22) = 2420 - j\sqrt{3} \cdot 2420$$

Реактивные мощности фаз A, C равны по модулю и противоположны по знаку. Поэтому комплексная мощность 3-х фазной цепи реактивной составляющей не содержит

$$\dot{S} = \dot{S}_A + \dot{S}_B + \dot{S}_C = 14520.$$

Симметричные составляющие токов цепи

Несимметричную систему токов $\underline{I} = [I_A \quad I_B \quad I_C]^T$ можно представить в виде наложения симметричных составляющих прямой $\underline{I}^+ = [I_A^+ \quad I_B^+ \quad I_C^+]^T$, обратной $\underline{I}^- = [I_A^- \quad I_B^- \quad I_C^-]^T$ и нулевой последовательностей $\underline{I}^0 = [I_A^0 \quad I_B^0 \quad I_C^0]^T$. Составляющие этих последовательностей записываются с помощью фазового множителя $a = \exp(j2\pi/3)$ следующим образом

$$\underline{I}^+ = [I_A^+ \quad a^2 \cdot I_A^+ \quad a \cdot I_A^+]^T, \quad \underline{I}^- = [I_A^- \quad a \cdot I_A^- \quad a^2 \cdot I_A^-]^T, \quad \underline{I}^0 = [I_A^0 \quad I_A^0 \quad I_A^0]^T$$

Представим систему несимметричных токов \underline{I} как сумму симметричных составляющих

$$\underline{I} = \underline{I}^+ + \underline{I}^- + \underline{I}^0$$

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A^+ + I_A^- + I_A^0 \\ a^2 \cdot I_A^+ + a \cdot I_A^- + I_A^0 \\ a \cdot I_A^+ + a^2 \cdot I_A^- + I_A^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A^+ \\ I_A^- \\ I_A^0 \end{bmatrix}$$

Решение системы относительно симметричных составляющих дает

$$\begin{bmatrix} I_A^+ \\ I_A^- \\ I_A^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

Используя полученные формулы, находим симметричные составляющие токов 4-х проводной линии

$$I_A^0 = \frac{1}{3} \cdot (I_A + I_B + I_C) = -11 \cdot (1 + j\sqrt{3}) \quad I_A^+ = \frac{1}{3} \cdot (I_A + a \cdot I_B + a^2 \cdot I_C) = 22$$

$$I_A^- = \frac{1}{3} \cdot (I_A + a I_B + a^2 I_C) = 0$$

Несимметричная система токов является наложением токов прямой и нулевой последовательности, обратная последовательность отсутствует. Ток в нейтральном проводе равен утроенному значению токов нулевой последовательности $I_N = 3I_A^0$.

Как видно из рисунка 5, результат сложения комплексных токов прямой и обратной последовательности дает исходную несимметричную систему токов.